Кафедра медицинской и биологической физики

Тема: Множества. Алгебра логики.

лекция № 4 для студентов 1 курса, обучающихся по специальности 030401– Клиническая психология

к.п.н., доцент Шилина Н.Г.

Красноярск, 2015

План лекции

- Теория множеств Понятие множества. Мощность множества.
- Множества чисел. Алгебраические операции над множествами.
- Множества и отношения. Нечёткие множества. Характеристическая функция.
- Операции над нечёткими множествами.
- Высказывания и высказывательные формы.
- Логические операции.
- Формулы логики высказывания. Логическая равносильность. Логическое следование. Нормальные формы формул.
- Булевы функции.
- Предикаты.

Значение темы

- Математические рассуждения позволяют правильно устанавливать причинно-следственные связи, математический язык формирует правильную и логическую речь. Каждый культурный (как минимум образованный) человек должен иметь представление об основных математических понятиях и идеях. Причем, речь идет именно о понятиях, а не о конкретных формулах.

Что такое множество? Чтобы определить какое-то понятие, нужно указать, частным случаем какого более общего понятия оно является.

Определение человека по Платону: человек есть бескрылая птица без перьев

Невозможно дать определение множества, потому что в математике более общего понятия, чем множество, нет.
Можно только проиллюстрировать понятие множества.
- множество студентов
- множество больных
- множество городов
- множество всех точек на данной окружности

Число элементов конечного множества называется его **мощностью**. Мощность множества *A* обозначают |*A*|. Пусть, например, *A* = {*a, b, c*}. Тогда |A|= 3.
Множества, содержащие одинаковое количество элементов или между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие, называются **равномощными**. И если множество *B* = {1,2,3}, то оно равномощно приведенному множеству *A*: |*A*|= |*B*| =3.

Если каждый элемент множества В является одновременно элементом множества А, то говорят, что множество В является подмножеством множества А. Записывается это так: $A \supset B$

Множество студентов КрасГМУ, например, является подмножеством множества студентов вузов г. Красноярска.

Множества *A* и *B* равны (запись *A*=*B*), если они содержат одни и те же элементы $A \supset B$ $B \supset A$

Пустое множество (обозначается Ø) не содержит ни одного элемента и является подмножеством любого множества.

При решении каждой конкретной задачи всегда есть множество, явно или неявно заданное, за пределы которого мы заведомо не выйдем. Такое множество называется **универсальным множеством**, или **универсумом**. Все участвующие в задаче множества являются подмножествами универсума. Мы будем обозначать его буквой U. Например, при исследовании множеств, составленных из студентов, универсумом будет множество всех студентов института, или множество студентов города, или множество студентов России – в зависимости от задачи.

Типы множеств:
Конечное множество
Бесконечное множество

Множество всех множеств: парадоксы определения
В деревне живут брадобрей, который бреет только тех, кто не бреется сам. Бреет ли брадобрей себя или нет?

Операции над множествами

Объединением множеств *A* и *B* (обозначается *AUB*) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *A* или *B*. Символически это записывается так:

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \; или \; x \in B\}$$

Пусть *A* – множество студентов факультета клинической психологии КрасГМУ, *B* – множество студентов–лечебников, *C* – множество студентов–педиатров, *D* – множество студентов–стоматологов, *E* –множество студентов–фармацевтов, *F* – множество студентов факультета МКиУЗ этого же университета. Объединением этих множеств будет множество: *G=AUBUCUDUEUF* и это будет множество всех студентов КрасГМУ.

Пересечением множеств *A* и *B* (обозначается *A*∩*B*) называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и *A*, и *B*:

$$A \cap B = \{x / x \in A \; и \; x \in B\} \qquad A \cap B = \{c, d\}$$

Если *A* = {*a, b, c, d*}, *B* = {*c, d, e,f*}, то $A \cap B = \{c, d\}$
Пусть *A* – множество студентов факультета клинической психологии КрасГМУ *B* – множество мужского населения на Земле; тогда *A*∩*B* – множество юношей на факультете клинической психологии.

