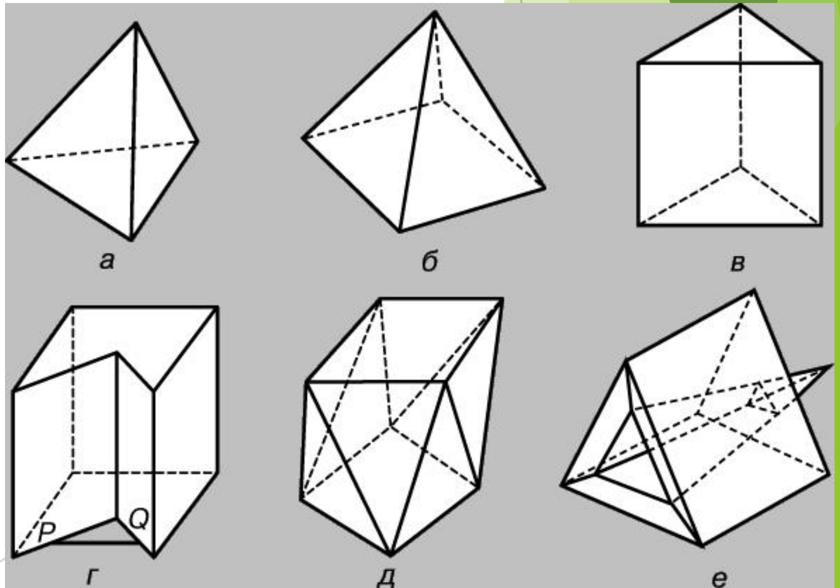
Многогранники. Усечённая пирамида, её элементы. Площадь и объём.

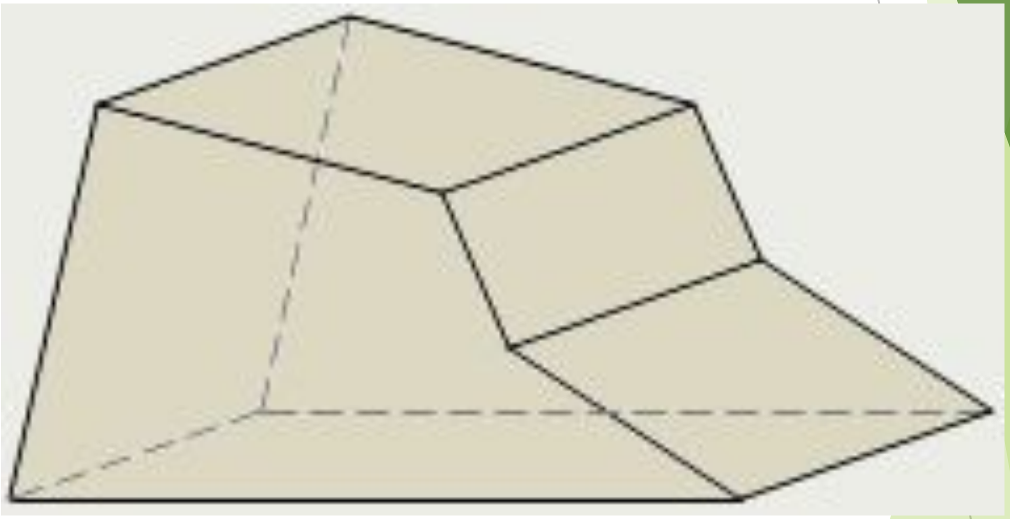
Многогранник - часть пространства, ограниченная совокупностью конечного числа плоских многоугольников соединенных таким образом, что каждая сторона любого многоугольника является стороной ровно одного другого многоугольника (называемого смежным), причем вокруг каждой вершины существует ровно один цикл многоугольников.



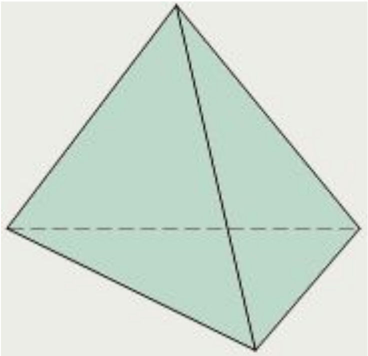
Основные понятия

Некоторые пространственные фигуры, изучаемые в стереометрии, называют телами или геометрическими телами. Наглядно тело надо представлять себе как часть пространства, занятую физическим телом и ограниченную поверхностью.

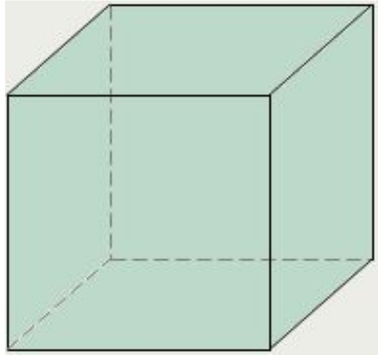
Многогранником называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.



