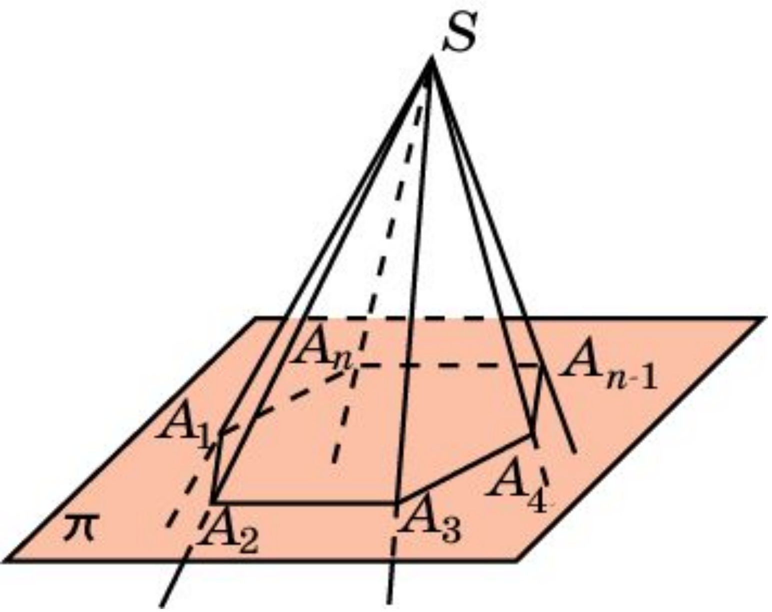
МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

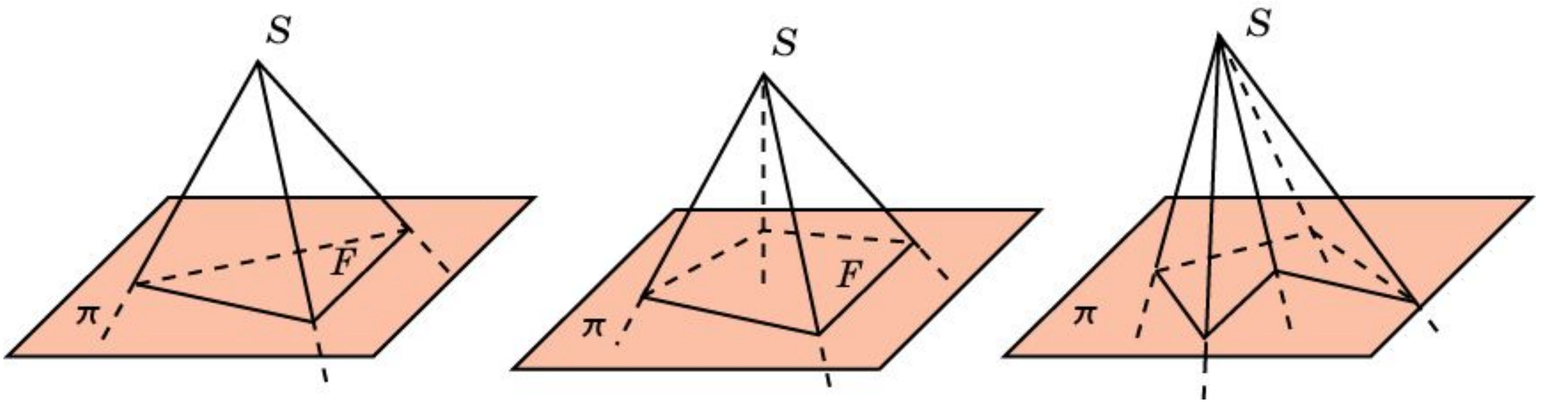


Поверхность, образованную конечным набором плоских углов A_1SA_2, A_2SA_3, …, $A_{n\text{-}1}SA_n$, A_nSA_1 с общей вершиной S, в которых соседние углы не имеют общий точек, кроме точек общего луча, а не соседние углы не имеют общих точек, кроме общей вершины, будем называть многогранной поверхностью.

Фигура, образованная указанной поверхностью и одной из двух частей пространства, ею ограниченных, называется многогранным углом. Общая вершина S называется вершиной многогранного угла. Лучи SA_1, …, SA_n называются ребрами многогранного угла, а сами плоские углы A_1SA_2, A_2SA_3, …, $A_{n\text{-}1}SA_n$, A_nSA_1 – гранями многогранного угла. Многогранный угол обозначается буквами $SA_1…A_n$, указывающими вершину и точки на его ребрах.

