Многогранники: виды задач и методы их решения

(типовые задания С2) - 2

Методическая разработка Амачкиной А.А.
МОУ СОШ №12,
г. Балашиха, Московской области.

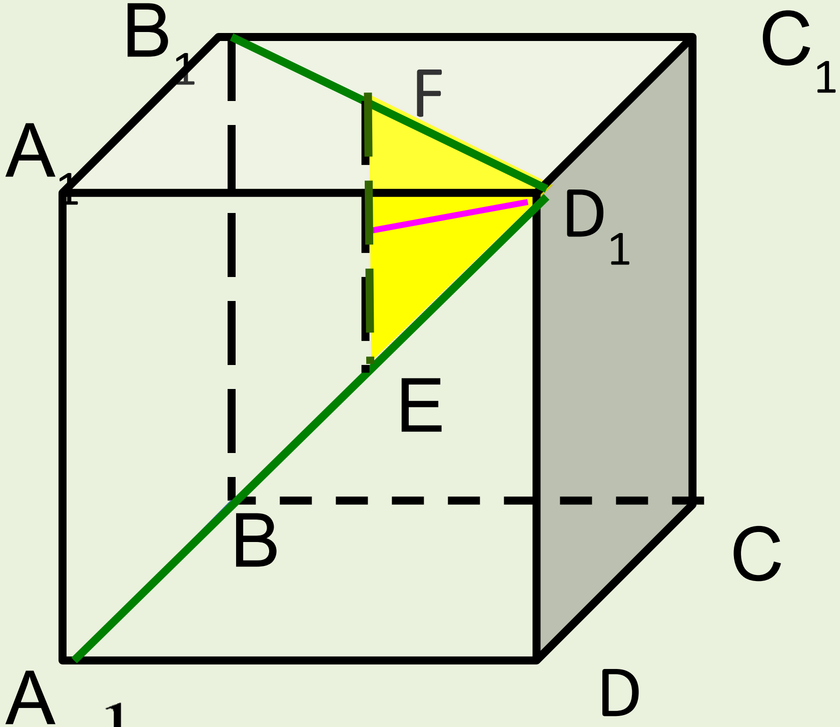
1.2. Расстояние от точки до прямой

- ***Расстояние от точки до прямой, не*** *содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.*
- ***Расстояние между двумя параллель****ными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.*
- ***Расстояние между двумя параллель****ными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.*

Поэтапно-вычислительный метод

Расстояние от точки до прямой можно вычислить, как длину отрезка перпендикуляра, если удается включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот.

Пример 4. *При условиях примера 1 найти расстояние от точки D_1 до прямой EF.*



Решение. *Пусть h – длина высоты треугольника, D_1EF опущенной из точки D_1. Найдем h, используя метод площадей. Площадь треугольника D_1EF равна*

$$\frac{1}{2} D_1F * D_1E * \sin \angle FD_1E = \frac{1}{2} * \frac{2\sqrt{2}}{3} * \frac{\sqrt{2}}{3} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

