

*Из истории геометрии*  
*Многогранники*

*Масленникова*  
*Дарья*



# Содержание

Общий исторический обзор

О развитии геометрии в

Древней

Греции до Евклида

Многогранники

Площадь поверхности призмы

Призма и пирамида

Измерение объемов

О пирамиде и её объеме

О призме и параллелепипеде

Параллелепипед



# Общий исторический

## обзор

**Разные формы материальных тел наблюдал человек в природе: формы растений и животных, гор и извилин рек, круга и серпа**

**Луны и т. п.**



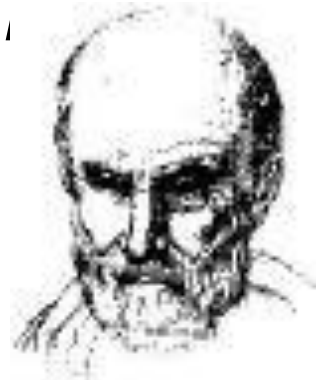
**Начало геометрии было положено в древности при решении чисто практических задач. Со временем, когда накопилось большое количество геометрических фактов, у людей появилась потребность обобщения, уяснения зависимости одних элементов от других, установления логических связей и доказательств. Постепенно создавалась геометрическая наука.**



**Геометрические знания примерно в объеме современного курса средней школы были изложены еще 2200 лет назад в “Началах” Евклида. Конечно, изложенная в “Началах” наука геометрия не могла быть создана одним ученым. Известно, что Евклид в своей работе опирался на труды десятков предшественников, среди которых были Фалес**



Пифагор



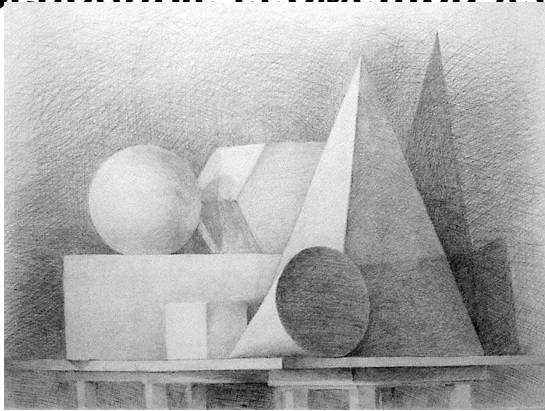
Гиппократ



Демокрит



**Ценой больших усилий, исходя из отдельных геометрических сведений, накопленных тысячелетиями в практической деятельности людей, эти великие ученые сумели на протяжении 3 - 4 столетий привести геометрическую науку к высокой ступени совершенства. Историческая заслуга Евклида состоит в том, что он, создавая свои "Начала", объединил результаты своих предшественников, упорядочил и привел в одну систему основные геометрические знания.**



Евдокс



**Многие учебники элементарной геометрии во всем мире представляли (а многие и поныне представляют) собой лишь переработку книги Евклида. “Начала” на протяжении веков были настольной книгой величайших ученых. В XVII в. Декарт благодаря методу координат сделал возможным изучение свойств геометрических фигур с помощью алгебры. С этого времени начала развиваться аналитическая геометрия.**

**Коренной перелом в геометрии впервые произвел в первой половине XIX в. великий русский математик Николай Иванович Лобачевский, который создал новую, неевклидову геометрию, называемую ныне геометрией Лобачевского.**



**Открытие Лобачевского было началом нового периода в развитии геометрии. За ним последовали новые открытия немецкого математика Б. Римана и др. В настоящее время геометрия тесно переплетается со многими другими разделами математики. Одним из источников развития и образования новых понятий в геометрии, как и в других областях математики, являются современные задачи естествознания, физики и техники.**