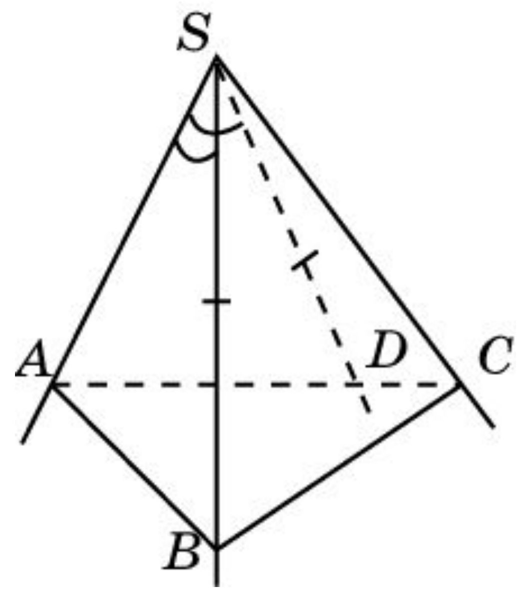
МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

В зависимости от числа граней многогранные углы бывают трехгранными, четырехгранными, пятигранными и т. д.



ТРЕХГРАННЫЕ УГЛЫ

Теорема. Всякий плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.



Доказательство. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$. Пусть наибольший из его плоских углов есть угол ASC. Тогда выполняются неравенства $\angle ASB \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC$; $\angle BSC \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB$.

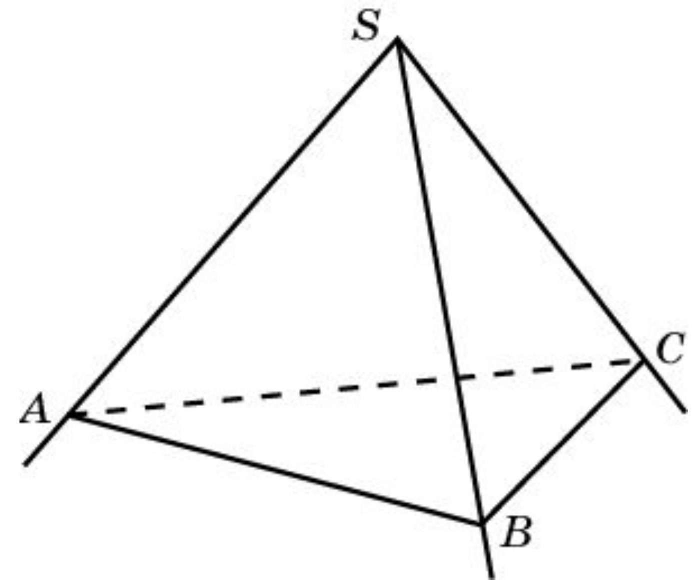
Таким образом, остается доказать неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Отложим на грани ASC угол ASD, равный ASB, и точку B выберем так, чтобы $SB = SD$. Тогда треугольники ASB и ASD равны (по двум сторонам и углу между ними) и, следовательно, $AB = AD$.

Воспользуемся неравенством треугольника $AC < AB + BC$. Вычитая из обеих его частей $AD = AB$, получим неравенство $DC < BC$. В треугольниках DSC и BSC одна сторона общая (SC), $SD = SB$ и $DC < BC$. В этом случае против большей стороны лежит больший угол и, следовательно, $\angle DSC < \angle BSC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол ASD, равный углу ASB, получим требуемое неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

ТРЕХГРАННЫЕ УГЛЫ

Свойство. Сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360°.