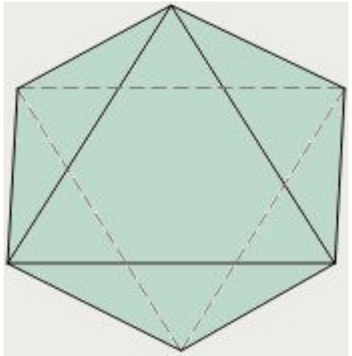
Правильные многогранники



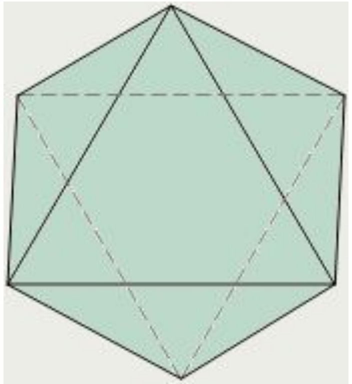
Тетраэдр



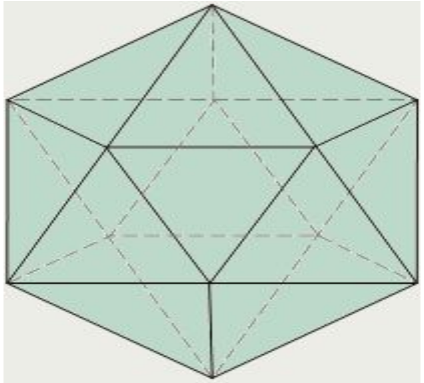
Куб



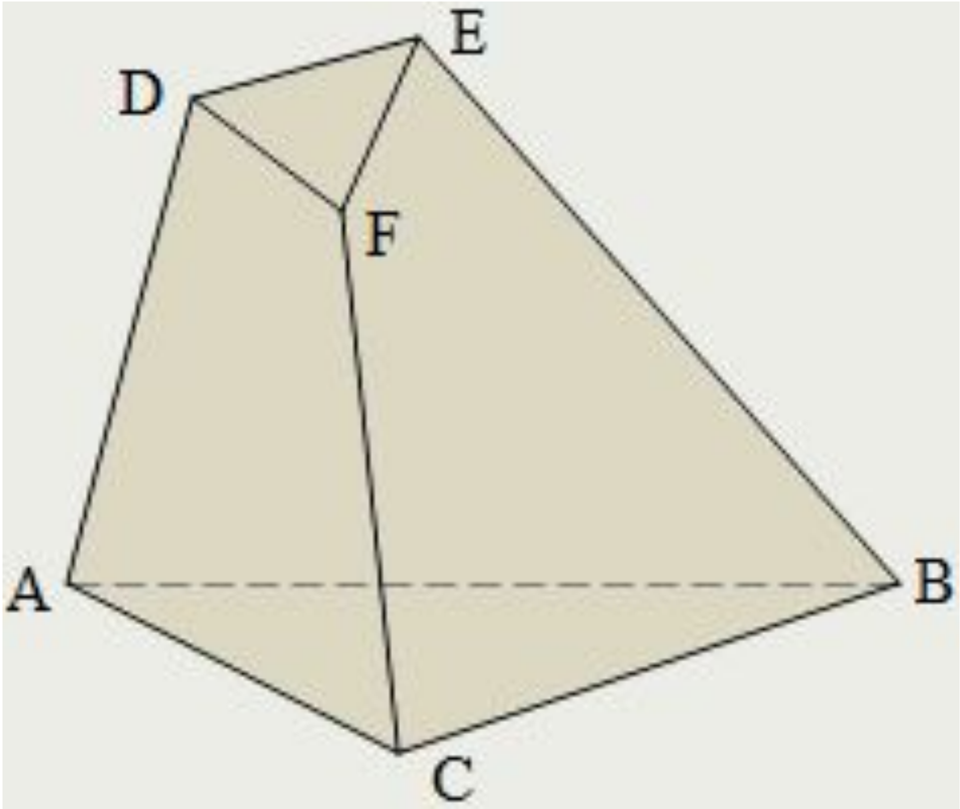
Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр



Выпуклым называется многогранник, если он расположен по одну сторону плоскости, проведённой через любой многоугольник, образующий поверхность данного многогранника.

Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его гранями; стороны многоугольников – рёбрами; вершины – вершинами многогранника: ABC, DEF, ABED, BCFE, ACFD – грани;

AB, BC, AC, DE, EF, DF, AD, BE, CF – рёбра;

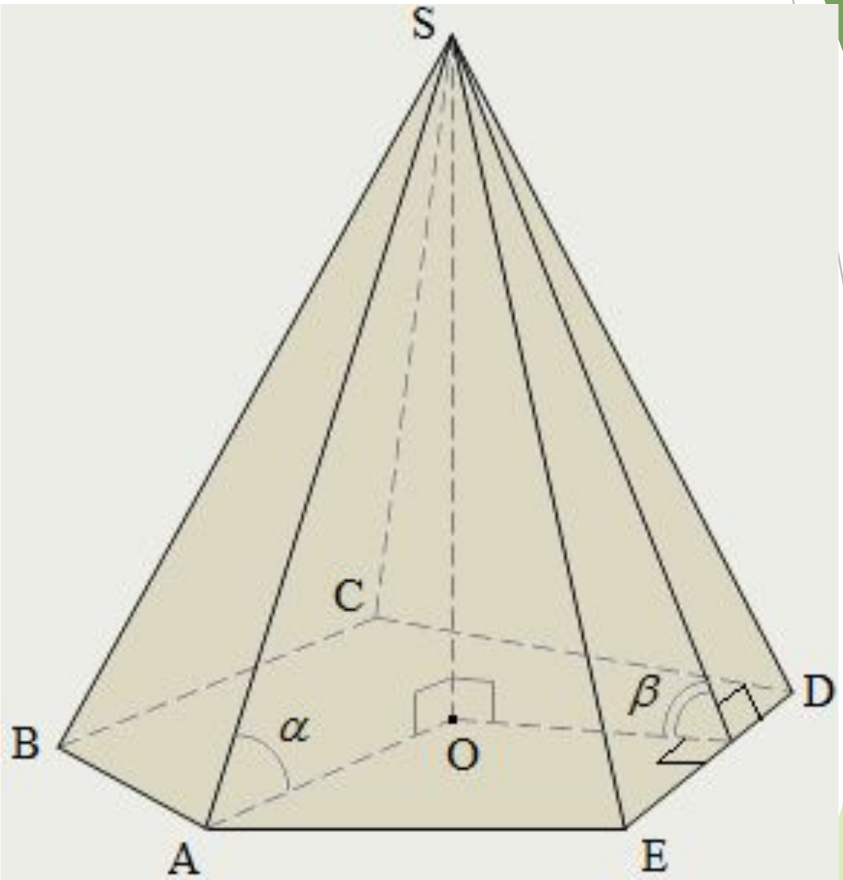
A, B, C, D, E, F – вершины многогранника ABCDEF.

Теорема Эйлера для многогранников:

Если V — число вершин выпуклого многогранника, R — число его ребер и G — число граней, то верно равенство:

$$V - R + G = 2.$$

Пирамидой (например, SABCDE) называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (пятиугольник ABCDE) – основания пирамиды, точки (S), не лежащей в плоскости основания,- вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.