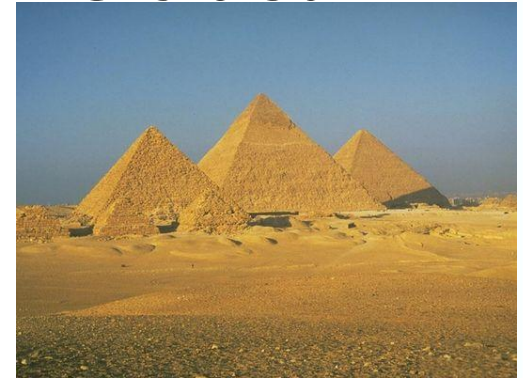
**Лобачевский**



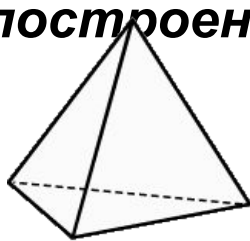


# **О развитии геометрии в Древней Греции до Евклида**

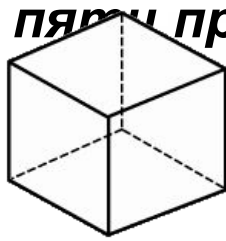
**Ученые и философы Древней Греции восприняли и переработали достижения культуры и науки Древнего Востока. Фалес, Пифагор, Демокрит, Евдокс и др. ездили в Египет и Вавилон для изучения музыки, математики и астрономии. Не случайно зачатки греческой геометрической науки связаны с именем Фалеса Милетского, основателя ионийской школы. Ионийцы, населявшие территорию, которая граничила с восточными странами, первыми заимствовали знания Востока и стали их развивать.**



**Фалесу, главе этой школы, Прокл и другие историки приписывают немало геометрических открытий. Об отношении Пифагора Самосского к геометрии Прокл пишет в своем комментарии к "Началам" Евклида следующее: "Он изучал эту науку (т. е. геометрию), исходя от первых ее оснований, и старался получать теоремы при помощи чисто логического мышления". Прокл приписывает Пифагору, кроме известной теоремы о квадрате гипотенузы, еще построение пяти правильных многогранников:**



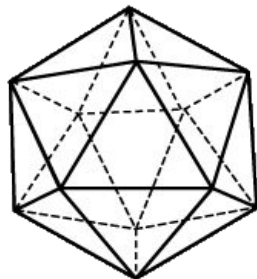
Тетраэдр



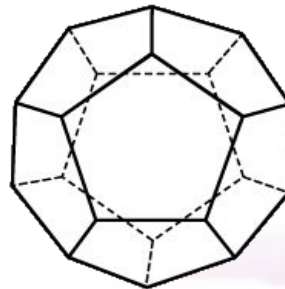
Куб



Октаэдр



Икосаэдр



Додекаэдр

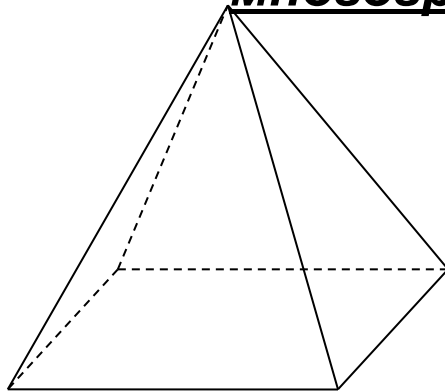


**Грани додекаэдра являются правильными пятиугольниками. Диагонали же правильного пятиугольника образуют так называемый звездчатый пятиугольник - фигуру, которая служила эмблемой, опознавательным знаком для учеников Пифагора. Известно, что пифагорейский союз был одновременно философской школой, политической партией и религиозным братством. Согласно легенде, один пифагореец заболел на чужбине и не мог перед смертью расплатиться с ухаживавшим за ним хозяином дома. Последний нарисовал на стене своего дома звездчатый пятиугольник. Увидав через несколько лет этот знак, другой странствующий пифагореец осведомился о случившемся у хозяина и щедро его вознаградил.**