Разностью множеств *A* и *B* (обозначается *A**B*) называется множество таких элементов множества *A*, которые не содержатся в *B*. Если *A* = {*a, b, c, d*}, *B* = {c*, d, e*}, то *A* \\ *B* = {*a, b*}, а *B* \\ *A* = {*e*}. Разность *C* множеств *A* и *B* иногда называется **дополнением** множества В до *A*.

Дизъюнктивной суммой, или симметрической разностью множеств (обозначается *A* ∆ *B*), называется множество всех элементов, принадлежащих или множеству *A,* или множеству *B,* но не обоим вместе. Если *A* = {*a, b, c, d*}, *B*={*c, d, e*}, то *A* ∆ *B* = {*a, b, e*}.

свойства операций над множествами

$A = A$

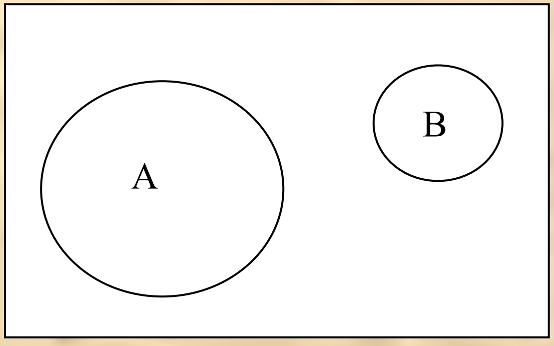
$A \square B = B \square A, \ A \square B = B \square A$ – *коммутитив ность*

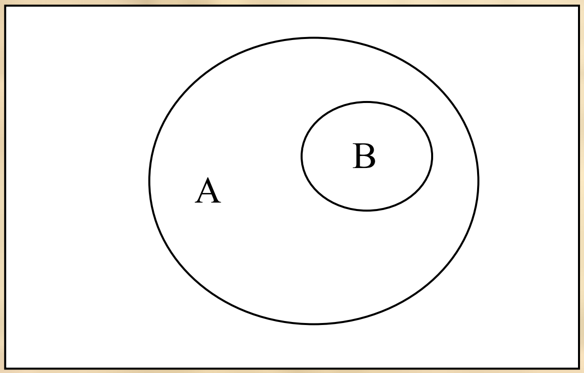
$\mathrm{A} \square (\mathrm{B} \square \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \square \mathrm{B}) \square \mathrm{C}, \quad \mathrm{A} \square (\mathrm{B} \square \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \square \mathrm{B}) \square \mathrm{C}$ - ассоциатив ность

$\mathrm{A} \square (\mathrm{B} \square \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \square \mathrm{B}) \square (\mathrm{A} \square \mathrm{C})$ - дистрибути вность

Графическое представление операций над множествами

Для наглядного изображения операций над множествами, содержащимися в каком–либо универсуме U, используют **диаграммы Венна.** Обычно универсум представляется прямоугольником (точнее, множеством точек прямоугольника), а множества изображают фигурами (как правило, кругами), лежащими внутри этого прямоугольника. Непересекающиеся множества изображаются неперекрывающимися областями, а включение одного множества в другое соответствует области, целиком располагающейся внутри другой





нечеткие множества (fuzzy sets)

Не всегда можно достоверно сказать, входит ли данный элемент в некоторое множество или нет.

Множество планет Солнечной системы: какие элементы оно включает?