С другой стороны площадь треугольника D_1 EF равна

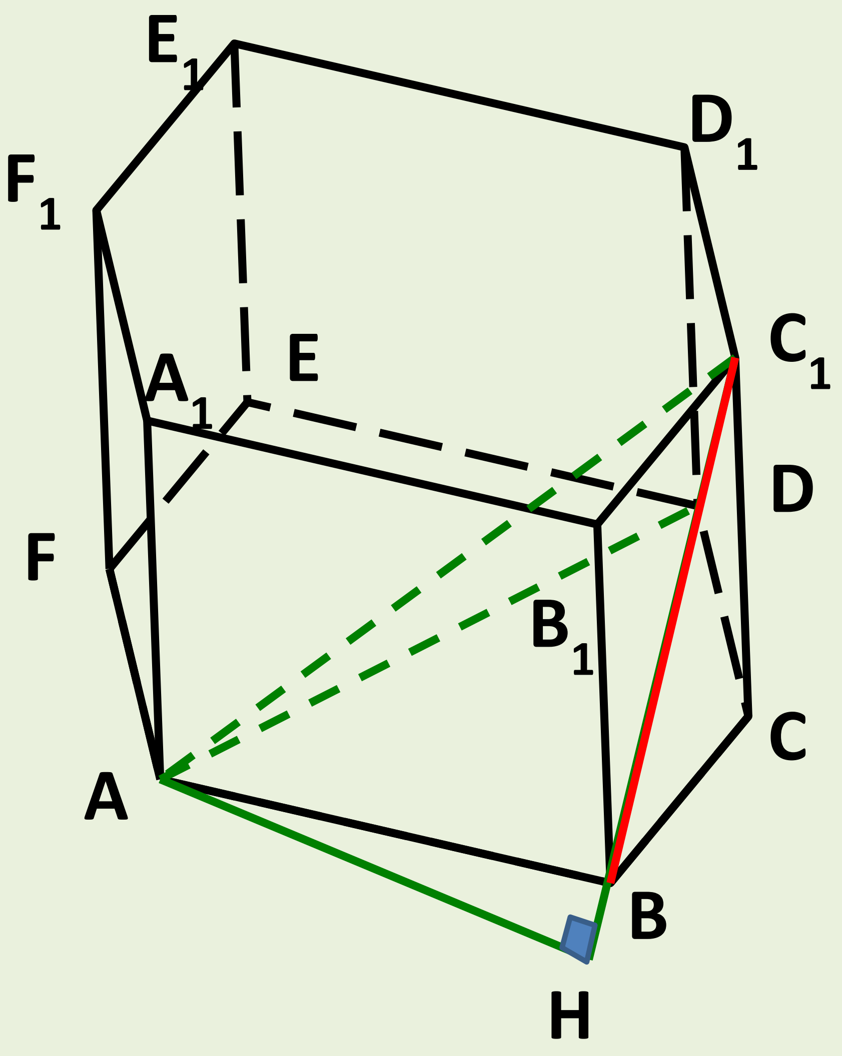
$$\frac{1}{2} FE * h = \frac{\sqrt{6}}{6} h. \quad \textit{Из} \quad \textit{уравнения} \quad \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{6}}{6} h$$

$$\textit{находим} \quad \textit{искомое} \quad \textit{расстояние} \quad h = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Замечание. *Можно заметить, что выполняется равенство $FE^2 + D_1E^2 = D_1F^2$, т.е. треугольник D_1EF прямоугольный и длина отрезка D_1E является искомым расстоянием.*

$$\textit{Ответ}: \quad \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Пример 5. *В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны l, найти расстояние от точки A до прямой BC_1.*



Решение.

В квадрате BCC_1B_1 диагональ BC_1 равна $\sqrt{2}$

В прямоугольном треугольнике ACD, где

$$\angle ACD = 90^0, \qquad AD = 2,$$

находим $AC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$ *Из прямоугольного теругольника* ACC_1 *имеем* $AC_1=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2.$ *В треугольнике* ABC_1, *используя теорему косинусов*, *получаем* $\cos\varphi=\dfrac{2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}{2*2*\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