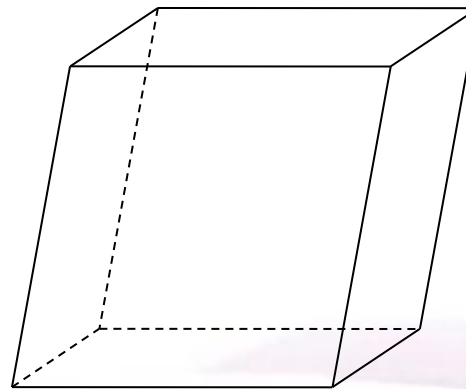
# **Многогранники**

**Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, называется многогранником. (представители)**



**Четырехугольн  
ая  
пирамида**

**параллелограмм**

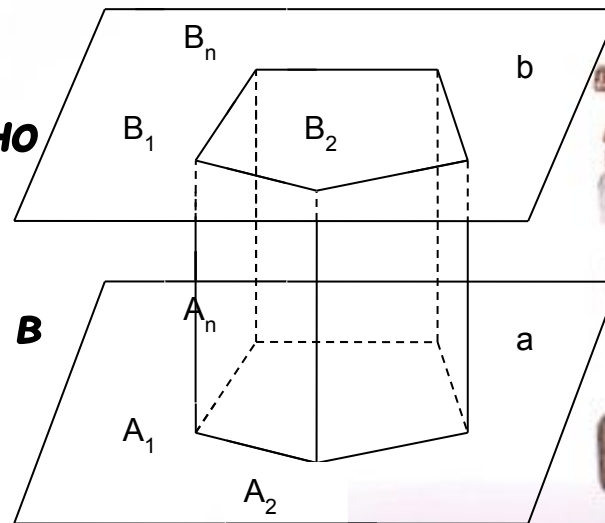


# Призма

Рассмотрим два равных многоугольника  $A_1A_2\dots A_n$  и  $B_1B_2\dots B_n$ , расположенных в параллельных плоскостях  $a$  и  $b$  так, что отрезки  $A_1B_1, A_1B_2, \dots, A_nB_n$ , соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны. Каждый из  $n$  четырехугольников

$$A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$$

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырехугольнике  $A_1A_2B_2B_1$  стороны



$A_1B_1$  и  $A_2B_2$  параллельны по условию, а стороны  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  - по свойству параллельных плоскостей, пересеченных третьей плоскостью.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников  $A_1A_2\dots A_n$  и  $B_1B_2\dots B_n$ , расположенных в параллельных плоскостях, и  $n$  параллелограммов, называется призмой.

Если боковое ребро призмы перпендикулярно плоскости ее основания, то такую призму называют прямой; если боковое ребро призмы не перпендикулярно плоскости ее основания, то такую призму называют наклонной. У прямой призмы боковые грани - прямоугольники. Перпендикуляр к плоскостям оснований, концы которого принадлежат этим плоскостям, называют высотой призмы.

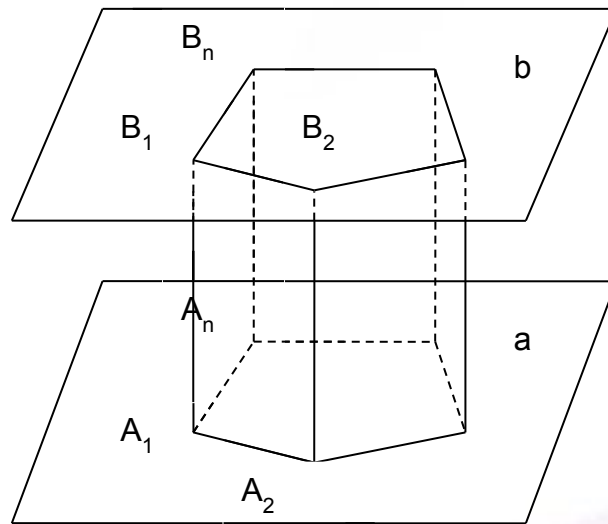
Прямая призма, основанием которой служит правильный многоугольник, называется правильной призмой.



