МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭМФ 1 семестр

Основы теории множеств
Пределы

Непрерывность функций

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Первообразные (неопределенный интеграл)

Определенный интеграл

Д.ф.-м.н. профессор
Филатов В.В.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т.1-2
Ильин В.А., Позздняк Э.Г. Основы математического анализа, т.1-2
Никольский С.М. Курс математического анализа т.1-2

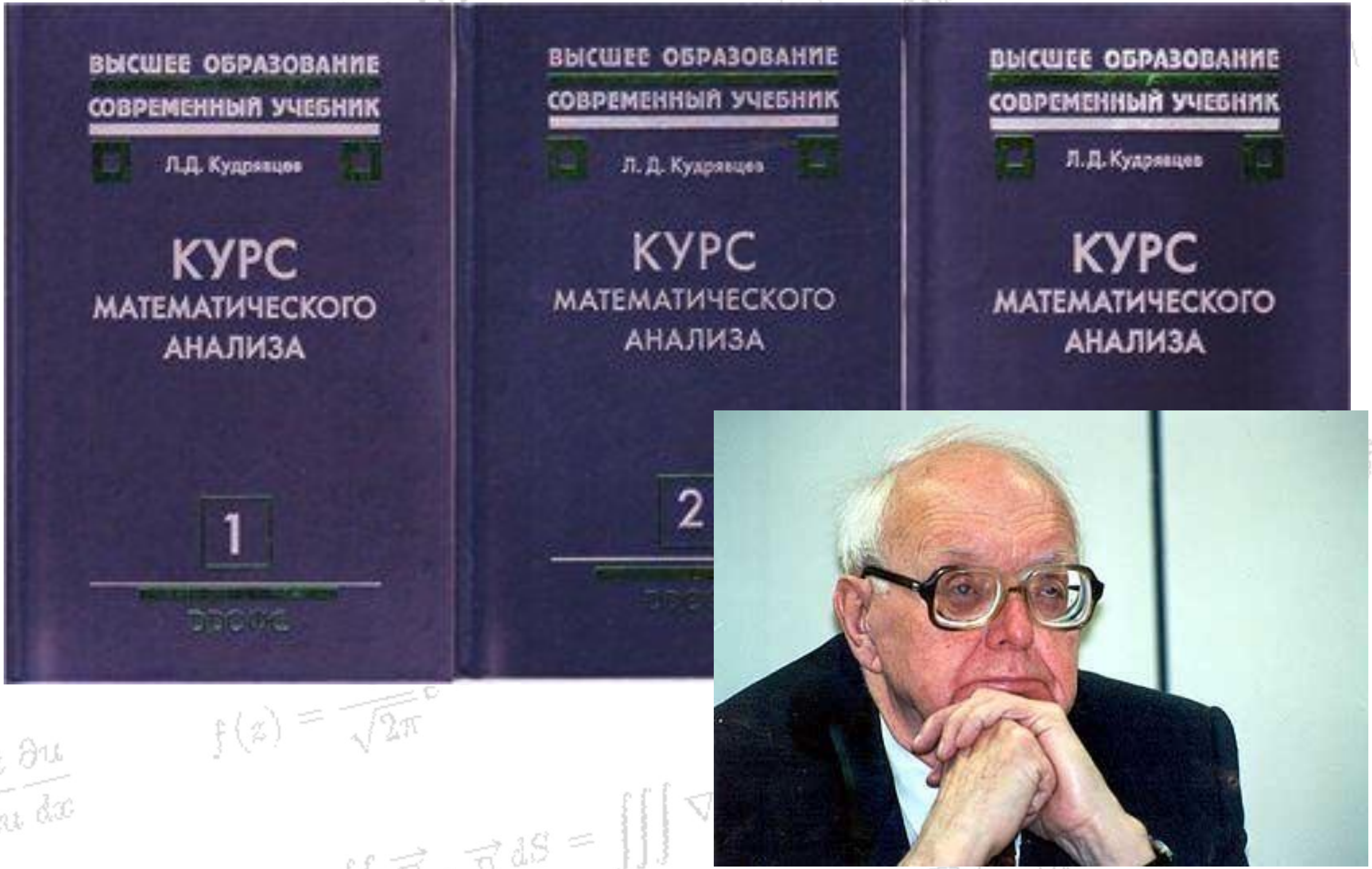
Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике ч.1-2

Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа

Математический анализ в примерах и задачах (Учебник НГТУ)