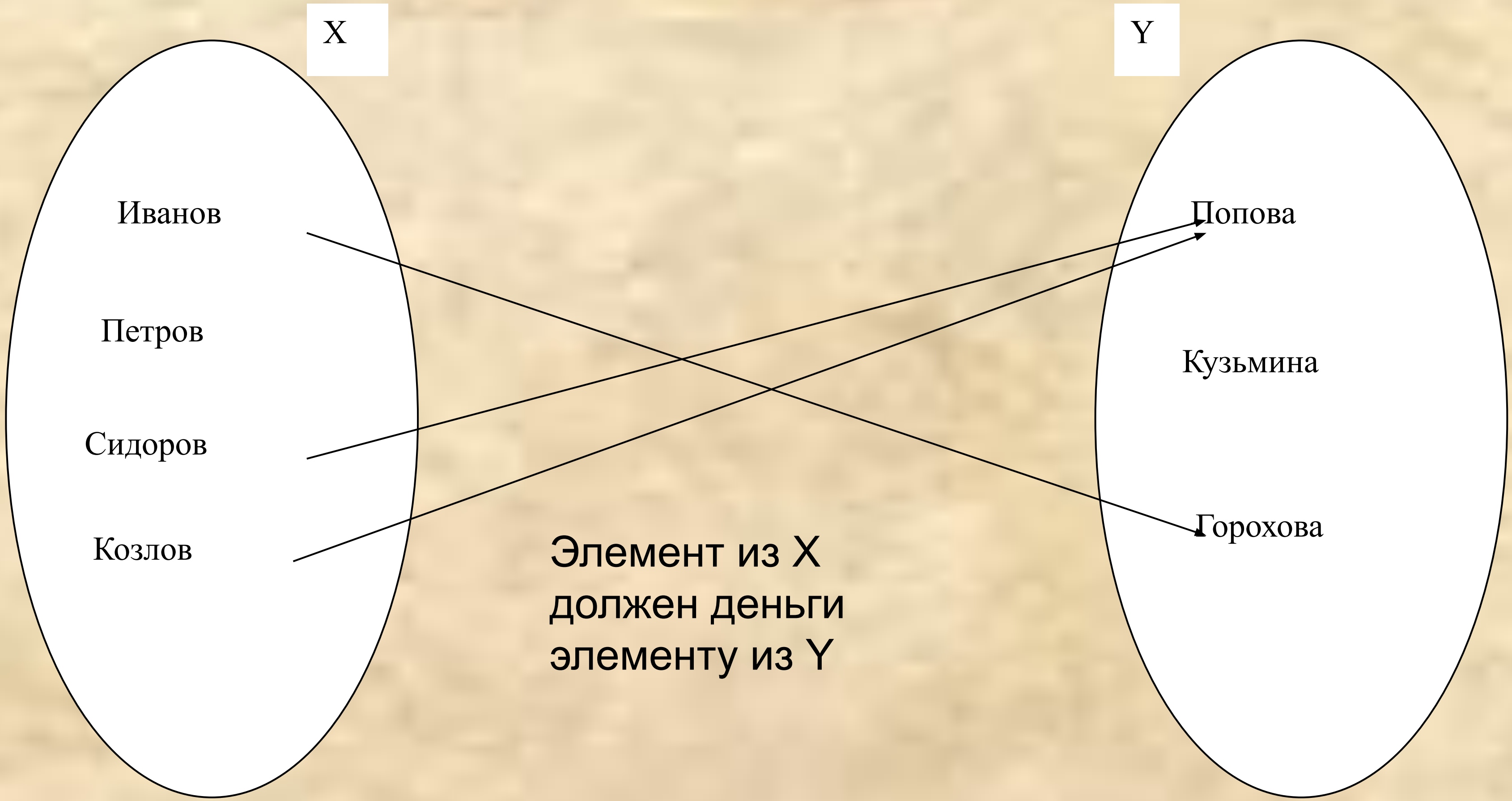
В нечетких множествах вводится функция принадлежности $\mu_A(a)$, значения которой заключены в отрезке от 0 до 1.

Если элемент a не принадлежит множеству A, то $\mu_A(a) = 0$. Чем ближе значение $\mu_A(a)$ к единице, тем больше степень принадлежности данного элемента a множеству.

Тогда множество A будет представлено совокупностью пар: $A = \{(a, \mu(a)), \{b, \mu(b)), (c, \mu(c)), \ldots\}$.

соответствия

Можно задать любое соответствие между некоторыми множествами *X* и *Y.* Для этого надо взять множество всевозможных пар (*x*, *y*) и отметить в нем подмножество *R*, состоящее из пар элементов, для которых данное соответствие имеет место.