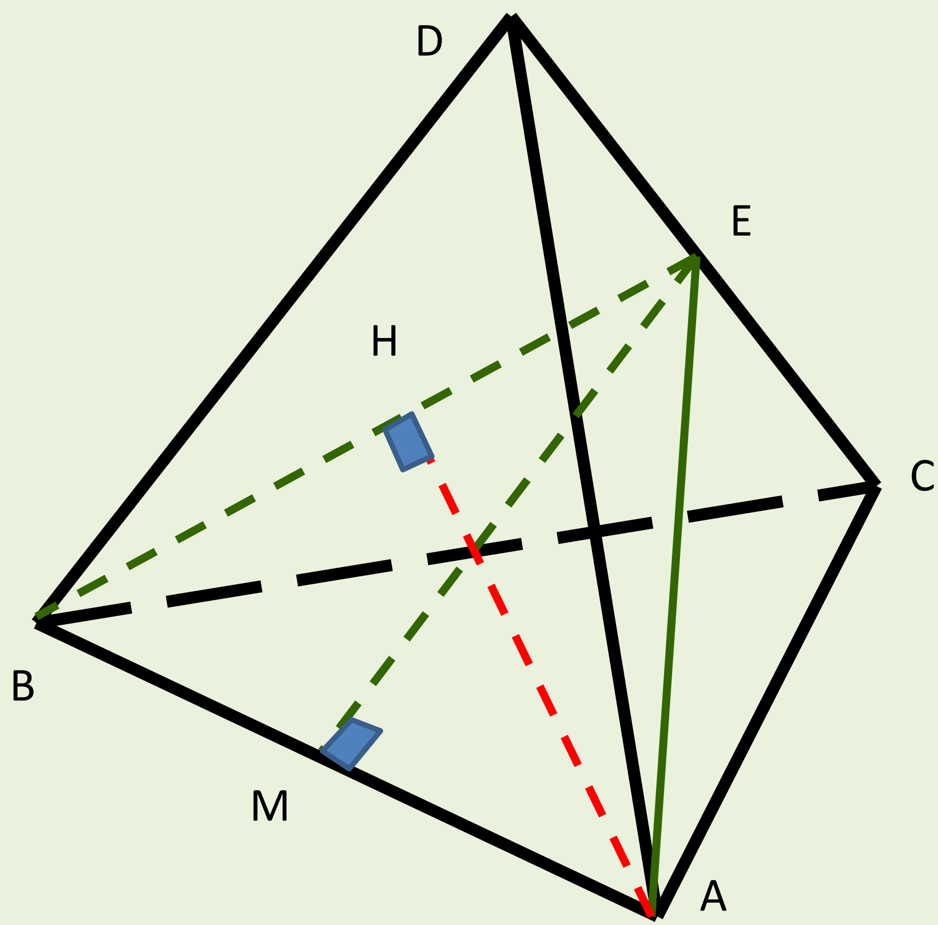
где $\angle AC_1B=\varphi.$ *Далее находим* $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{14}}{8}$

и из треугольника AC_1H *высоту*

$$AH=AC_1\sin\varphi=2*\frac{\sqrt{14}}{8}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

Пример 6. **(МИОО, 2010).** *В тетраэдре ABCD, все ребра которого равны l, найти расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD .*



Решение.