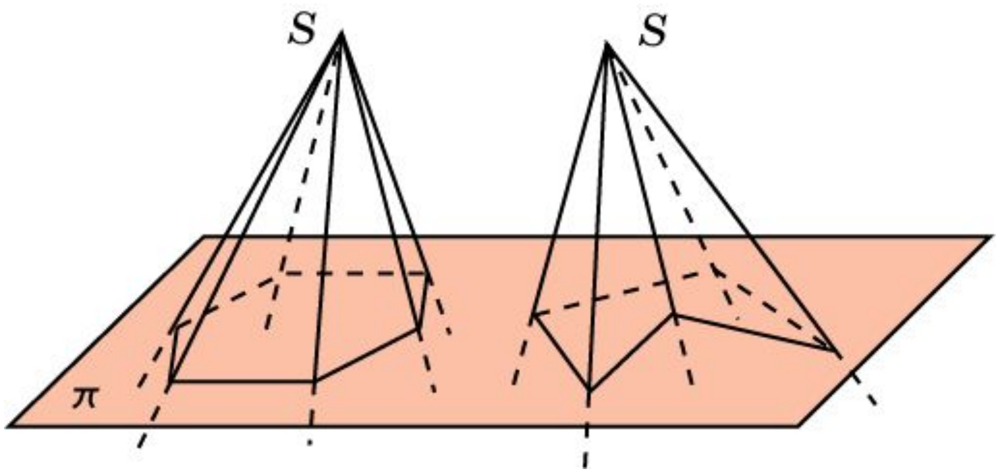


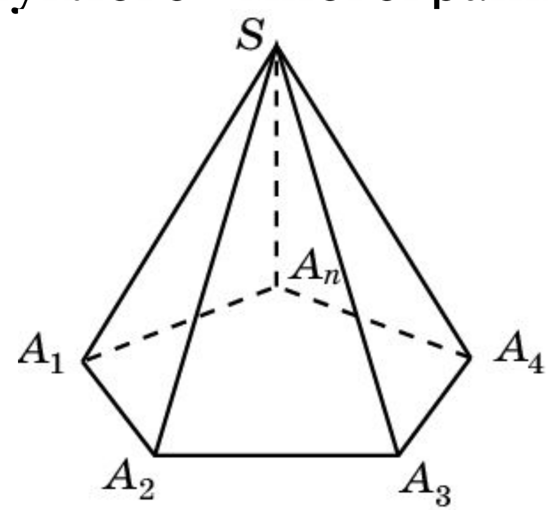
Доказательство. Пусть $SABC$ – данный трехгранный угол. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной A, образованный гранями ABS, ACS и углом BAC. В силу доказанного свойства, имеет место неравенство $\angle BAC < \angle BAS + \angle CAS$.

Аналогично, для трехгранных углов с вершинами B и C имеют место неравенства: $\angle ABC < \angle ABS + \angle CBS$, $\angle ACB < \angle ACS + \angle BCS$. Складывая эти неравенства и учитывая, что сумма углов треугольника ABC равна 180°, получаем $180° < \angle BAS + \angle CAS + \angle ABS + \angle CBS + \angle BCS + \angle ACS = 180° - \angle ASB + 180° - \angle BSC + 180° - \angle ASC$. Следовательно, $\angle ASB + \angle BSC + \angle ASC < 360°$.

ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Многогранный угол называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок. На рисунке приведены примеры выпуклого и невыпуклого многогранных углов.