Элемент из X
должен деньги
элементу из Y

Многие соответствия обозначаются специальными знаками, поставленными между элементами *x* и *y*. Например, соответствие «прямая *x* параллельна прямой *y*» обозначают $x||y$, а соответствие «больше или равно» знаком ≥. В общей теории соответствий пишут xRy, чтобы обозначить, что элементы *x* и *y* находятся в соответствии *R*.

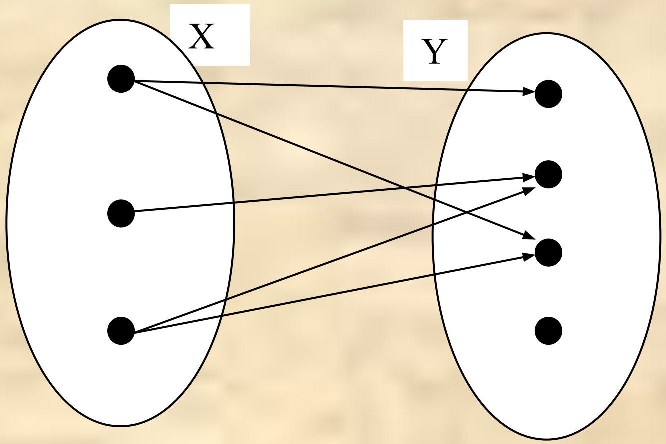
Пусть *R* – соответствие между множествами *X* и *Y* и *a* – элемент из *X*.

Образом этого элемента называется множество $R(a)$ всех $y \in У$, таких, что aRy.

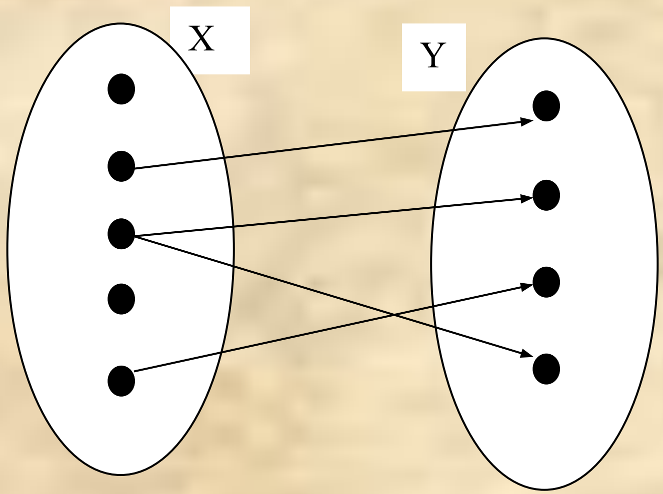
Прообразом элемента $b \in У$ при том же соответствии называется множество $R^{-1}(b)$ элементов $x \in X$ – таких, что xRb.

отношения на множестве *X*

Если область определения соответствия *R* совпадает областью отправления *X*, это означает, что для любого $a \in X$ найдется такое $y \in Y$, что aRy. В этом случае говорят, что соответствие *R* **всюду определено**.



Если соответствие задано графом и всюду определено, то из каждой точки множества X выходит хоть одна стрелка

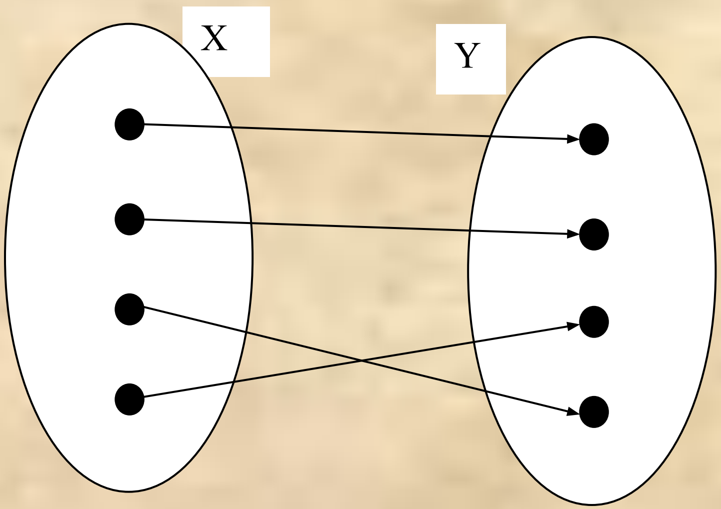


отношение называют сюръективным, если каждая точка множества Y является концом какой-нибудь стрелки

