

Минимизация логических функций

Вычислительная техника

		$X_3 X_4$			
		00	01	11	10
$X_1 X_2$	00				1
	01		1	1	
	10				
	11				1

		X_5							
		0		1					
		$X_3 X_4$							
		00	01	11	10	00	01	11	10
$X_1 X_2$	00								
	01								
	10			1				1	
	11								

Минимизация

- упрощение формы записи
- схема реализуется с наименьшим числом элементов

Минимальная нормальная форма

Нормальная форма логической функции, содержащая наименьшее число элементов

Минимальная ДНФ = **МДНФ**

Минимальная КНФ = **МКНФ**

Логическая функция может иметь **несколько** МДНФ или МКНФ одинаковой сложности

Методы минимизации



```
graph TD; A[Методы минимизации] --> B[Непосредственных преобразований]; A --> C[Квайна и Мак-Класки]; A --> D[Карно-Вейча];
```

The diagram is a flowchart with a central vertical arrow pointing downwards. At the top is a rounded rectangle containing the text 'Методы минимизации'. From the bottom of this rectangle, three arrows point downwards: a small arrow to the left, a large central arrow, and a small arrow to the right. The left arrow points to a rounded rectangle containing 'Непосредственных преобразований'. The right arrow points to a rounded rectangle containing 'Квайна и Мак-Класки'. The large central arrow points to a rounded rectangle at the bottom containing 'Карно-Вейча'.

Непосредствен
ных
преобразований

Квайна и
Мак-Класки

Карно-Вейча

Минимизация логических функций



МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННЫ Х ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Метод непосредственных преобразований

Применение законов алгебры логики

Результат – **тупиковая** форма
логической функции

Тупиковая форма

Логическое выражение, к слагаемым которого больше не могут быть применены операции склеивания

Для одной функции может существовать несколько тупиковых форм

Минимальная форма – тупиковая форма логической функции минимальной длины

Функции ***a*** и ***b*** называются **равносильными**, если при одинаковых входных данных они принимают одинаковые значения

$$***a*** \equiv ***b***$$



ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

I. Идемпогентность

$$a \& a \equiv a$$

$$a \vee a \equiv a$$

2. Коммутативность

$$a \& b \equiv b \& a$$

$$a \vee b \equiv b \vee a$$

3. Ассоциативность

$$a \& (b \& c) \equiv (a \& b) \& c$$

$$a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$$

4. Дистрибутивность

$$a \& (b \vee c) \equiv (a \& b) \vee (a \& c)$$

$$a \vee (b \& c) \equiv (a \vee b) \& (a \vee c)$$

5. Закон двойного отрицания

$$\neg(\neg a) \equiv a$$

6. Законы поглощения

$$a \& (a \vee b) \equiv a$$

$$a \vee (a \& b) \equiv a$$

7. Законы де Моргана

$$\neg(a \vee b) \equiv \neg a \ \& \ \neg b$$

$$\neg(a \ \& \ b) \equiv \neg a \ \vee \ \neg b$$

8. Закон исключённого третьего

$$\neg a \vee a \equiv 1$$

9. Закон противоречия

$$\neg a \ \& \ a \equiv 0$$

10. Свойства тавтологии и противоречия

$$1 \ \& \ a \equiv a$$

$$1 \ \vee \ a \equiv 1$$

$$0 \ \& \ a \equiv 0$$

$$0 \ \vee \ a \equiv a$$

$$\neg 0 \equiv 1$$

$$\neg 1 \equiv 0$$

II. Законы склеивания

$$(a \& b) \vee (a \& \neg b) \equiv a$$

$$(a \vee b) \& (a \vee \neg b) \equiv a$$

12. Законы поглощения

$$a \& (a \vee b) \equiv a$$

$$a \vee (a \& b) \equiv a$$

Пример

Минимизировать СДНФ

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee$$

$$\vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee$$

$$\vee (A \cdot B \cdot C)$$

Пример

$$\begin{aligned} & (\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \\ & \quad \quad \quad \vee \\ & \quad \quad \quad \vee (A \cdot B \cdot C) \equiv \end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned} & (\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \\ & \quad \quad \quad \vee \\ & \quad \quad \quad \vee (A \cdot B \cdot C) \equiv \end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned} & (\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \\ & \quad \quad \quad \vee \\ & \quad \quad \quad \vee (A \cdot B \cdot C) \equiv \end{aligned}$$