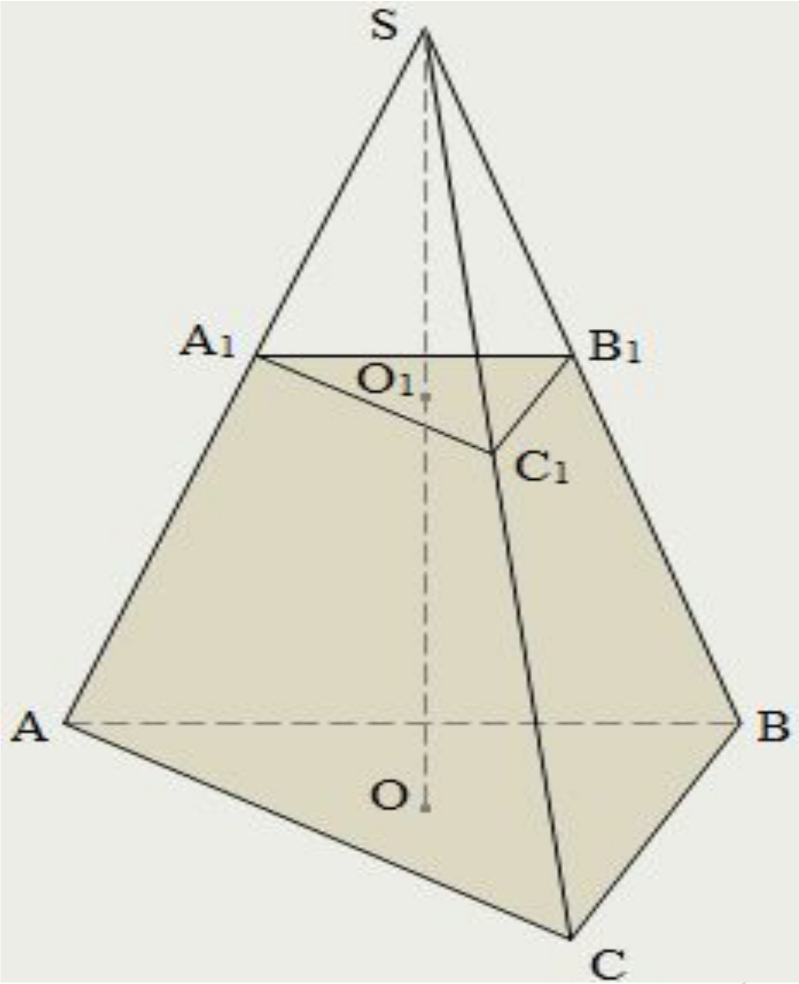
Плоскость, которая пересекает пирамиду и параллельна её основанию, делит её на две части:

- пирамиду, подобную данной ($SA_1B_1C_1$) и
- многогранник, называемый усеченной пирамидой ($ABCA_1B_1C_1$).

Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях (ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$), называются основаниями, остальные грани (AA_1B_1B, AA_1C_1C, BB_1C_1C) называются боковыми гранями.

Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные многоугольники, боковые грани – трапеции.

Высота усеченной пирамиды (OO_1) – это расстояние между плоскостями её оснований.



Свойства усечённой пирамиды

1. Каждая боковая грань правильной усеченной пирамиды является равнобокими трапециями одной величины.

2. Основания усеченной пирамиды являются подобными многоугольниками.

3. Боковые ребра правильной усеченной пирамиды имеют равную величину и один наклонен по отношению к основанию пирамиды.

4. Боковые грани усеченной пирамиды являются трапециями.

5. Двугранные углы при боковых ребрах правильной усеченной пирамиды имеют равную величину.

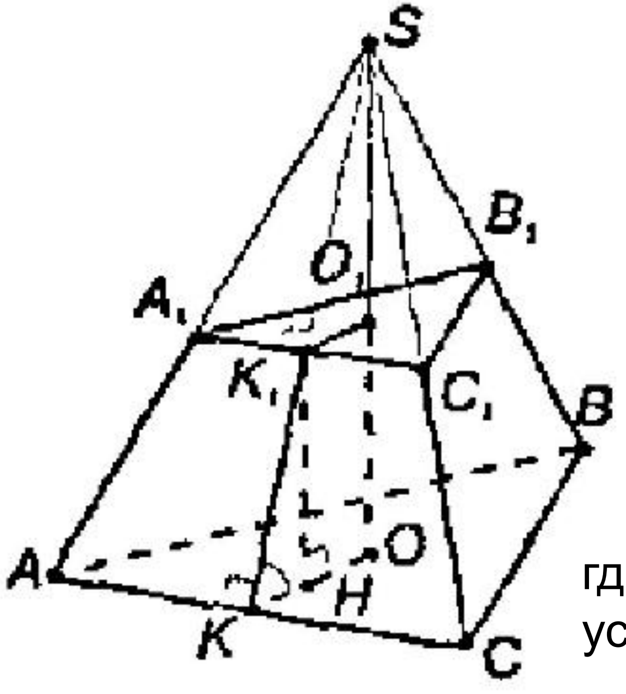
6. Отношение площадей оснований: $S_2/S_1 = k_2$.

Площадь боковой поверхности $S_b = \sum_{i=1}^{n} S_i$ *равна сумме площадей боковых граней усечённой пирамиды.*