функция

Если при соответствии *R* образ каждого элемента $x \in X$ или пуст, или содержит лишь один элемент, то *R* называют **функциональным соответствием** или **функцией.** Всюду определенное функциональное соответствие называют **отображением** множества *X* в множество У.

Отношение R называют **биективным**, если оно является таким отображением *X* в У, что образ *X* совпадает с *Y* и никакие два элемента из *X* не переходят в один и тот же элемент из У, т. е. это взаимно однозначное соответствие между множествами.



Отношение «учиться в одной группе», определенное на множестве студентов КрасГМУ, разбивает все это множество на студенческие группы. Любой из студентов данной группы может служить представителем этой группы, а сама группа есть класс эквивалентности. Множество всех групп (не студентов этих групп, а, например, номеров групп) есть фактор–множество всех студентов КрасГМУ по данному отношению.

Такое разбиение множества на непересекающиеся подмножества лежит в основе всех классификаций. Например, в библиотеках множество всех книг разбивают на книги по математике, психологии, искусству и т.д., врачи делятся на терапевтов, хирургов, стоматологов, психотерапевтов и т. д.

Свойство антирефлексивности означает, что элемент множества не может сравниваться сам с собой.
Свойство транзитивности: если A > B и B > C, то A > C
Отношение *R* в множестве *X* называется **отношением строгого порядка**, если оно антирефлексивно, транзитивно и асимметрично. Примерами являются отношения «выше», «дальше», «тяжелее» и т. д.

Множество, в котором определено отношение строгого порядка, называют **упорядоченным.** Например, множество действительных чисел упорядочено отношением «меньше» или «больше». Кроме того, для любых двух различных чисел *x* и y, или $x > y$ или $y > x$. Отношение *R* в множестве *X* называется отношением **нестрогого порядка**, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Примерами являются отношения «не меньше», «не больше», «не выше».

Высказыванием называется любое повествовательное предложение, которому можно приписать истинностное значение (т.е. либо истина (И - 1), либо ложь (Л -0).

Например: «Январь – зимний месяц» – И, «Земля имеет форму куба» – Л.

Предложения, которые содержат хотя бы одну переменную и становятся высказываниями при подстановке вместо всех переменных их значений, называются высказывательными формами.

Например, «Утром я встретила соседей»; «Утром я встретила соседей из *X* квартиры»;

«Утром я встретила соседей из 20 квартиры».

Преобразование высказывательных форм в высказывания может быть осуществлено употреблением слов «любой» («каждый», «всякий») или «существует» («некоторые», «по крайней мере один»).

Например, «Студенты пришли на экзамен» – высказывательная форма; «Все студенты пришли на экзамен», «Каждый студенты на экзамене получил оценку» – высказывание.

- Высказывание, представляющее собой одно утверждение (истинное или ложное), называется элементарным высказыванием.
- Высказывание, образованное из элементарных с помощью логических связок, называется составным (или сложным).
- Образование составного высказывания из элементарных называется логической операцией.

Отрицание

Логическая операция, соответствующая логической связке «не» («Неверно, что») называется отрицанием.

Отрицание высказывания *X* обозначается $\overline{X}$ или ¬*X.*

X	$\overline{X}$
И	Л
Л	И

Конъюнкция

Логическая операция, соответствующая союзу «и» (или близким по смыслу союзам «а» и «но»), называется **конъюнкцией**. В результате конъюнкции получается высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба элементарных высказывания *Х* и *У* истинны. (X^Y) , читается X и Y, например 2<4 и 4<8 истинны, следовательно 2 <4 <8

X	Y	$X \wedge Y$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкция

Логическая операция, соответствующая союзу «или», называется дизъюнкцией.