Пример

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C)$$

\vee

$$\vee (A \cdot B \cdot C) \equiv$$

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C)$$

\vee

$$\vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot B \cdot C)$$

Пример

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C)$$

$$\vee$$

$$\vee (A \cdot B \cdot C) \equiv$$


$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C)$$

$$\vee$$


$$\vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot B \cdot C)$$

$$\equiv (\neg B \cdot C) \vee (A \cdot C) \equiv$$

$$\equiv (A \vee \neg B) \cdot C$$



A	B	C	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	



A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Проблема

Определить, какие элементарные
конъюнкции / дизъюнкции надо
склеивать

Минимизация логических функций



КАРТЫ ВЕЙЧА-КАРНО

Эдвард Вестбрук Вейч



1924 — 2013

Американский
физик

1952
«Метод диаграмм
для минимизации
логических
функций»

Морис Карно



Американский физик

1953

Усовершенствовал
метод Вейча

род. 1924

Карта Карно

Графическое представление
таблицы истинности
логических функций

Таблица, содержащая по 2^n
прямоугольных ячеек,
где n — число логических
переменных

Код Грея

- система счисления, в которой два соседних значения различаются только в одном разряде

Пример

x_1	x_2	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

		x_2	
		0	1
x_1	0	1	0
	1	1	1

Пример


A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Пример

	В	0	0	1	1
	С	0	1	1	0
А	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

Пример

	BC	00	01	11	10
A	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0



A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Пример

		0	0	1	1	A
		0	1	1	0	B
0	0	0	0	1	0	
0	1	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	
C	D					

Пример

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0	0	1	0
	01	1	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	0	1	0	0

Пример

E		0				1			
		00	01	11	10	10	11	01	00
AB		00	01	11	10	10	11	01	00
CD	00	0	0	1	0	0	1	0	1
	01	1	0	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	1
	10	0	1	0	0	1	0	0	0

Правила

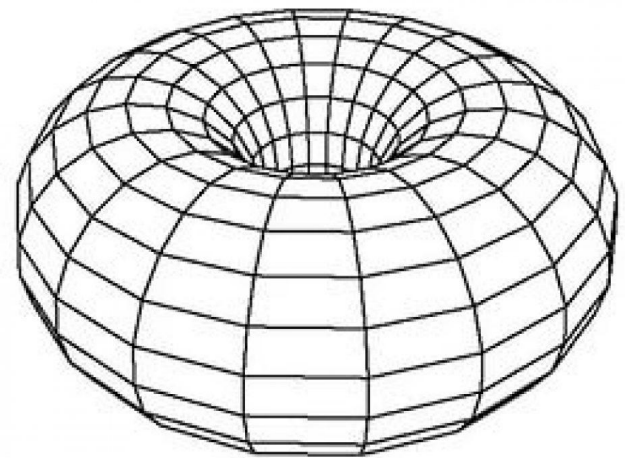
ДНФ КНФ

1. Объединяем смежные клетки с **единицами** (**нулями**) в максимально возможные области, содержащие 2^n клеток
2. В области **НЕ** должно находиться клеток, содержащих **нули** (**единицы**)
3. Области могут пересекаться
4. Возможно несколько вариантов покрытия

Правила

5. Крайние строки и столбцы являются соседними между собой

X_2X_3		00	01	11	10
X_1	1	1	0	0	1
	0	1	0	0	1



Правила

6. Несмежные области, расположенные симметрично оси(ей), могут объединяться в одну

E		0				1			
		00	01	11	10	10	11	01	00
CD	00	0	1	1	0	0	1	1	1
	01	1	0	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	1
	10	0	1	0	0	1	0	0	0

Правила

7. Для каждой области записываем **конъюнкцию (дизъюнкцию)** переменных, не изменяющих своё значение

Если неизменная переменная равна **нулю (единице)** – инвертируем

8. **Конъюнкции (дизъюнкции)** областей объединяем **дизъюнкцией (конъюнкцией)**.