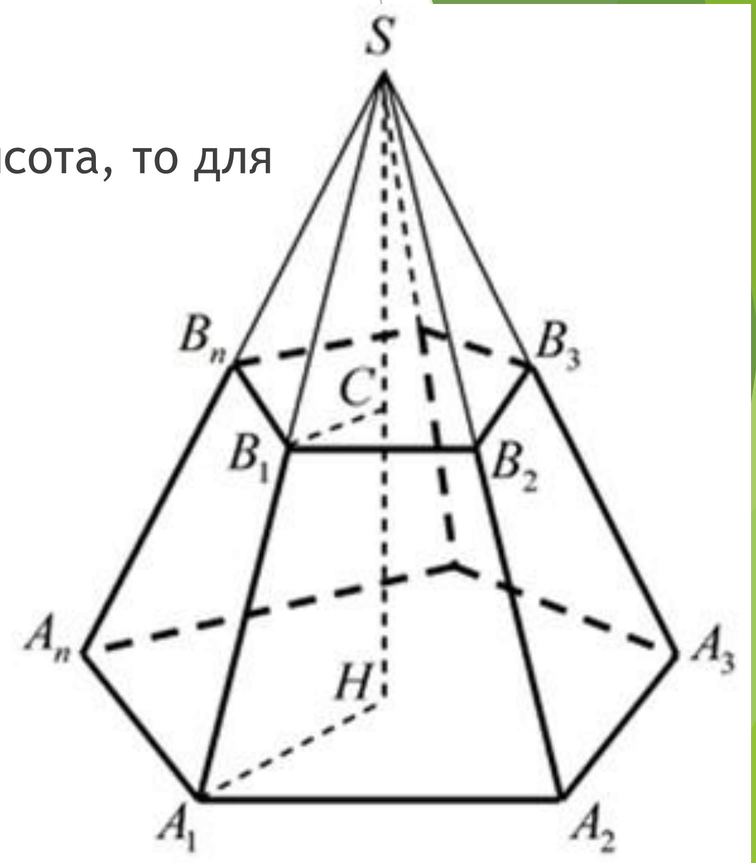
Объём усечённой пирамиды

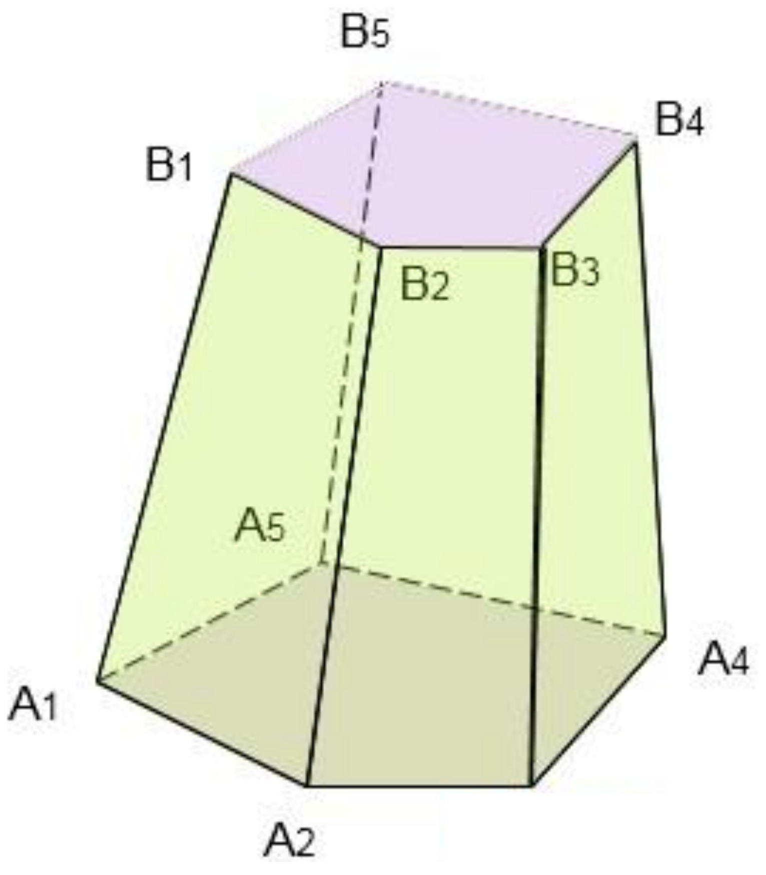
Если S_1 и S_2 – площади оснований усечённой пирамиды и h – её высота, то для объёма усеченной пирамиды верно:

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$



где S_1, S_2 — площади оснований, h — высота усечённой пирамиды.





Основания усеченной пирамиды

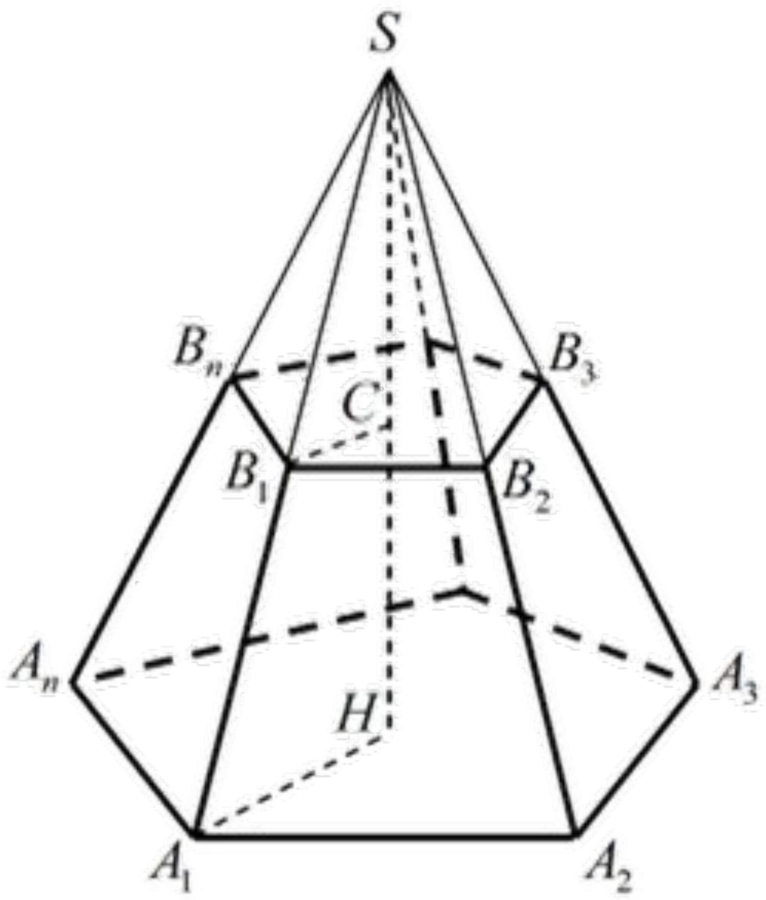
A1A2A3A4A5,   B1B2B3B4B5

Боковые грани усеченной пирамиды

A1B1B2A2, A2B2B3A3, A3B3B4A4 и тд.

Ребра усеченной пирамиды

A1A2, A2A3, A3A4, A4A5, A5A1,
A1B1, A2B2, A3B3, A4B4,A5B5 и тд.



CH является высотой усеченной пирамиды, P_1 и P_2 — периметрами оснований, S_1 и S_2 — площадями оснований, $S_{бок}$ — площадью боковой поверхности, $S_{полн}$ — площадью полной поверхности:

$$S_{полн} = S_1 + S_2 + S_{бок}$$

Пирамида (например, SABCD) называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник (ABCD – квадрат), а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (O – центр описанной и вписанной окружностей основания).