В результате этой операции образуется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба составных высказывания ложны.

Союз «или» употребляется в смыслах:

1. Неразделительном. Например, в предложении «Для посещения врача надо взять талон или записаться по телефону». Понятно, что если вы одновременно возьмете талон и запишитесь, вас примут.
2. Разделительном. Например, «Сегодня меня пригласили в театр или в кино». Очевидно, что какое–то место останется не посещенным.

Дизъюнкция

X	Y	X v Y
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкция – это неразделительное «или».

Импликация

- Логическая операция, имеющая вид «если *X*, то *Y*», называется импликацией.
- Высказывание *X* именуется посылкой (или антецедентом – предшествующим по–латыни), *Y* – заключением (или консеквентом – последующим).
- В результате импликации получается высказывание, ложное тогда и только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно.

Импликация

X	Y	$X \to Y$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Логическими операциями никак не учитывается смысл высказываний; они рассматриваются как объекты, обладающие единственным свойством – быть истинными и ложными.

Например, фраза «Если курение полезно, то крокодилы летают» считается истинной, хотя оба элементарных высказывания, ее составляющие, – ложны.

Эквиваленция

- Логическая операция, соответствующая сложному союзу «тогда и только тогда, когда», «в том и только в том случае», «если и только если», называется эквиваленцией. В результате этой операции образуется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба составляющих его элементарных высказывания истинны или оба ложны.

Эквиваленция

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
И И	И Л	И Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Психолог может оказывать квалифицированную помощь тогда и только тогда, когда он получит диплом об окончании вуза

Приоритеты: отрицание; конъюкция; дизъюнкция; импликация; эквиваленция.

Для того чтобы из высказывания получить **формулу**, надо:

- выделить все элементарные высказывания и логические связки, образующие данное составное высказывание;
- заменить их соответствующими буквами и символами;
- расставить скобки в соответствии со смыслом данного высказывания.

- Например, есть предложение: «Если выучить теорию и решить контрольные задания, то хорошая оценка на экзамене обеспечена».
- Обозначим: *X* – «выучить теорию», *Y* – «решить контрольные задания», *Z* – «хорошая оценка обеспечена». Формула для этого высказывания выглядит: $(X \wedge Y) \to Z$.

Способ вычисления истинности формул

Пусть формула имеет вид: $(\overline{X} \vee \overline{Y}) \rightarrow \overline{Y}$

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \vee \overline{Y}$	$(\overline{X} \vee \overline{Y}) \rightarrow \overline{Y}$
И	И	Л	Л	Л	И
И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	Л
Л	Л	И	И	И	И

- Формулы F_1 и F_2 называются равносильными (обозначение $F_1 = F_2$), если при любых одинаковых истинностных значениях входящих в них переменных они принимают одинаковые значения истинности.
- Вместо термина «равносильность» можно использовать термин «логическая эквивалентность».
- Равносильность устанавливается сравнением таблиц истинности формул.

Основные равносильности

$X \equiv X$ – закон тождества

$X \wedge \overline{X} \equiv Л$ – закон противоречия

$X \vee \overline{X} \equiv И$ – закон исключенного третьего

$\overline{\overline{X}} \equiv X$ – снятие двойного отрицания

$X \wedge X \equiv X \quad X \vee X \equiv X$ – идемпотентность

$X \wedge Y \equiv Y \wedge X; \quad X \vee Y \equiv Y \vee X$ – коммутативность

$(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z); \ (X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z);$ – ассоциативность

$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z); \ X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ – дистрибутивность

$\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$, $\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$ – законы Де Моргана

$X \wedge \text{И} \equiv \text{X}$; $\text{X} \vee \text{Л} \equiv \text{X}$

$X \wedge \text{Л} \equiv \text{Л}$; $\text{X} \vee \text{И} \equiv \text{И}$ – сочленение переменной с константой

$X \wedge (X \vee Y) \equiv X$; $X \vee (X \wedge Y) \equiv \text{X}$ – законы поглощения

$(X \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee Y) \equiv Y$; $(X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge Y) \equiv Y$ – законы склеивания

$X \rightarrow Y \equiv \overline{X} \vee Y$; $X \rightarrow Y \equiv \overline{X \wedge \overline{Y}}$ – замена импликации.