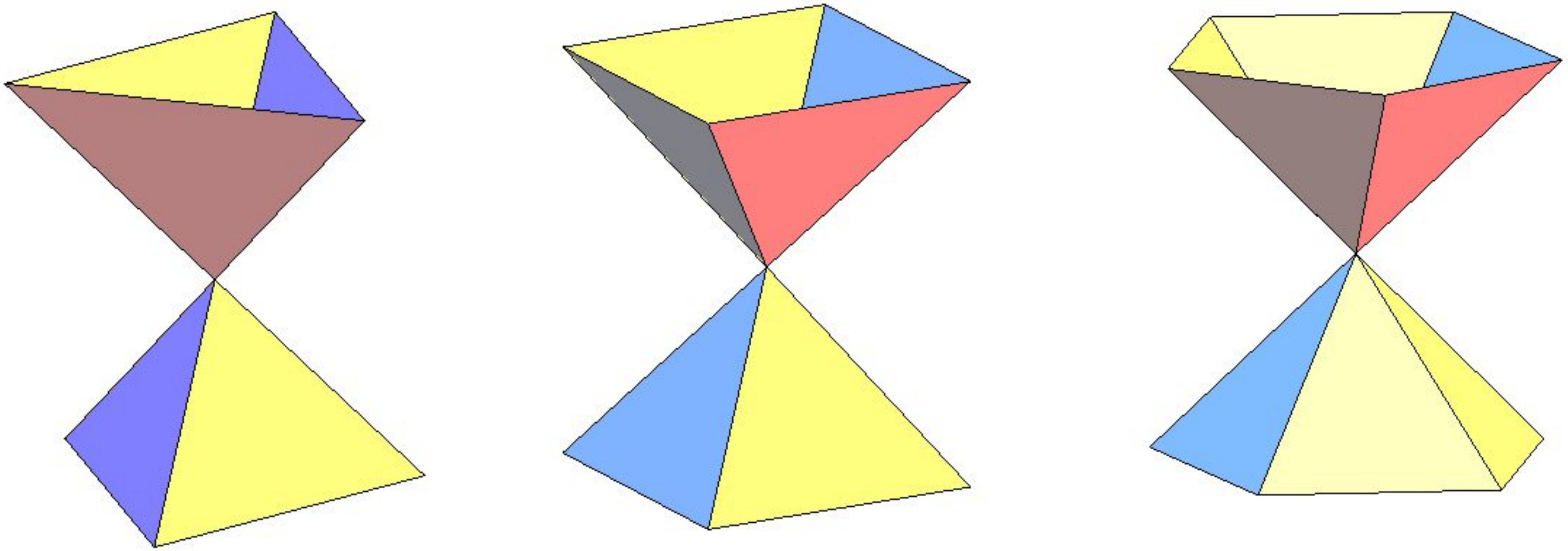


Свойство. Сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для трехгранного угла.

Вертикальные многогранные углы

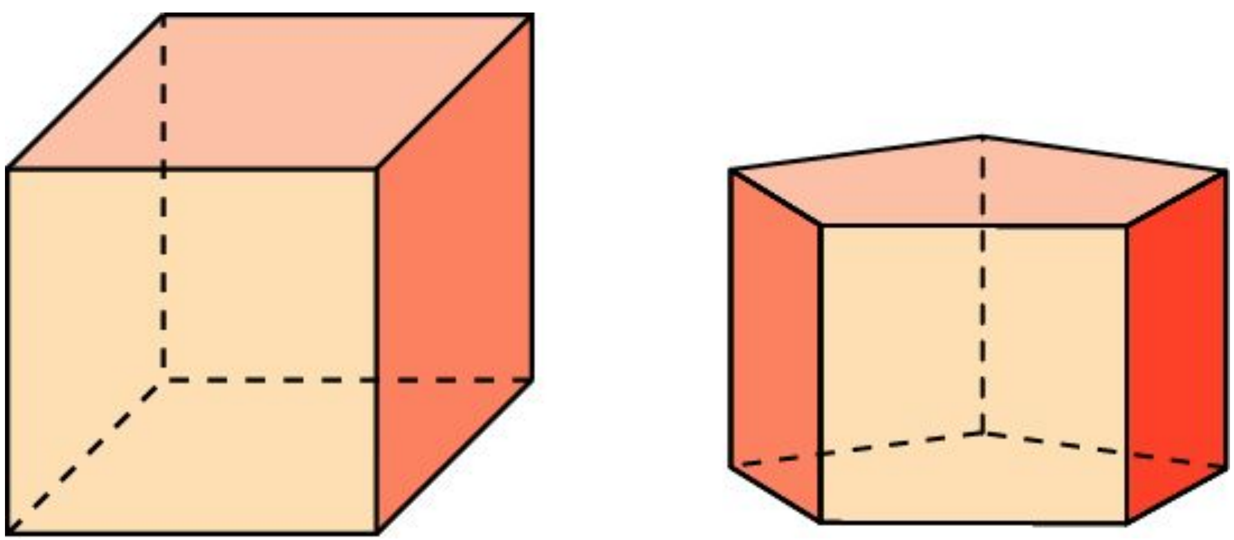
На рисунках приведены примеры трехгранных, четырехгранных и пятигранных вертикальных углов



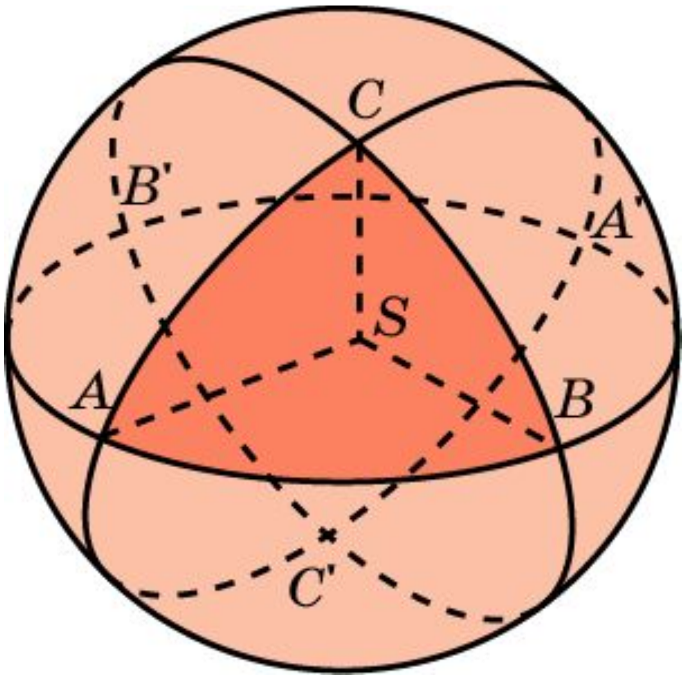
Теорема. Вертикальные углы равны.