Осью *правильной* ***пирамиды*** *называется прямая, содержащая ее высоту.*

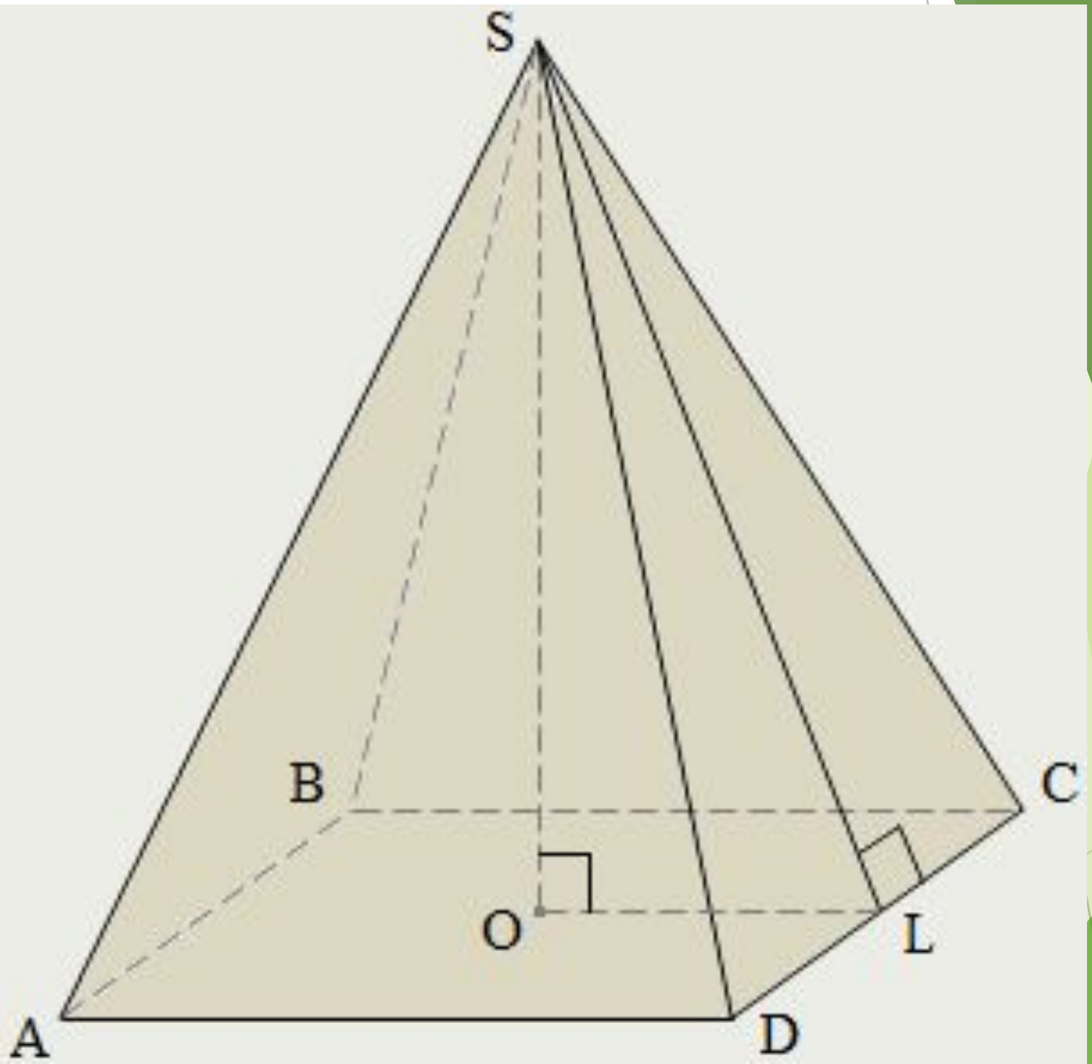
Боковые ребра правильной пирамиды равны.

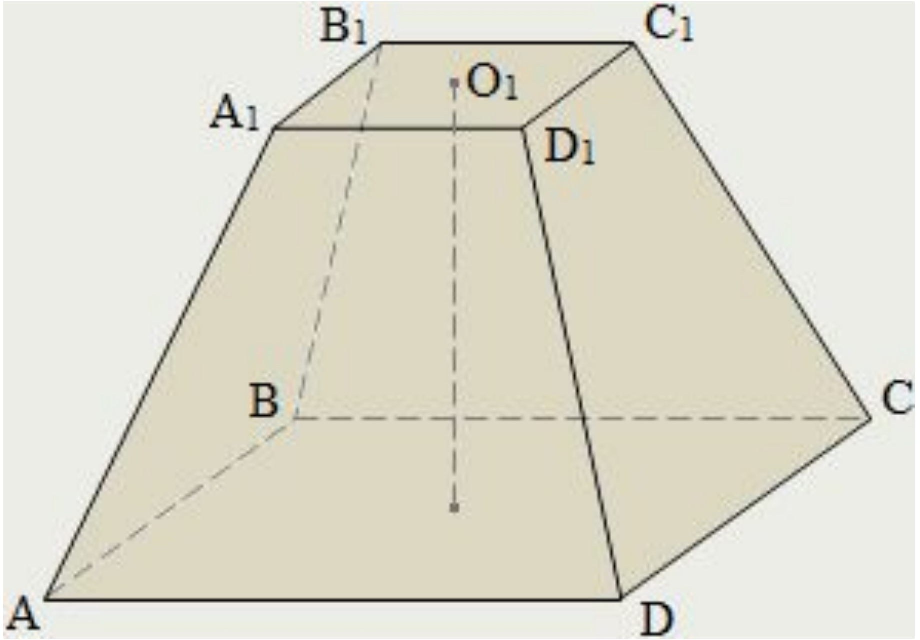
Боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани правильной пирамиды (SL), проведенная из ее вершины к стороне основания, называется апофемой.

Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему:

$S_б = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot SL$.