- Закон тождества говорит, что высказывание не меняет своего истинностного значения на протяжении всего рассуждения, в котором это высказывание встречается.
- Закон противоречия устанавливает, что никакое высказывание не может быть истинным одновременно со своим отрицанием.
- Закон исключенного третьего утверждает, что для каждого высказывания имеются лишь две возможности: высказывание истинно или ложно, третьего не дано.
- Закон снятия двойного отрицания отмечает, что отрицать отрицание какого–либо высказывания – то же, что утверждать это высказывание.

- Закон идемпотентности говорит, что конъюнкция одинаковых высказываний равносильна одному из них; аналогично дизъюнкция одинаковых высказываний равносильна одному высказыванию.
- Закон коммутативности показывает, что и в конъюнкции, и в дизъюнкции высказывания можно менять местами.
- Закон ассоциативности устанавливает правила объединения высказываний в конъюнкциях и дизъюнкциях в группы с помощью скобок.
- Закон дистрибутивности объясняет правила раскрытия скобок и говорит, что по отношению к дистрибутивности конъюнкция и дизъюнкция совершенно «равноправны».

- Законы Де Моргана звучат так: «Отрицание конъюнкции равносильно дизъюнкции отрицаний; отрицание дизъюнкции равносильно конъюнкции отрицаний».
- Законы сочленения переменной с константой показывают, что получится в результате, если конъюнктивно или дизъюнктивно к переменной присоединить логическую константу (И или Л).
- Закон поглощения и закон склеивания предлагают комбинации, очень удобные при решении логических задач.
- Замена импликации дает возможность выразить импликацию через дизъюнкцию и отрицание либо через конъюнкцию и отрицание.

- Пусть некоторое утверждение имеет вид импликации $X \to Y$. Например, «Если вы замкнутый и мнительный человек *(X)*, то люди не стремятся к контакту с вами *(Y)*».
- Предложение $X \to Y$ называется прямым (исходным) утверждением, предложение $Y \to X$ – обратным утверждением
- Если импликация $X \to Y$ истинна, то утверждение $X \to Y$ называется теоремой, X называется достаточным условием для Y, а Y – необходимым условием для X или следствием X; говорят, что в этом случае имеет место логическое следование $Y \to X$.

- Истинность *X* гарантирует истинность *Y* , а ложность *X* ни о чем не говорит.
- Ложность *Y* гарантирует невыполнение условия, а истинность *Y* ничего не говорит об истинности *X.*

На основе равносильностей сложные выражения приводятся к более простому виду – так называемой дизъюнктивной (или конъюнктивной) нормальной форме (сокращенно: д.н.ф. и к.н.ф.).

- Дизъюнктивная нормальная форма представляет собой дизъюнкцию конъюнкций переменных и их отрицаний либо конъюнкцию самих переменных. Например,

  $X \wedge \overline{Y} \vee \overline{X} \vee \overline{Z}$, $A \wedge B \wedge \overline{C}$ – д.н.ф.

- Конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция дизъюнкций переменных и их отрицаний либо дизъюнкция самих переменных. Например,

  $\overline{A} \vee B \vee C, (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B \vee C)$ – к.н.ф.

- Теорема 1. Любую формулу (любое высказывание) можно привести к д.н.ф.
- Теорема 2. Любая формула может быть представлена в к.н.ф.

Булевы функции

- Если множество значений функции представляет собой двухэлементное множество {И,Л}, то такие функции называются булевыми функциями.