Измерение многогранных углов

Поскольку градусная величина развернутого двугранного угла измеряется градусной величиной соответствующего линейного угла и равна 180^{o}, то будем считать, что градусная величина всего пространства, которое состоит из двух развернутых двугранных углов, равна 360^{o}. Величина многогранного угла, выраженная в градусах, показывает какую часть пространства занимает данный многогранный угол. Например, трехгранный угол куба занимает одну восьмую часть пространства и, значит, его градусная величина равна 360^{o}:8 = 45^{o}. Трехгранный угол в правильной n-угольной призме равен половине двугранного угла при боковом ребре. Учитывая, что этот двугранный угол равен $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$, получаем, что трехгранный угол призмы равен $\frac{90^\circ(n-2)}{n}$.



Измерение трехгранных углов*



Выведем формулу, выражающую величину трехгранного угла через его двугранные углы. Опишем около вершины S трехгранного угла единичную сферу и обозначим точки пересечения ребер трехгранного угла с этой сферой A, B, C.

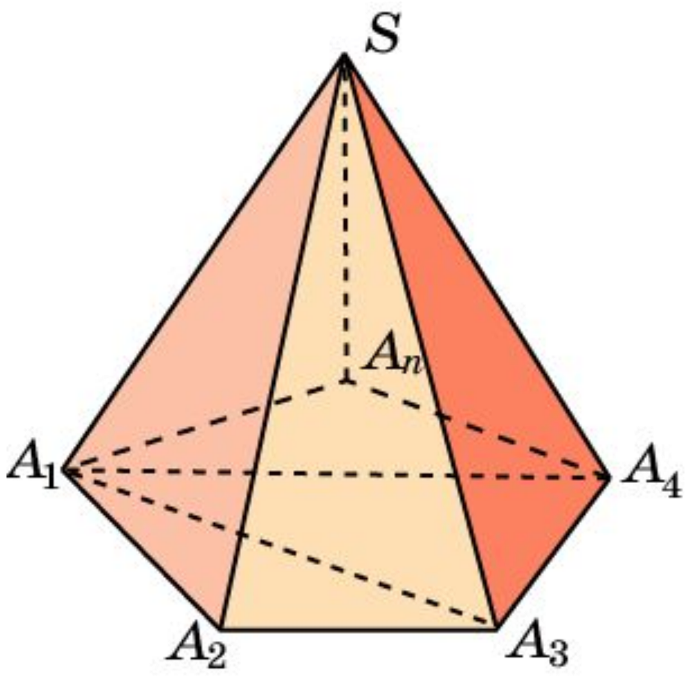
Плоскости граней трехгранного угла разбивают эту сферу на шесть попарно равных сферических двуугольников, соответствующих двугранным углам данного трехгранного угла. Сферический треугольник ABC и симметричный ему сферический треугольник $A'B'C'$ являются пересечением трех двуугольников. Поэтому удвоенная сумма двугранных углов равна 360° плюс учетверенная величина трехгранного угла, или

$$\angle SA + \angle SB + \angle SC = 180^\circ + 2\angle SABC.$$

Измерение многогранных углов*

Пусть $SA_1 \ldots A_n$ – выпуклый n-гранный угол. Разбивая его на трехгранные углы, проведением диагоналей A_1A_3, …, A_1A_{n-1} и применяя к ним полученную формулу, будем иметь:

$$\angle SA_1 + \ldots + \angle SA_n = 180^{\circ}(n-2) + 2 \angle SA_1 \ldots A_n.$$



Многогранные углы можно измерять и числами. Действительно, тремстам шестидесяти градусам всего пространства соответствует число 2π. Переходя от градусов к числам в полученной формуле, будем иметь:

$$\angle SA_1 + \ldots + \angle SA_n = \pi\,(n-2) + 2 \angle SA_1 \ldots A_n.$$

Упражнение 1

Может ли быть трехгранный угол с плоскими углами: а) 30°, 60°, 20°; б) 45°, 45°, 90°; в) 30°, 45°, 60°?