# Площадь поверхности призмы

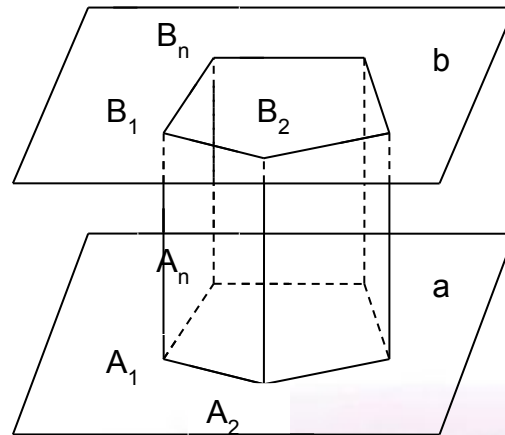
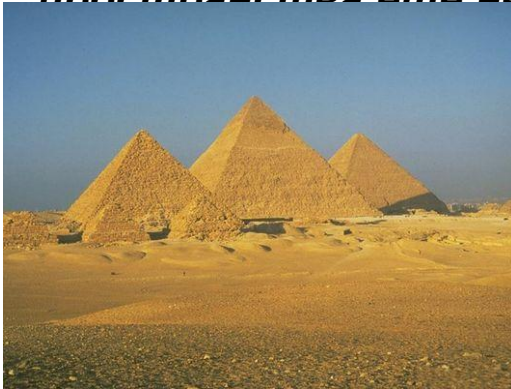
Поверхность многогранника состоит из конечного числа многоугольников (граней). Площадь поверхности многогранника есть сумма площадей всех его граней.

Площадь поверхности призм ( $S_{пр}$ ) равна сумме площадей ее боковых граней (площади боковой поверхности  $S_{бок}$ ) и площадей двух оснований ( $2S_{осн}$ ) - равных многоугольников:  
$$S_{пр} = S_{бок} + 2S_{осн}.$$



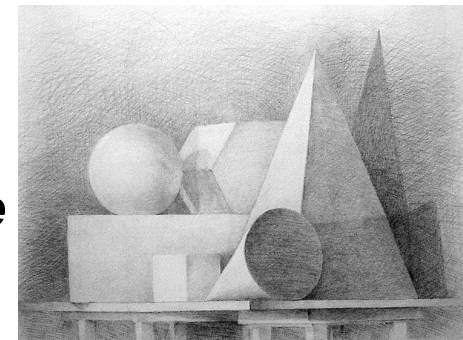
# Призма и пирамида

Подобно тому, как треугольник в понимании Евклида не являются пустым, т. е. представляет собой часть плоскости, ограниченную тремя неконкурентными (т. е. не пересекающимися в одной точке) отрезками, так и многогранник у него не пустой, не полый, а чем-то заполненный (по-нашему - частью пространства). В античной математике, однако, понятия отвлеченного пространства еще не было. Евклид определяет призму как уру, заключенную между двумя



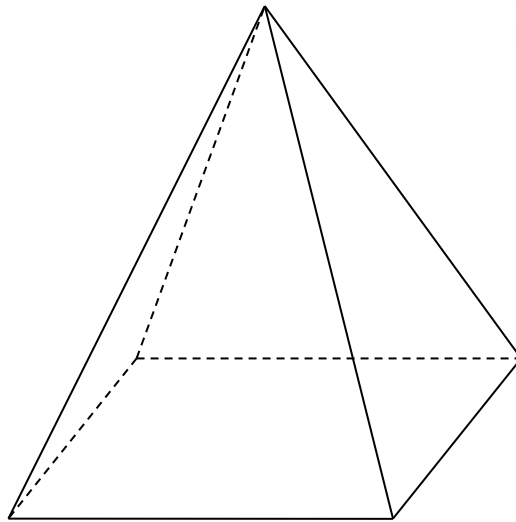


**равными и параллельными плоскостями (основаниями) и с боковыми гранями - параллелограммами. Для того чтобы это определение было вполне корректным, следовало бы, однако, доказать, что плоскости, проходящие через пары непараллельных сторон оснований, пересекаются по параллельным прямым. Евклид употребляет термин "плоскость" как в широком смысле (рассматривая ее неограниченно продолженной во все направления), так и в смысле конечной, ограниченной ее части, в частности грани, аналогично применению им термина "прямая" (в широком смысле - бесконечная прямая и в узком - отрезок). В XVIII в. Тейлор дал такое определение призмы: это многогранник, у которого все грани, кроме двух, параллельны одной прямой.**



**Пирамиду Евклид определяет как телесную фигуру, ограниченную плоскостями, которые от одной плоскости (основания) сходятся в одной точке**