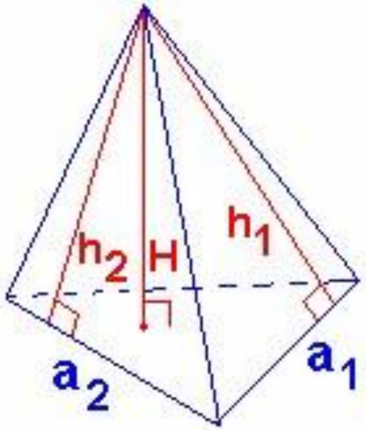
Усеченная пирамида (например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$), которая получается из правильной пирамиды, также называется правильной.

Боковые грани правильной усеченной пирамиды (AA_1B_1B, AA_1C_1C, DD_1C_1C, AA_1D_1D) – равные равнобокие трапеции; их высоты называются апофемами.

ПИРАМИДА

правильная

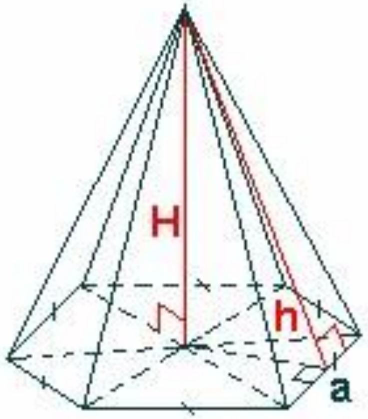
усеченая



$$S_{пов.} = S_{бок.} + S_{осн.}$$

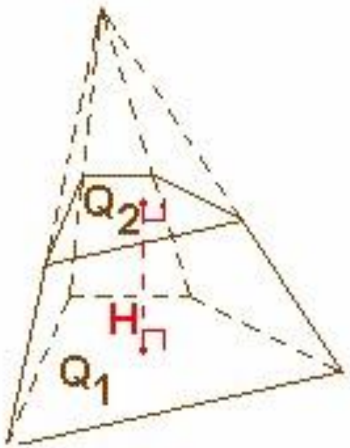
$$S_{бок.} = \frac{1}{2}(h_1 \cdot a_1 + \ldots + h_n \cdot a_n)$$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$$



$$S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$$



$$V = \frac{1}{3} H \left(Q_1 + \sqrt{Q_1 \cdot Q_2} + Q_2\right)$$

Свойства правильных пирамид:

Боковые ребра правильной пирамиды - равны.
Боковые грани правильной пирамиды - равные друг другу равнобедренные треугольники.

Правильная усеченная пирамида *— многогранник, который образован правильной пирамидой и ее сечением, которое параллельно основанию.*

$$S_b = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)l$$

где S_b *– боковая поверхность, l-апофема*

Правильная усеченная пирамида также как и обычная правильная пирамида имеет особенности

- В правильной усеченной *n*-угольной пирамиде все боковые ребра равны между собой.
- Все боковые грани правильной усеченной *n*-угольной пирамиды суть равные равнобедренные трапеции (углы при основаниях равнобедренной трапеции равны), поэтому:
  - в правильной усеченной *n*-угольной пирамиде все плоские углы при основаниях равны.
  - в правильной усеченной *n*-угольной пирамиде все двугранные углы при основаниях равны.
  - в правильной усеченной *n*-угольной пирамиде все двугранные углы при боковых ребрах равны.

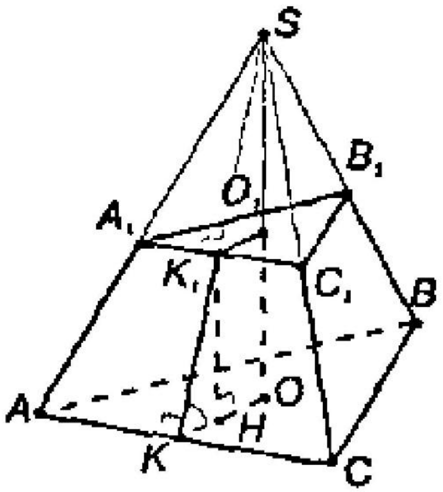
Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна ½ произведения суммы периметров ее оснований и апофемы.

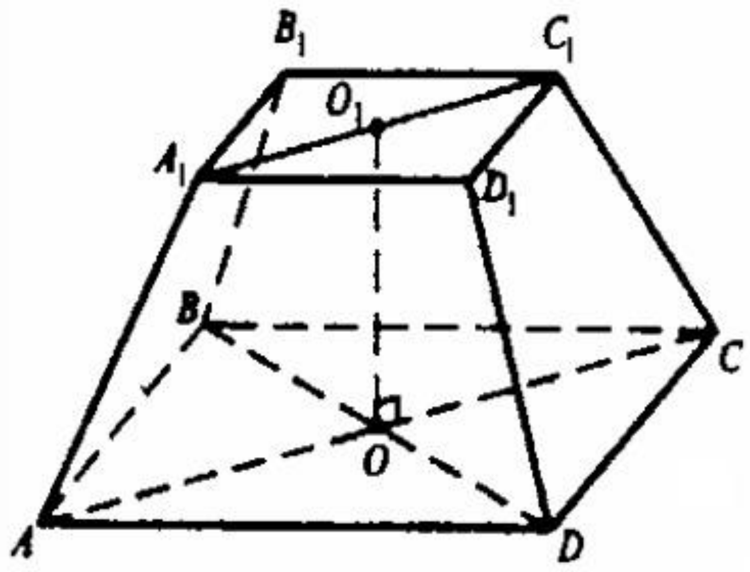
$$S_b = \frac{|S_1 - S_2|}{\cos\varphi}$$

где S_1, S_2 — площади оснований,
φ — двугранный угол у основания пирамиды.