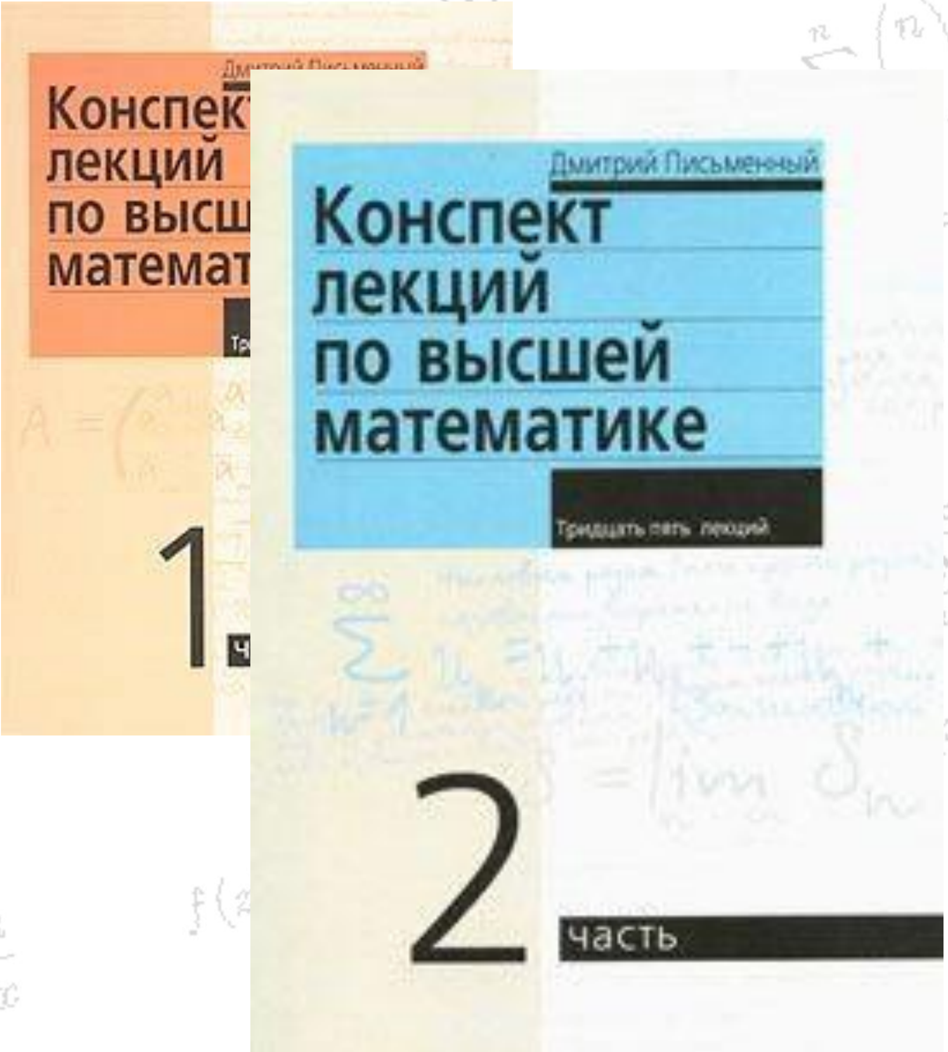
Типовые расчеты 1,2, 3

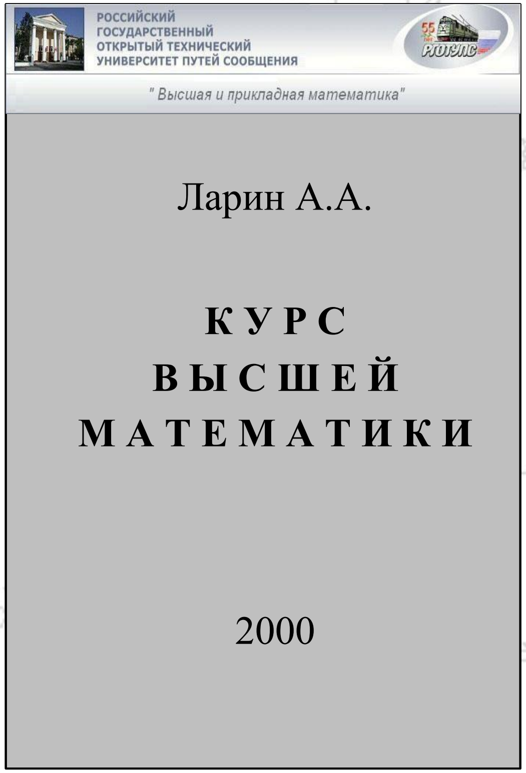
Учебные пособия




ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
СОВРЕМЕННЫЙ УЧЕБНИК
Я.С. Бугров
С.М. Никольский
ВЫСШАЯ
МАТЕМАТИКА
3
дрофа


В.А. ИЛЬИН
В.А. САДОВНИЧИЙ
Бл. Х. СЕНДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ


Дмитрий Письменный
Конспект лекций по высшей математике
Тридцать пять лекций
2
часть



http://alexlarin.narod.ru/kvm.html

Изучение математики

- совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует ее, приучает человека логически рассуждать, воспитывает точность и обстоятельность аргументации;

- позволяет не загромождать исследование ненужными подробностями, не влияющими на сущность дела, и, наоборот, не пренебрегать тем, что имеет принципиальное значение для существа изучаемого вопроса;

- развивает умение логически мыслить, владение математическим аппаратом, правильное использование которого дает в руки человека мощный метод исследования и большую экономию мышления.