A	B	$(A \vee B) \rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Булевы функции представляются в двух видах:

- совершенной дизъюнктивной нормальной (с.д. н.ф.). Характерным для нее является то, что каждый дизъюнктивный член является произведением всех исходных переменных (с отрицанием или без него).
- совершенной конъюнктивной нормальной (с.к. н.ф.) и является конъюнкцией дизъюнкций, содержащих все исходные переменные (с отрицанием или без него).

Предикаты

- Функция, все значения которой принадлежат множеству {И,Л}, называется предикатом.
- Буквы *P, R* и т.д., обозначающие предикаты, называются предикатными символами.

Способы задания предикатов:

- с помощью высказывательной формы
- с помощью формулы, т. е. заданием интерпретации предикатного символа
- с помощью таблицы. Такой способ годится только для предикатов, область определения которых – конечное множество. Областью определения предиката может быть любое множество. Если же предикат при каком–нибудь наборе входящих переменных теряет смысл, то принято считать, что этому набору соответствует значение Л.

- Если предикат содержит одну переменную, он называется одноместным, если две переменные – двухместным и т. д. Предикат с *n* различными переменными называется n-местным предикатом.
- Упорядоченной n-кой («энкой») называется совокупность n не обязательно различных объектов вместе с заданным порядком их расположения.
- Две упорядоченные n-ки считаются равными, если их компоненты и порядок их расположения совпадают. Например, (Темпалгин, Пенталгин, Анальгин) и (Пенталгин, Темпалгин, Анальгин) – различные упорядоченные тройки.

- Предикату *P*, заданному на множестве *M*, соответствует подмножество этого множества, состоящее из тех и только тех элементов *M*, которым соответствует значение И предиката *P*. Это подмножество *M* называется множеством истинности предиката *P*. Множество истинности предиката *P* обозначается через P^*. При этом $P^* \subset M$.
- Если множество истинности совпадает со всей областью определения предиката, то такой предикат называется тождественно истинным. Если же множество истинности пусто, предикат называется тождественно ложным.

- Множество элементов, обладающих свойством *P*, называют объемом данного свойства.
- Рассмотрим некоторое непустое множество *U*. Пусть на этом множестве задано свойство *P*, т. е. выделено подмножество $P^* \subset U$; тогда имеем разбиение *U* на два подмножества: P* и $U \setminus P^*$. Такое разбиение называется классификацией множества *U* по основанию *P*.
- Второе подмножество ($U \setminus P^*$) характеризуется свойством, отрицающим $P(x)$, т.е. свойством

$$\overline{P}(x)$$

Правила классификации

- пересечение любых двух классов пусто;
- объединение всех классов равно множеству, элементы которого классифицируются.

С помощью одноместного предиката удобно выражать свойства, а многоместными предикатами выражаются отношения.

Кванторы

- Если *P*(*x*) означает, что *x* обладает свойством *P,* то посредством $\forall x P(x)$ обозначает утверждение «Для всякого объекта *x* свойство *P* выполнено» или «Все *x* обладают свойством *P*». Запись $\exists x P(x)$ будет означать, что «существует *x*, обладающий свойством *P*».
- квантор всеобщности – $\forall x$
- квантор существования – $\exists x$.

Никакое высказывание не может быть истинным одновременно со своим отрицанием – это закон

1. противоречия
2. коммутативности
3. ассоциативности
4. дистрибутивности

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

- Обязательная:
- Кричевец, А.Н. Математика для психологов /А.Н. Кричевец, Е.В. Шикин, А.Г. Дьячков. – М.: Флинта: НОУ ВПО «МПСИ», 2010.– 376 с.
- Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных/А.Д. Наследов.- СПб.: Речь, 2008.
- Дополнительная:
- Математика в примерах и задачах: учебное пособие /Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В.Никонова и др. – М.: ИНФРА–М, 2011. –373 с.
- Болдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В. Высшая математика /К.В. Болдин К, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – М.: Флинта, 2010
- Электронные ресурсы:
- УБИЦ КрасГМУ Портал центра дистанционного образования Электронная библиотека
- Ресурсы интернет

Красноярский Государственный Медицинский Университет им. проф. В.Ф.Войно-Ясенецкого

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