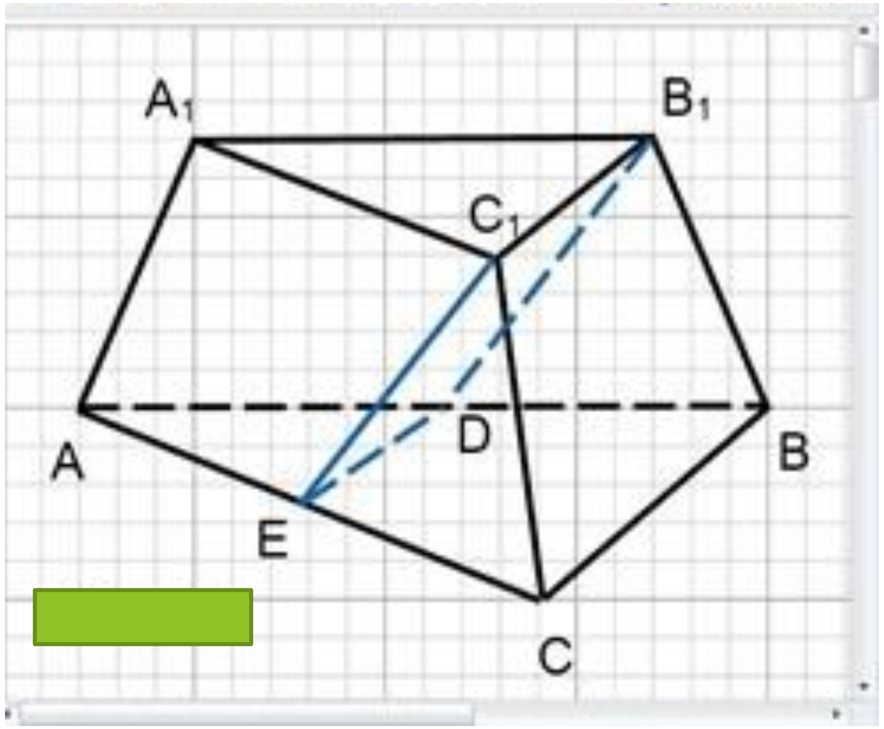
Задачи

1) Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны 4 дм и 2 дм, а боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту и апофему пирамиды.
2) * Основаниями усечённой пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 5 см и 3 см. Одно из боковых рёбер перпендикулярно к плоскости основания и равно 1 см. Найдите площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

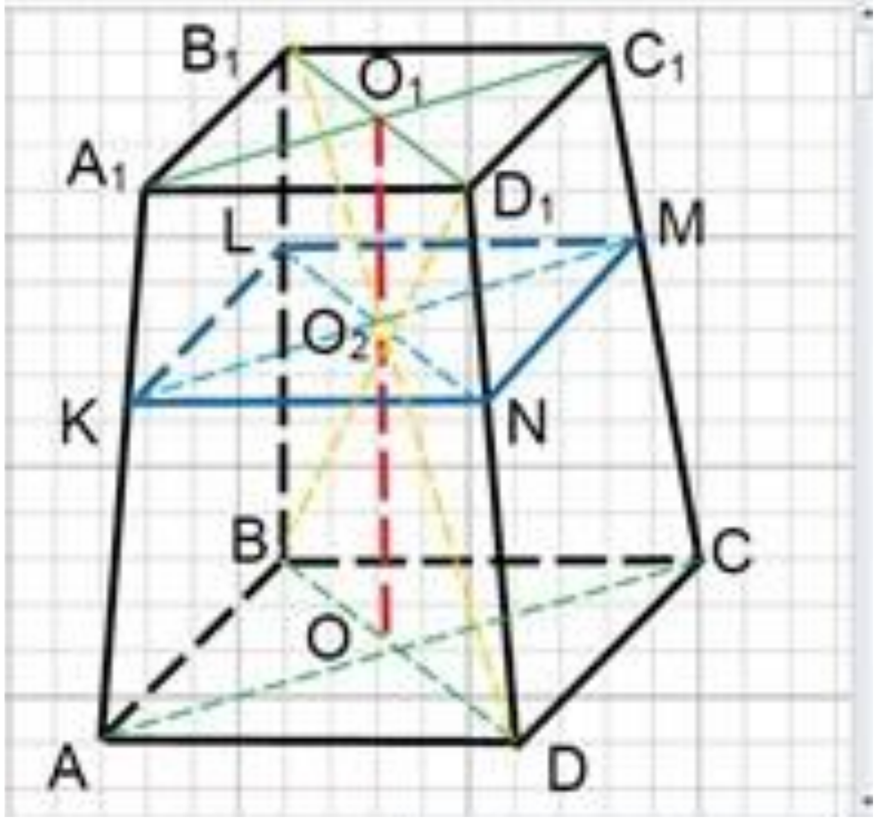




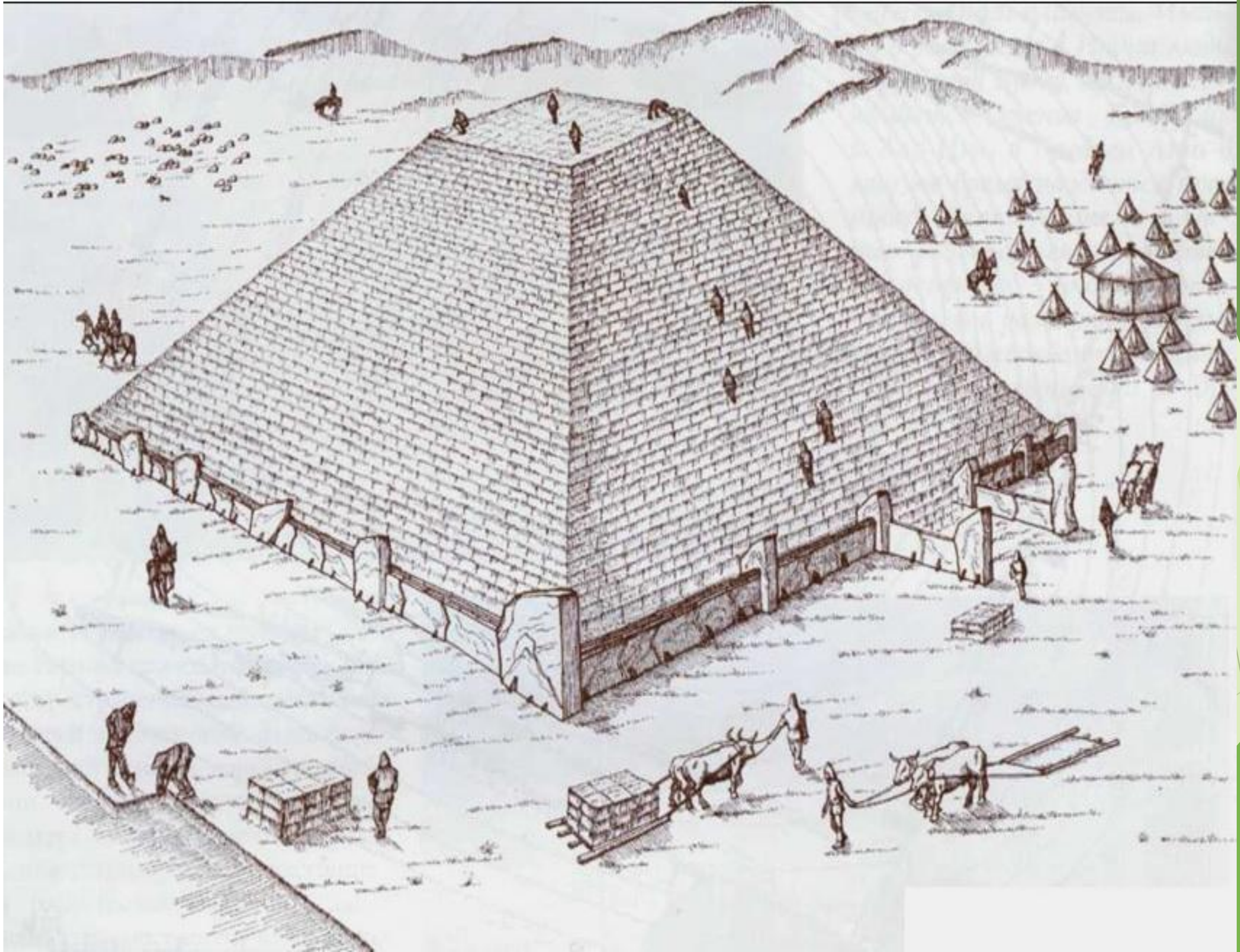
- В треугольной усеченной пирамиде через сторону верхнего основания проведена плоскость параллельно противоположному боковому ребру. В каком отношении разделился объем усеченной пирамиды, если соответственные стороны оснований относятся как 1 : 2?



- Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 и 1, а высота равна 3. Через точку пересечения диагоналей пирамиды параллельно основаниям пирамиды проведена плоскость, делящая пирамиду на две части. Найти объем каждой из них.



Усечённая пирамида встречается и в жизни



Многогранники в архитектуре

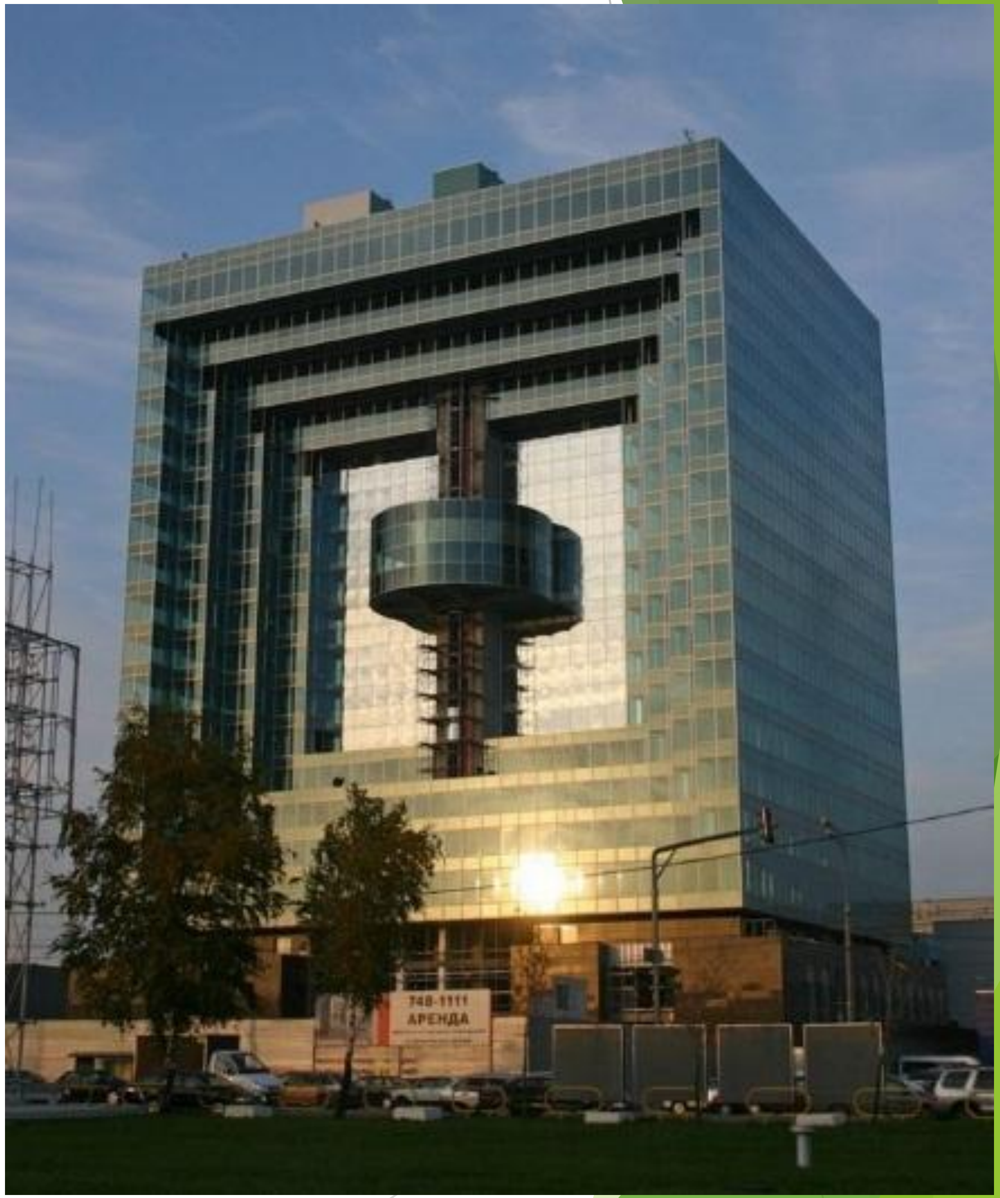
Робокубоэктаэдр

Международный экономический комитет

Ботанический сад «Эдем»

Современный вход в Лувр

Дворец счастья в Ашхабаде



Бизнес-центр в Москве

Парк развлечений в Париже

Спасибо за внимание