Ответ: а) Нет; б) нет; в) да.

Упражнение 2

Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только: а) трехгранные углы; б) четырехгранные углы; в) пятигранные углы.

Ответ: а) Тетраэдр, куб, додекаэдр;
б) октаэдр;
в) икосаэдр.

Упражнение 3

Два плоских угла трехгранного угла равны 70° и 80°. В каких границах находится третий плоский угол?

Ответ: $10^o < \phi < 150^o$.

Упражнение 4

Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найдите величину угла между плоскостями плоских углов в 45°.

Ответ: 90°.

Упражнение 5

В трехгранном угле два плоских угла равны по 45°; двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

Ответ: 60°.

Упражнение 6

Плоские углы трехгранного угла равны 60°, 60° и 90°. На его ребрах от вершины отложены равные отрезки *OA*, *OB*, *OC*. Найдите двугранный угол между плоскостью угла в 90° и плоскостью *ABC*.

Ответ: 90°.

Упражнение 7

Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°. На одном из его ребер отложен от вершины отрезок, равный 3 см, и из его конца опущен перпендикуляр на противоположную грань. Найдите длину этого перпендикуляра.

Ответ: $\sqrt{6}$ см.

Упражнение 8

Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его граней.

Ответ: Луч, вершиной которого является вершина трехгранного угла, лежащий на линии пересечения плоскостей, делящих двугранные углы пополам.

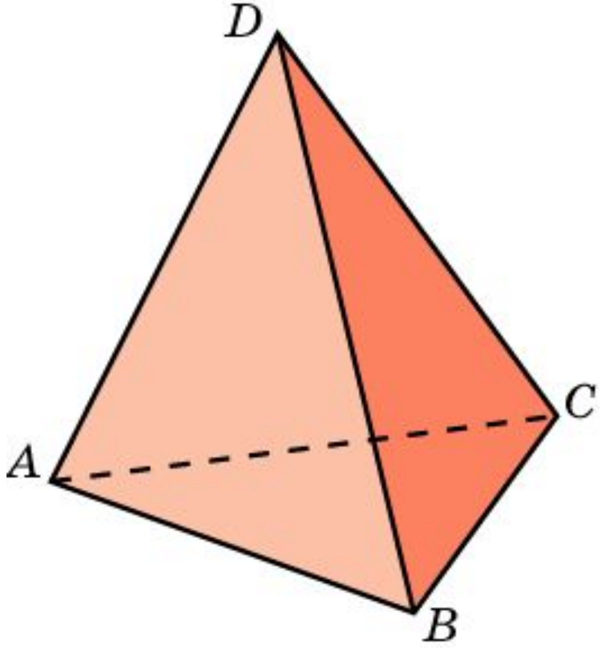
Упражнение 9

Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его ребер.

Ответ: Луч, вершиной которого является вершина трехгранного угла, лежащий на линии пересечения плоскостей, проходящих через биссектрисы плоских углов и перпендикулярных плоскостям этих углов.

Упражнение 10

Найдите приближенные значения трехгранных углов тетраэдра.



Для двугранных углов φ тетраэдра имеем:

$\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$, откуда $\varphi \approx 70^{\circ}30'$.

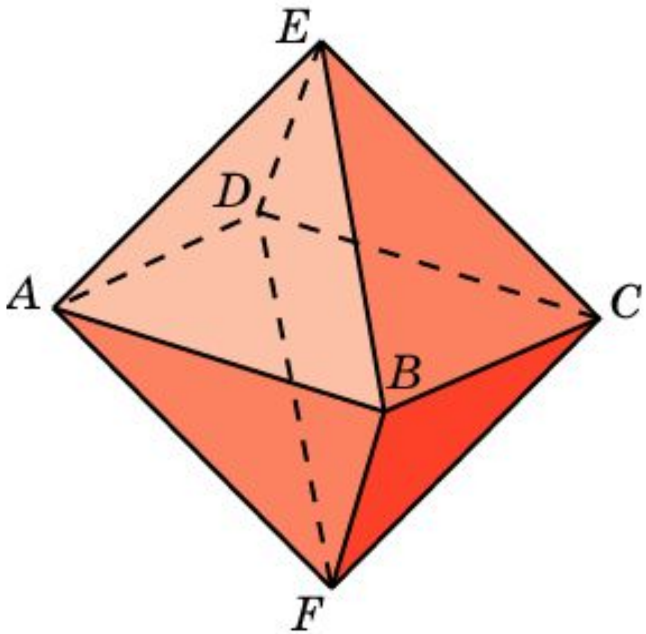
Для трехгранных углов ψ тетраэдра имеем:

$$\psi = \frac{3\varphi - 180^{\circ}}{2} \approx 15^{\circ}45'.$$

Ответ: $\psi \approx 15^{\circ}45'$.