Так как все ребра ABCD - равные правильные треугольники, то медианы BE и AE треугольников BDC и ADC равны и

$$BE = AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник BEA и его высоты EM и AH. Выражая площадь треугольника двумя способами, получаем

$S_{BEA} = \frac{1}{2} * AH * BE = \frac{1}{2} * EM * AB$, *получаем равенство*

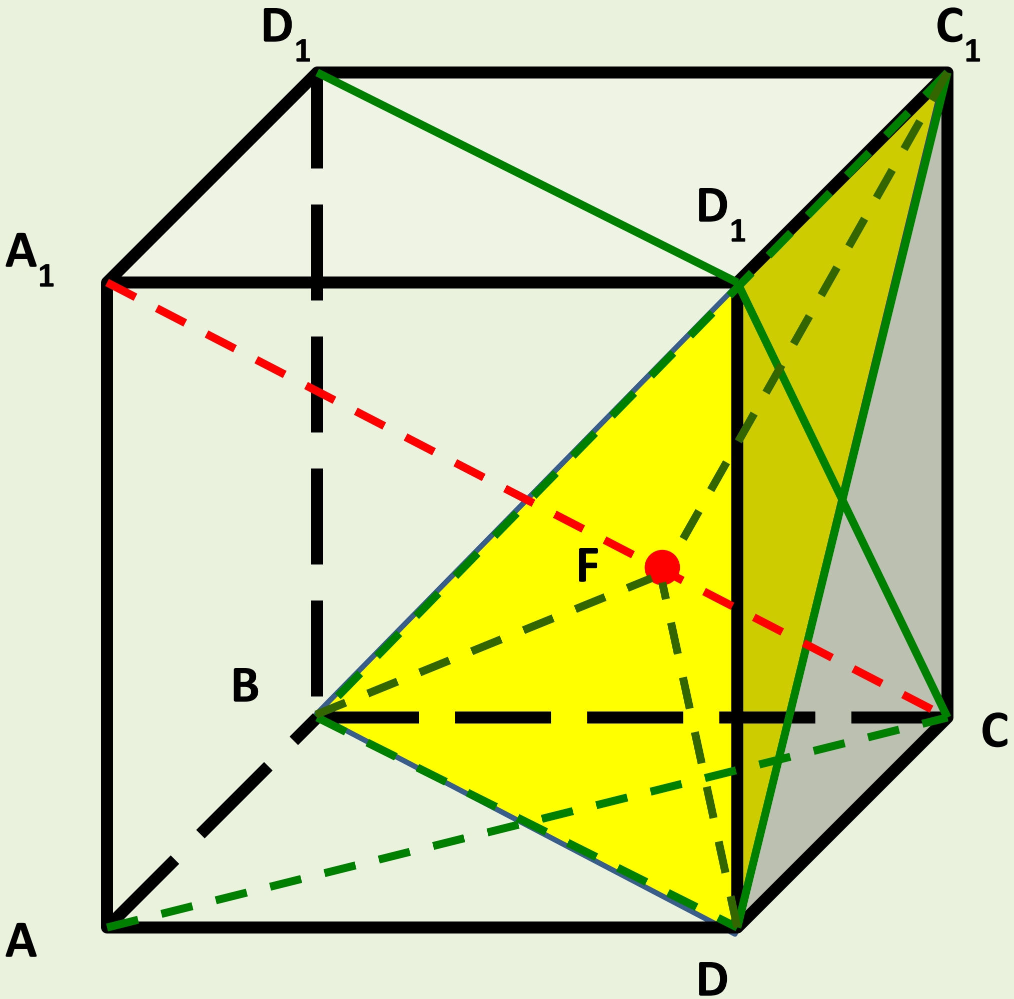
$AH * BE = EM * AB$. *Так как* $EM = \sqrt{BE^2 - BM^2} =$