**(вершине). Это определение подвергалось критике уже в древности, например, Героном, предложившим следующее определение пирамиды: это фигура, ограниченная треугольниками, сходящимися в одной точке, и основанием которой служит многоугольник.**



**Четырехугольная пирамида**



**Важнейшим недостатком этого определения является использование неопределенного понятия основания.**

**Тейлор определил пирамиду как многогранник, у которого все грани, кроме одной, сходятся в одной точке.**

**Лежандр в “Элементах геометрии” так определяет пирамиду: “Телесная фигура, образованная треугольниками, сходящимися в одной точке и заканчивающаяся на различных сторонах плоского основания”. После этой формулировки разъясняется понятие основания.**

**Определение Лежандра является явно избыточным, т.е. содержит признаки, которые можно вывести из других. А вот еще одно определение, которое фигурировало в учебниках XIX в.:**

**пирамида - телесный угол, пересеченный плоскостью.**



**Еще в древности существовали два пути определения геометрических понятий. Первый вел от фигур высшего порядка к фигурам низшего. Такой точки зрения придерживался, в частности, Евклид, определяющий поверхность как границу тела, линию - как границу поверхности, концы же линии - как точки. Второй путь ведет, наоборот, от фигур низшего измерения к фигурам высшего: движением точки образуется линия, аналогично из линий составляется поверхность и т. д. Одним из первых, который соединил обе эти точки зрения, был Герон Александрийский, писавший, что тело ограничивается поверхностью и вместе с этим может быть рассмотрено как образованное движением поверхности.**

**В появившихся позже на протяжении веков учебниках геометрии принималась за основу то одна, то другая, а иногда и обе вместе точки зрения.**



***Многогранник, одна из граней которого - многоугольник, а остальные грани - треугольники с общей вершиной, называется пирамидой. Пирамида, основание которой - правильный многоугольник и вершина проектируется в его центр, называется правильной.***



# **Измерение объемов**

**Объемы зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне и вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли путем умножения площади основания на высоту. Однако древнему Востоку были известны в основном только отдельные правила, найденные опытным путем, которыми пользовались для нахождения объемов для площадей фигур. В более позднее время, когда геометрия сформировалась как наука, был найден общий подход к вычислению объемов многогранников.**



**Среди замечательных греческих ученых V - IV вв. до н.э., которые разрабатывали теорию объемов, были Демокрит из Абдеры и Евдокс Книдский.**

**Евклид не применяет термина “объем”. Для него термин “куб”, например, означает и объем куба. В XI книге “Начал” изложены среди других и теоремы следующего содержания.**

- 1. Параллелепипеды с одинаковыми высотами и равновеликими основаниями равновелики.**
- 2. Отношение объемов двух параллелепипедов с равными высотами равно отношению площадей их оснований.**
- 3. В равновеликих параллелепипедах площади оснований обратно пропорциональны высотам**

**Теоремы Евклида относятся только к сравнению объемов, так как непосредственное вычисление объемов тел Евклид, вероятно, считал делом практических руководств по геометрии. В произведениях прикладного характера Герона Александрийского имеются правила для вычислений объема куба, призмы, параллелепипеда и других пространственных фигур.**



**Евдокс**



# О пирамиде и её объеме

Термин “пирамида” заимствован из греческого “пирамис” или “пирамидос”. Греки в свою очередь позаимствовали это слово, как полагают, из египетского языка. В папирусе Ахмеса встречается слово “пирамус” в смысле ребра правильной пирамиды. Другие считают, что термин берет свое начало от форм хлебцев в Древней Греции “пирос” - рожь). В связи с тем, что форма пламени иногда напоминает образ пирамиды, некоторые средневековые ученые считали, что термин происходит греческого слова “пир” - огонь. Вот почему в некоторых учебниках геометрии XVI в. пирамида названа “огнеформное тело”.