Упражнение 11

Найдите приближенные значения четырехгранных углов октаэдра.



Для двугранных углов φ октаэдра имеем:

$\cos\varphi = -\frac{1}{3}$, откуда $\varphi \approx 109^{o}30'$.

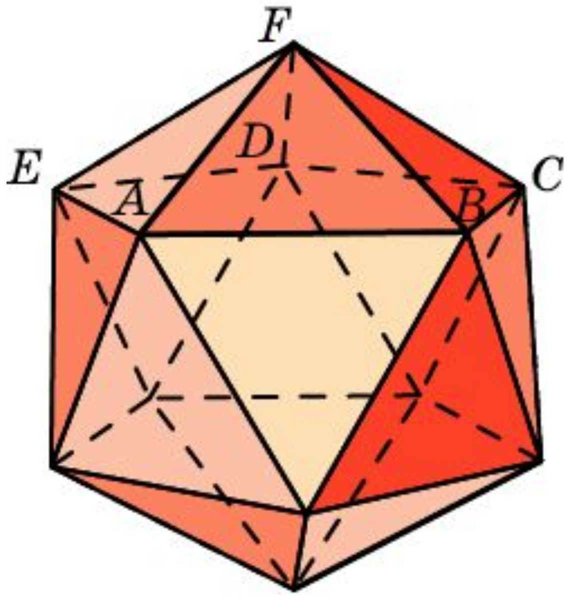
Для четырехгранных углов ψ октаэдра имеем:

$$\psi = \frac{4\varphi - 180^\circ \cdot 2}{2} = 2\varphi - 180^\circ \approx 38^{o}56'.$$

Ответ: $\psi \approx 38^{o}56'$.

Упражнение 12

Найдите приближенные значения пятигранных углов икосаэдра.



Для двугранных углов φ икосаэдра имеем:

$\cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, откуда $\varphi \approx 138°11'$.

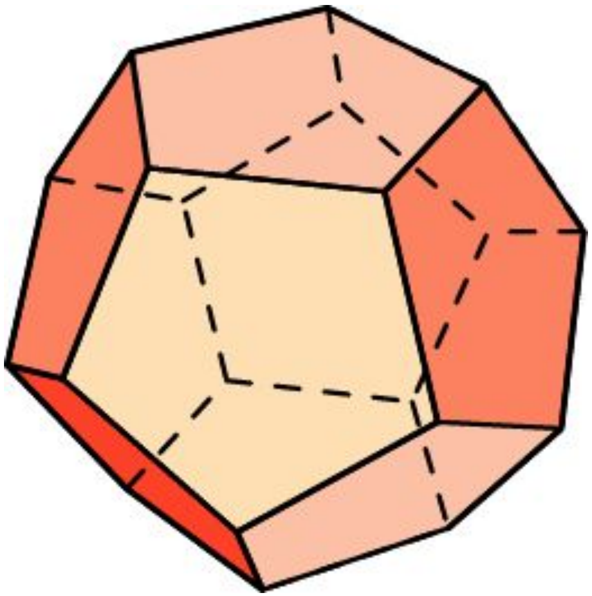
Для пятигранных углов ψ икосаэдра имеем:

$$\psi = \frac{5\varphi - 180° \cdot 3}{2} \approx 75°28'.$$

Ответ: $\psi \approx 75°28'$.

Упражнение 13

Найдите приближенные значения трехгранных углов додекаэдра.



Для двугранных углов φ додекаэдра имеем:

$\cos\varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, откуда $\varphi \approx 116^{o}34'$.

