

Метрические характеристики графа

Определение 1

Последовательность вершин и ребер графа
вида $a_0(a_0, a_1)a_1(a_1, a_2)a_2(a_2, a_3)a_3 \dots a_{n-1}(a_{n-1}, a_n)a_n$
называется маршрутом, соединяющим вершины a_0 и a_n .

Замечание

Очевидно, что маршрут можно однозначно задать

$: a_1, a_2, \dots, a_n$ или

последовательностью только вершин
только ребер: $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n)$.

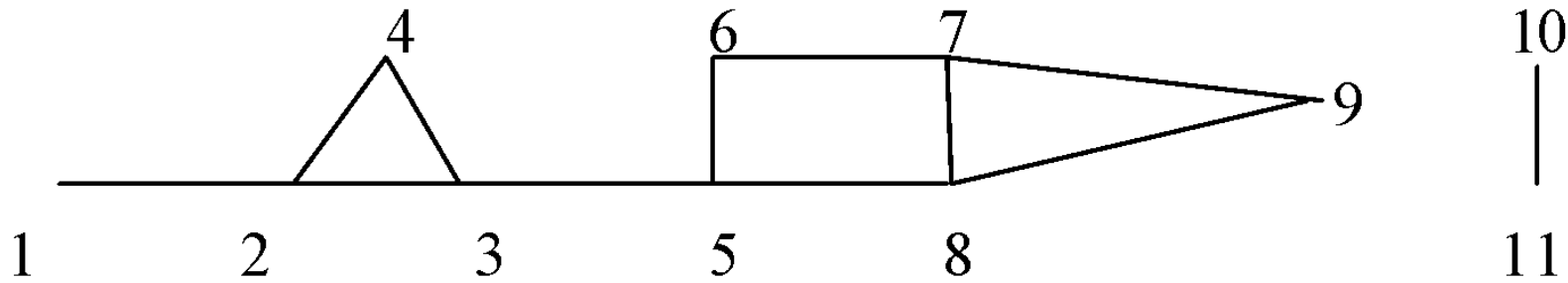
Определение 2

Определение 3

u и v мы будем называть длину
Расстоянием между вершинами
кратчайшего соединяющего их маршрута. Обозначают: $d(u, v)$.

Расстояние между двумя вершинами, которые нельзя соединить
никаким маршрутом, считаем равным бесконечности (∞).

Пример



Из вершины 1

в вершину 8, существует несколько маршрутов,

например: маршрут 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, его длина равна 4

маршрут 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 8, 5, 8, 10.

длиной

$$4: d(2, 8)=3.$$

Длина кратчайшего маршрута, соединяющего вершины 1 и 8, равна

Утверждение 4

Введенное таким образом расстояние удовлетворяет следующим трем аксиомам метрики.

- 1) Для любой вершины u $d(u, u) = 0$.
- 2) Для любых вершин u, v $d(u, v) = d(v, u)$.
- 3) Для любых вершин u, v, w $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

Определение 5

Пусть дана вершина u . Расстояние до наиболее удаленной от u вершины графа называется эксцентриситетом вершины u . Обозначают:
 $e(u) = \max_{x \in V} d(u, x)$.

Определение 6 G называется наименьший из эксцентриситетов всех
 Радиусом графа $r(G)$.
 его вершин. Обозначают:

$$r(G) = \min_{u \in V} e(u).$$

Определение 7

Наибольший из эксцентриситетов всех вершин графа G
 его диаметром. Обозначают: $d(G)$. называется

$$d(G) = \max_{u \in V} e(u).$$

Определение 8

Множество вершин графа G с наименьшими эксцентриситетами
 называют центром графа $Z(G)$,
 называют центральными. и обозначают а сами вершины

Определение

Вершины с наибольшим эксцентриситетом называются диаметральными или периферийными.

Теорема 10

$$r(G) \leq d(G) \leq 2r(G).$$

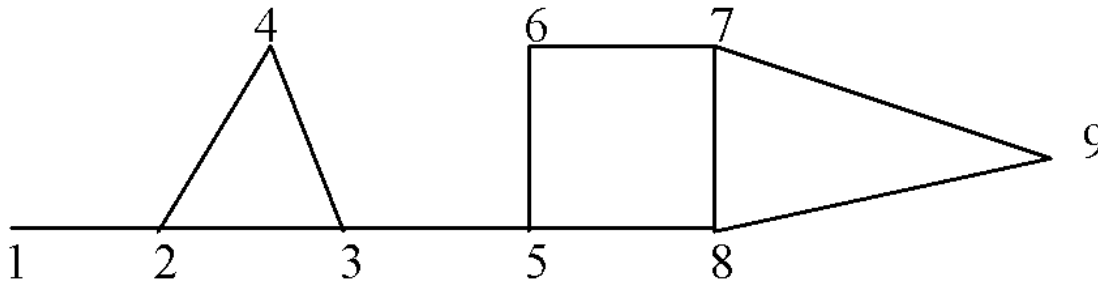
Следствие 11

Если G - связный граф, то

$$1 \leq \frac{d(G)}{r(G)} \leq 2.$$

Замечание $r(G), d(G), Z(G)$ называют метрическими характеристиками графа G .

Пример



$$e(1) = 5, e(2) = 4, e(3) = 3, e(4) = 4, e(5) = 3, e(6) = 4,$$

$$e(7) = 5, e(8) = 4, e(9) = 5$$

$$r(G) = 3; \quad d(G) = 5; \quad Z(G) = \{3, 5\};$$

1, 7, 9 -

Задача Доказать, что для любого рационального числа из интервала $[1; 2]$ существует граф с отношением диаметра к радиусу, равным этому числу.

