

АЛГЕБРА

Методы решения показательных уравнений
Удалайский Алексей

Показательные уравнения

**Определе
ие**

**Простейшие
уравнения**

**Способы решения сложных
уравнений**

Определение

Уравнение, в котором переменная содержится в показателе степени, называется **показательным**.

Примеры:

$$5^x =$$

$$49^{x+0,5} \bullet$$

$$2^{x-2} = 1$$

$$x = 3^{0,5}$$
$$3^x + 3^{3-x}$$

$$x = 12$$



Простейшим показательным уравнением является уравнение вида

$$a^x = a^b, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

Простейшее показательное уравнение решается с использованием свойств степени

$$a^x = a^b \Leftrightarrow x = b$$

$$1) a^0 = 1$$

$$2) a^1 = a$$

$$3) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$4) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \text{ где } a \neq 0$$

$$5) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$6) (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$7) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \text{ где } b \neq 0$$

$$8) a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}; \text{ где } a \neq 0$$

$$9) \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^{-n}} = a^n; \text{ где } a \neq 0$$

$$10) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}; \text{ где } a \neq 0 \text{ и } b \neq 0.$$

Решить уравнения:

1. $9^{3x} = 27$

2. $5^{7x-9} = 5^{11-3x}$

3. $25 \cdot 5^x = 1$

4. $5^{x+2} = 1251$
 $4^x = \overline{0,75} \overline{256}$

5.

$$9^{2x} = \frac{1}{27}$$

$$9^{2x} = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^{4x} = \frac{3^0}{3^3} \Rightarrow 3^{4x} = 3^{0-3} \Rightarrow 3^{4x} = 3^{-3}$$

$$4x = -3 \Rightarrow x = -3/4 =$$

Ответ: -0,75



Деление на
показательную
функцию

Графически
й метод

**СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ
СЛОЖНЫХ
ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

Замена
переменной

Вынесение за
скобки
наименьшего
общего множителя

Метод замены переменной

Показательное уравнение сводится к решению квадратного.

Способы замены используют, если:

- a) основания степеней одинаковы;
- b) показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем другой. Например: $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$;
- c) коэффициенты перед переменной противоположны. Например: $2^{2-x} - 2^x - 1 = 1$.

Решим

$$9^x - 8 \cdot 3^x = 9$$

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$3^x = t, (t \geq 0)$$

$$t^2 - 8 \cdot t - 9 = 0$$

$$D = 64 + 36 = 100$$

$$t_1 = \frac{8+10}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{8-10}{2} = -1,$$

$$3^4 = 9$$

$$3^4 = 3^2$$

$$x = 2$$

Ответ : $x = 2$

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$$

$$2^2 \cdot 2^{-x} - 2^x \cdot 2^{-1} = 1$$

$$\frac{4}{2^x} - \frac{2^x}{2} - 1 = 0$$

$$2^x = t, (t \geq 0)$$

$$\frac{4}{t} - \frac{t}{2} - 1 = 0 / \cdot (-2t)$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$D = 4 + 32 = 36$$

$$t_1 = \frac{-2+6}{2} = 2$$

$$t_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

Ответ : $x = 1$

Решить самостоятельно:

$$3^{2x} - 24 \cdot 3^x - 81 = 0$$

$$4^{2x} - 3 \cdot 4^x - 4 = 0$$

$$2^{2x} - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$$

$$6^{2x} - 35 \cdot 6^x - 36 = 0$$

- A) $x=2$; B) $x=3$; C) $x=1$;
D) $x=3$; E) $x=4$.



Метод вынесения наименьшего общего множителя за скобки.

Этот метод используется, если
соблюдаются два условия:

- основания степеней одинаковые;
- коэффициенты перед переменной
одинаковые.

$$2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$$

Например:

Решим

$$2^{x+1} - 2^{x+3} = -12 \quad \text{уравнения:} \quad 3 \cdot 5^{x-2} + 5^{x-1} = 200$$

$$2^{x+1} \cdot (1 - 2^2) = -12$$

$$2^{x+1} \cdot (-3) = -12$$

$$2^{x+1} = 4$$

$$2^{x+1} = 2^2$$

$$x + 1 = 2$$

$$x = 1$$

Ответ : x = 1

$$5^{x-2} \cdot (3 + 5) = 200$$

$$5^{x-2} \cdot 8 = 200$$

$$5^{x-2} = 25$$

$$5^{x-2} = 5^2$$

$$x - 2 = 2$$

$$x = 4$$

Ответ : x = 4

Примеры:

$$4^{x+2} - 4^{x+5} = -252$$

$$2^{3x+2} - 2^{3x-2} - 2^{3x-1} = 208$$

$$2^{3x+2} + 3 \cdot 2^{3x-2} - 5 \cdot 2^{3x+1} = -336$$

$$3^{x+1} + 2^{2x+1} = -20 \cdot 2^{2x} + 3^{x+2}$$

$$5^{x-1} - 3 \cdot 5^{x+1} = -370$$



Деление на показательную функцию

Этот способ используется, если основания степеней разные:

а) в уравнении вида $a^x = b^x$ делим на b^x
Например: $4^x = 7^x \mid : 7^x$

б) в уравнении $A a^{2x} + B (ab)^x + C b^{2x} = 0$

делим на b^{2x} .

Например:

$$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \mid : 9^x$$

Решим

уравнения!

$$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 : 9^x \quad D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 = 2^2$$

$$\frac{3 \cdot 5^{2x}}{3^{2x}} - \frac{8 \cdot 5^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + 5 = 0$$

$$t_1 = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}; \quad t_2 = \frac{8-2}{6} = 1.$$

$$3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 5 = 0$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{5}{3}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1$$

$$t = \left(\frac{5}{3}\right)^x \quad (t > 0)$$

$$x = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^0$$

$$x = 0$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

Ответ:

0; 1

Примеры

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$$

$$7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

$$3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x$$

Графический метод

$$4^x = 5 - x$$

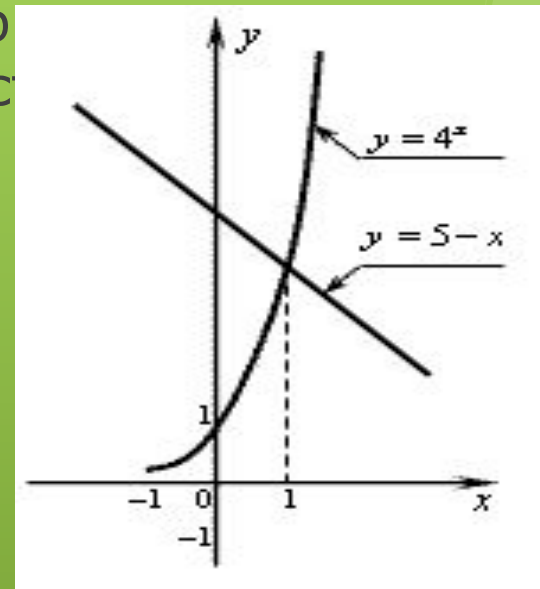
Построим в одной системе координат графики функций $y = 4^x$ и $y = 5 - x$.
Методом графической иллюстрации, или каких-либо свойств

□ Решите уравнение

x	-2	-1	0	1	2	x	0	1
y	1/16	1/4	1	4	16	y	5	4

Они пересекаются в одной точке (1; 4).

Ответ: 1.



Домашнее задание

Вариант I

Решите уравнение: $4^{x-4} = 0,5$

Найти корень уравнения: $\left(\frac{6}{5}\right)^{x^2+27(x-1)} = \left(\frac{5}{6}\right)^{-9x^2}$

Решите уравнение $5^x - 5^{3-x} = 20$

Решите уравнение: $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2x+3} + 49^{x-1} + 7^{2x-1} = 399$

Решите уравнение $4 \cdot 9^x + 12^x - 3 \cdot 16^x = 0$

Вариант II

Решите уравнение $(3,5)^{x-5} = \left(\frac{4}{49}\right)^2$

Решите уравнение: $\left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{16}{5}\right)^x = 2\sqrt{2}$

Решите уравнение $5^x - 24 = 5^{2-x}$

Решите уравнение $6 \cdot 9^{0,5x-2} + 2 \cdot 3^{x-6} = 56$

Решите уравнение $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$

Литература:

1. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов Ш. А. Алимов и др. — 15-е изд. — М.: Просвещение, 2007
2. Система тренировочных задач и упражнений по математике/А.Я.Симонов, Д.С.Бакаев, А.Г.Эпельман и др.- М.: Просвещение, 1991
3. <http://rudocs.exdat.com/docs/index-17520.html> -
Классен Светлана Викторовна
4. <http://www.uztest.ru/> - Ким Наталья Анатольевна