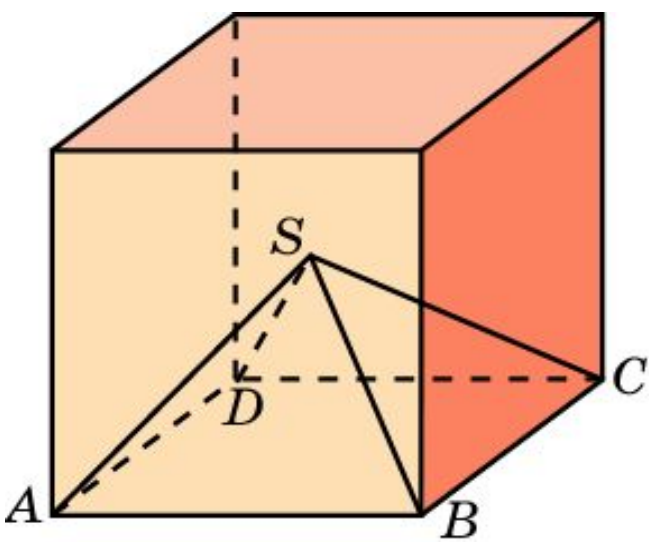
Для трехгранных углов ψ додекаэдра имеем:

$$\psi = \frac{3\varphi - 180^{\circ}}{2} \approx 84^{o}51'.$$

Ответ: $\psi \approx 84^{o}51'$.

Упражнение 14

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 2 см, высота 1 см. Найдите четырехгранный угол при вершине этой пирамиды.

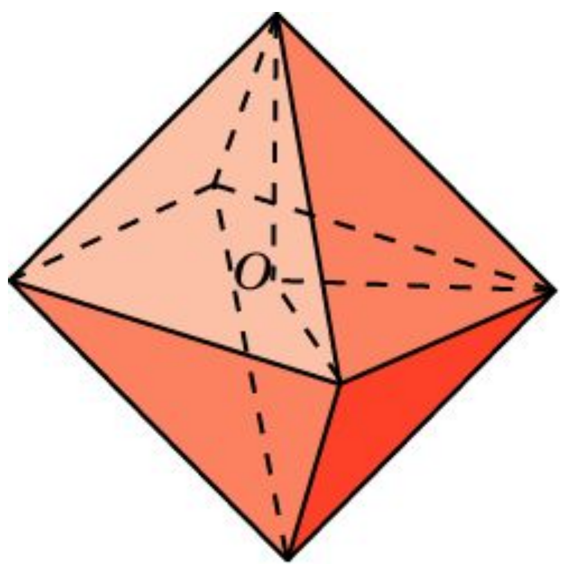


Решение: Указанные пирамиды разбивают куб на шесть равных пирамид с вершинами в центре куба. Следовательно, 4-х гранный угол при вершине пирамиды составляет одну шестую часть угла в 360°, т.е. равен 60°.

Ответ: 60°.

Упражнение 15

В правильной треугольной пирамиде боковые ребра равны 1, углы при вершине 90^{o}. Найдите трехгранный угол при вершине этой пирамиды.

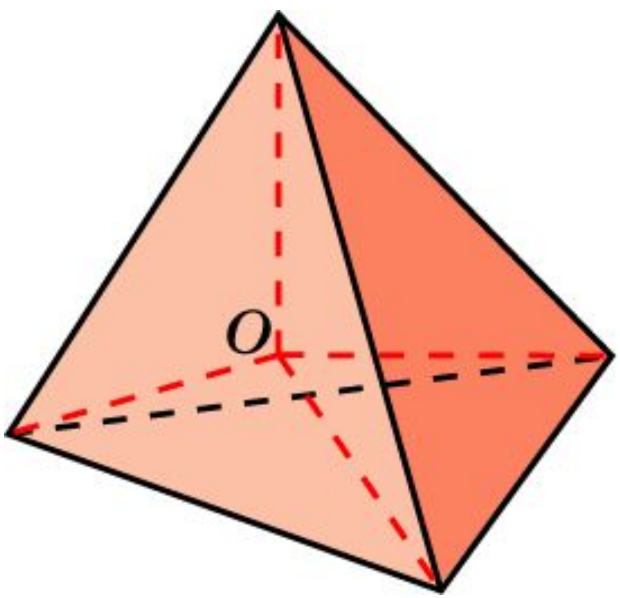


Решение: Указанные пирамиды разбивают октаэдр на восемь равных пирамид с вершинами в центре O октаэдра. Следовательно, 3-х гранный угол при вершине пирамиды составляет одну восьмую часть угла в 360^{o}, т.е. равен 45^{o}.

Ответ: 45^{o}.

Упражнение 16

В правильной треугольной пирамиде боковые ребра равны 1, а высота $\frac{1}{3}$. Найдите трехгранный угол при вершине этой пирамиды.



Решение: Указанные пирамиды разбивают правильный тетраэдр на четыре равные пирамиды с вершинами в центре O тетраэдра. Следовательно, 3-гранный угол при вершине пирамиды составляет одну четвертую часть угла в 360°, т.е. равен 90°.

Ответ: 90°.