$= \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *то получаем*

$$AH = \frac{EM * AB}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2} * 1 * \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Пример 7. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки D до прямой A_1C.*



Пусть $A_1C \cap BDC_1 = F$. *Так как* $A_1C \perp BDC_1$ (*опорная задача* 20), *то* $FC_1 = FB = FD$

как проекции на плоскость BDC_1 равных наклонных CC_1 , CB и CD соответственно. Следовательно, точка F является центром правильного треугольника BDC_1 Поэтому искомое расстояние равно радиусу окружности, описанной около треугольника BDC_1.

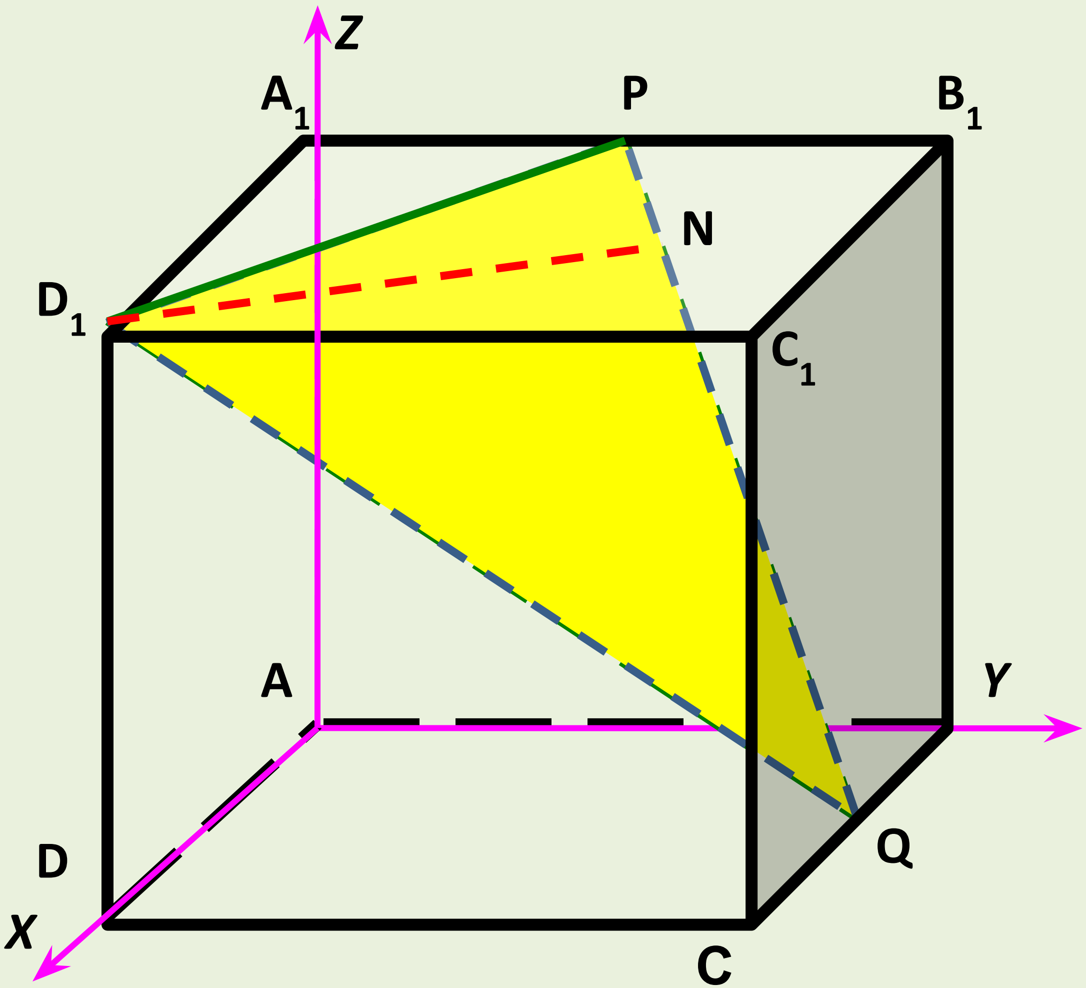
Сторона этого треугольника равна $\sqrt{2}$ *значит,*