**Согласно Архимеду, еще в V до н.э. Демокрит из Абдеры установил, что объем пирамиды равен одной трети объема призмы с тем же основанием и той же высотой. Полное доказательство этой теоремы дал Евдокс Книдский в IV до н.э.**



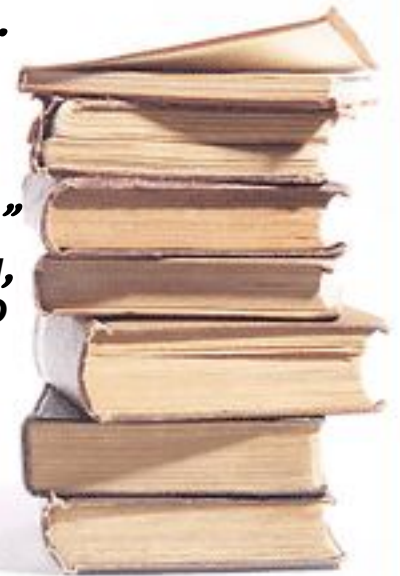
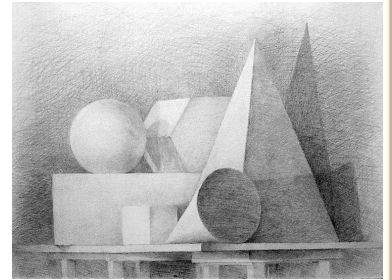
**Египетские пирамиды**  
**(по середине пирамида Хеопса высота которой достигает 147м)**



# О призме и параллелепипеде

Часть геометрии, в которой изучаются свойства куба, призмы, параллелепипеда и других геометрических тел и пространственных фигур, издавна называется стереометрией; Слово это греческого происхождения (“стереос” - пространственный, “метрео” - измеряю) и встречается еще у знаменитого древнегреческого философа Аристотеля. Стереометрия возникла позже, чем планиметрия. Евклид дает следующее определение призмы: “Призма есть телесная (т.е. пространственная) фигура, заключенная между плоскостями, из которых две противоположные равны и параллельны, остальные же - параллелограммы”. Тут, как и во многих других местах, Евклид употребляет термин “плоскость” не в смысле безгранично продолженной плоскости, а в смысле ограниченной ее части, грани, подобно тому как “прямая” означает у него и отрезок прямой.

Термин “призма” греческого происхождения и буквально означает “отпиленное” (тело). Термин “параллелепипедальное тело” встречается впервые у Евклида и означает дословно “параллеле-плоскостное тело”. Греческое слово “кубос” употребляется Евклидом в том же смысле, что и наше слово “куб”.

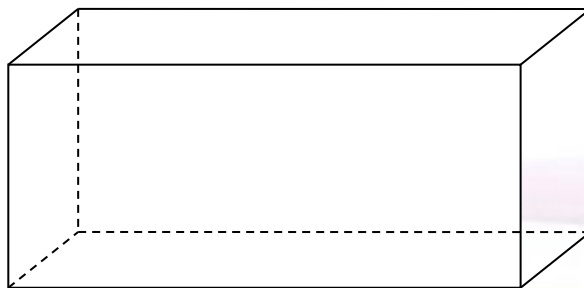
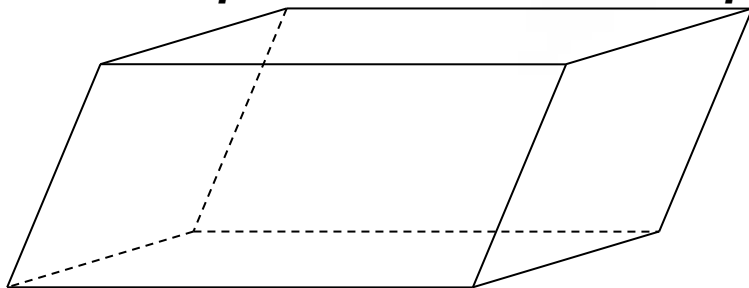


# Параллелепипед

**Призма, основание которой - параллелограмм, называется параллелепипедом.**

**В соответствии с определением параллелепипед - это четырехугольная призма, все грани которой - параллелограммы. Параллелепипеды, как и призмы, могут быть прямыми и наклонными.**

**Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называют прямоугольным параллелепипедом. У прямоугольного параллелепипеда все грани прямоугольники.**



***Конец***