Пример

X_1	X_2	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

		X_2	
		0	1
X_1	0	1	0
	1	1	1

$$F = \neg X_2 \vee X_1$$

Пример – МДНФ

X_1	X_2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

		X_2	
		0	1
X_1	0	0	1
	1	1	0

$$F = X_1 \cdot \neg X_2 \vee \neg X_1 \cdot X_2$$

Пример – МКНФ

X_1	X_2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

		X_2	
		0	1
X_1	0	0	1
	1	1	0

$$F = (\overline{X_1} \vee X_2) \cdot (\overline{\neg X_1} \vee \neg X_2)$$

Пример

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Формула

$$\begin{aligned} & (\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ & \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee \\ & \vee (A \cdot B \cdot C) \end{aligned}$$

Совершенная дизъюнктивная
нормальная форма (**СДНФ**)

- $(A \vee B \vee C) \cdot$
- $\cdot (A \vee \neg B \vee C) \cdot$
- $\cdot (A \vee \neg B \vee \neg C) \cdot$
- $\cdot (\neg A \vee B \vee C) \cdot$
- $\cdot (\neg A \vee \neg B \vee C)$

Совершенная конъюнктивная
нормальная форма (**СКНФ**)

Пример

	В	0	0	1	1
	С	0	1	1	0
А	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

The table contains two overlapping highlighted regions: a red rounded rectangle enclosing the cells (row 3, column 3), (row 3, column 4), (row 4, column 3), and (row 4, column 4); and a green rounded rectangle enclosing the cells (row 4, column 3), (row 4, column 4), (row 4, column 5), and (row 4, column 6).

Пример

	В	0	0	1	1
	С	0	1	1	0
А	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

$$F = \neg B \cdot C \vee A \cdot C$$


МДНФ

Пример

	В	0	0	1	1
	С	0	1	1	0
А	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

$$F = C \cdot (A \vee \neg B)$$

МКНФ



A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Недостатки

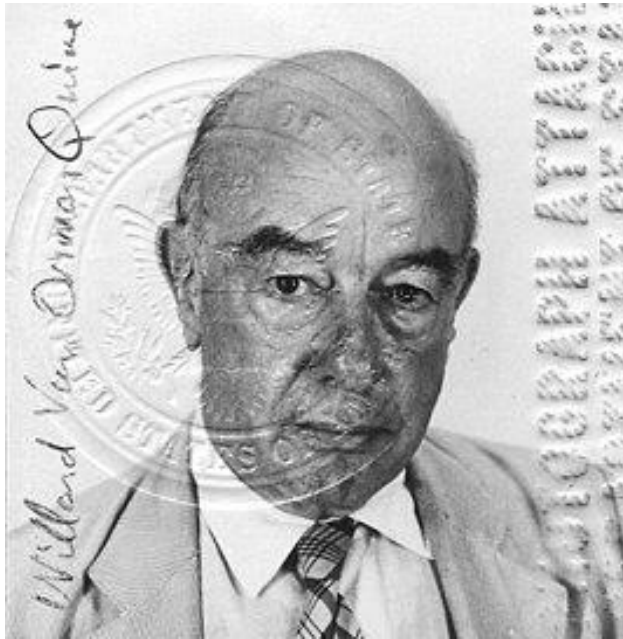
- Применим для функций до **7** переменных
- Выбор областей – визуально
- Нет алгоритма, обеспечивающего оптимальное решение

Минимизация логических функций



МЕТОД КВАЙНА И МАК-КЛАСКИ

Виллард ван Орман Куайн



1908 — 2000

Американский
философ, логик и
математик

1993

премия Рольфа
Шока в области
ЛОГИКИ И
ФИЛОСОФИИ

Эдвард Дж. Мак-Класки



1908 — 2000

Почётный профессор
Стэнфордского
университета.

Пионер в области
электротехники

Первый алгоритм
проектирования
комбинационных
схем

Метод Квайна и Мак-Класки

- целесообразно, когда число входных переменных превышает **6 – 7**