$$\rho(D, A_1C) = DF = \frac{\sqrt{2} * \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Координатный метод

Пример 8. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки D_1 до прямой PQ, где P и Q – середины соответственно ребер A_1B_1 и BC.



Решение. *Рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке А Найдем координаты точек*

$$P\left(0;\frac{1}{2};1\right), Q\left(\frac{1}{2};1;0\right), D_1(1;0;1). \qquad \textit{Тогда}$$

$$PQ=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad D_1Q=\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}=\frac{3}{2},$$

$$D_1P=\sqrt{1+\frac{1}{4}+0}=\sqrt{\frac{1}{4}}$$

Из треугольника D_1PQ , используя формулу

$$\cos \angle D_1PQ = \frac{D_1P^2 + QP^2 - D_1Q^2}{2 * D_1P * QP},$$ *находим*

$$\cos \angle D_1PQ = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4}}{2 * \sqrt{\frac{5}{4}} * \sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{30}}.$$ *Далее получаем*

$$\sin \angle D_1PQ = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1}{30}}\right)^2} = \sqrt{\frac{29}{30}}.$$

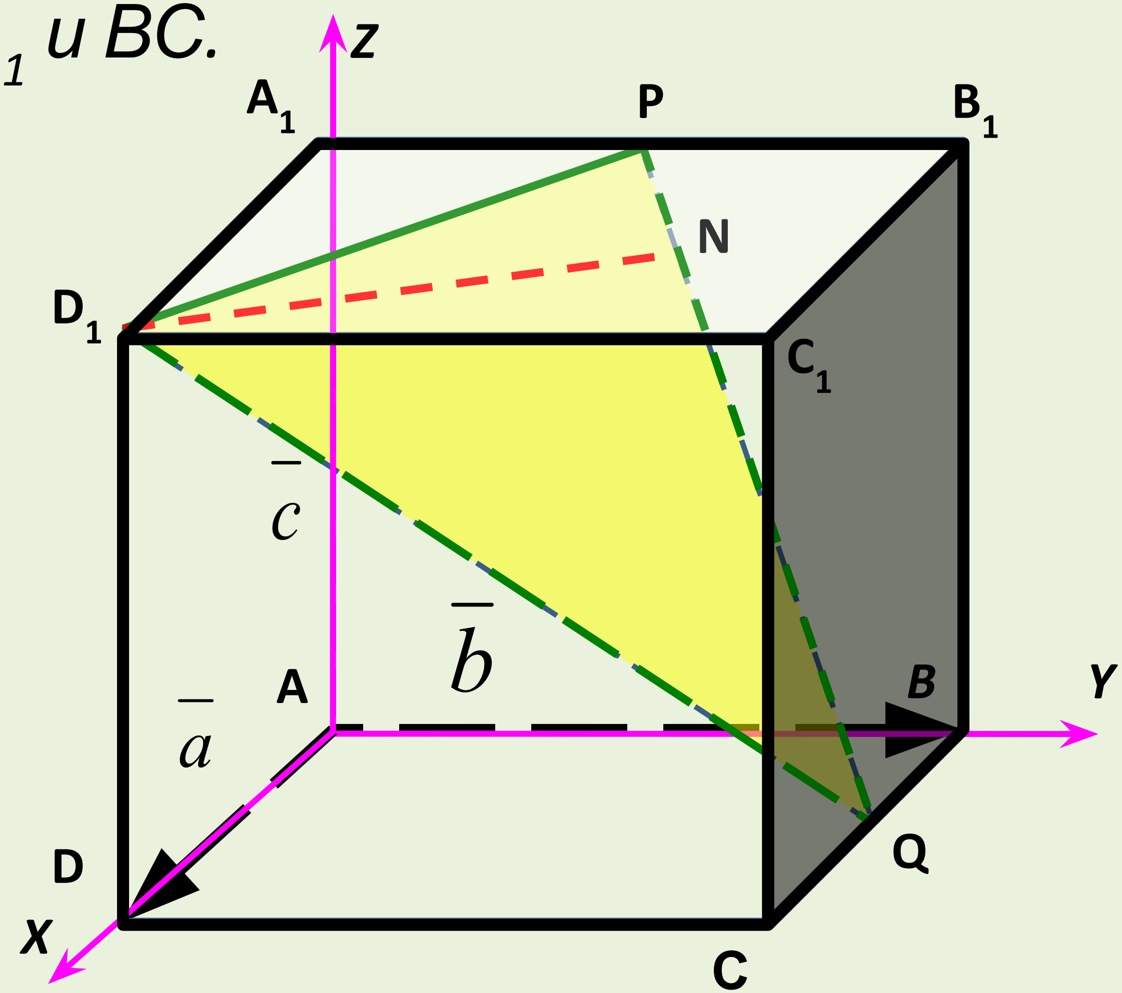
Пусть $D_1N \perp PQ,$ *где* $N \in PQ.$ *Тогда*

$$D_1N = D_1P * \sin \angle D_1PQ, \qquad D_1N = \sqrt{\frac{5}{4}} * \sqrt{\frac{29}{30}} = \sqrt{\frac{174}{144}} = \frac{\sqrt{174}}{12}$$

Ответ : $\dfrac{\sqrt{174}}{12}$

Векторный метод

Пример 9. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки D_1 до прямой PQ, где P и Q – середины соответственно ребер A_1B_1 и BC.



Решение.

Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$, *тогда* $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$\vec{a}*\vec{b}=\vec{a}*\vec{c}=\vec{b}*\vec{c}=0.$

Выразим вектор $\overrightarrow{PQ}$ *через базисные векторы* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c},$$

$$\overrightarrow{PD_1}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

Пусть $D_1N\perp PQ$, *где* $N\in PQ$. *Выразим вектор* $\overrightarrow{D_1N}$, *учитывая коллинеарность векторов* $\overrightarrow{PN}$ *и* $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{D_1N}=\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PD_1}=x*\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PD_1}$$

Так как $\overrightarrow{D_1N} \perp \overrightarrow{PQ},$ *то* $\overrightarrow{D_1N} * \overrightarrow{PQ} = 0.$

Отсюда получаем $\left(x * \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PD_1}\right) * \overrightarrow{PQ} = 0$

$$x * \overrightarrow{PQ^2} = \overrightarrow{PD_1} * \overrightarrow{PQ},$$

$$x * \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right)^2 = \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) * \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right),$$

$$x * \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \qquad x = \frac{1}{6}$$

$$\overrightarrow{D_1N} = \frac{1}{6} * \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PD_1} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} = -\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}$$

$$\left|\overrightarrow{D_1N}\right| = \sqrt{\overrightarrow{D_1N^2}} = \sqrt{\left(-\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{144} + \frac{49}{144} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{174}}{12}$$

Замечание. *Решение данного примера векторным методом не является рациональным, но приведено с целью показа широких возможностей векторного метода при решении задач разных видов*

Используемая литература:

Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: виды задач и методы их решения.