.

1. МНОЖЕСТВА

Логические символы.

- □- знак принадлежности
- □- квантор всеобщности
- □- квантор существования
- □- знак логического следования
- □- символ эквивалентности
- ∧ - символ конъюнкции (и)
- ∨- символ дизъюнкции (или)

($a \in A$)

($\forall x \in M$)

($\exists x \in M$:)

($a \Rightarrow b$)

$$\forall \Delta ABC : AC = BC \Rightarrow \angle A = \angle B$$

Множества. Способы задания.

$A \overset{def}{=} \{a,b,c,d\}$ $\qquad A = \{x \mid P(x)\}$;

{a};- одноэлементное множество;

□ - пустое множество

Действительные корни уравнения $x^2+1=0$ образуют пустое множество

□ множества конечные и бесконечные.

Множество характеризуется мощностью

Если **A** - конечное множество, то мощность множества □**A**□

– это число его элементов.

Отношения между множествами.

- **Определение 1.1.** Множества **A** и **B** называются **равными**, если каждый элемент множества **A** является элементом множества **B** и, наоборот, каждый элемент множества **B** является элементом множества **A**.
- Обозначают **A=B**.

Пример:

$$A = \{x \in \mid (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) = 0\},$$

$$B = \{x \in N \mid x < 4\}.$$

$$A = B$$

Свойства равенства:

- **A=A** (рефлексивность);
- **A=B, B=C □ A=C** (транзитивность);
- **A=B □ B=A** (симметричность).
- **Неравенство** множеств обозначают
- **A □ B.**

Определение 1.2.

- Множество **A** **(A □ □)** называется **подмножеством** множества **B** **(B □ □)**, если каждый элемент множества **A** является элементом множества **B**.

- **Обозначение: A □ B □ □ a □ A □ a □ B.**
- Если **A □ B** и **A □ B □ A □ B.**

Примечание

Пустое множество является подмножеством любого множества

Операции над множествами.

- **V** – основное или универсальное множество.
- 1) В планиметрии **V =$\mathbf{R}^2$**
- 2) Для функций действительной переменной **V = R**.

- **Определение 1.3. Объединением** множеств **A** и **B** называется множество **A □□ B**, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств **A** или **B** (или обоим одновременно).

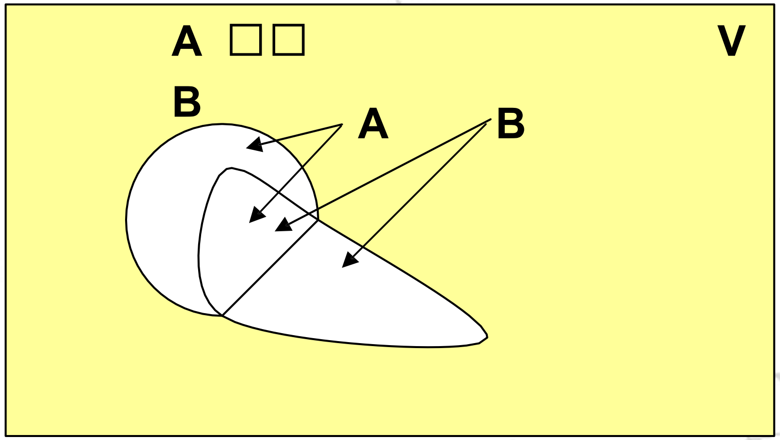
$$A \square B \overset{def}{=} \{ x \mid x \in A \vee x \in B \vee (x \in A \wedge x \in B) \}$$

- ***Пример:*** **A = {2,3,4,6}, B = {1,2,3,4,5,6} □ A□□B = {1,2,3,4,5,6}.**

Один из величайших математиков петербургской академии **Леонард Эйлер** (1707–1783) за свою долгую жизнь написал более 850 научных работ. В одной из них появились круги, которые “очень подходят для того, чтобы облегчить наши размышления”. Эти круги и назвали *кругами Эйлера*.

Джон Венн (*John Venn*; 4 августа *1834*, Халл (Йоркшир) — 4 апреля *1923*, Кембридж) — английский *логик* и философ

Диаграмма Эйлера-Венна



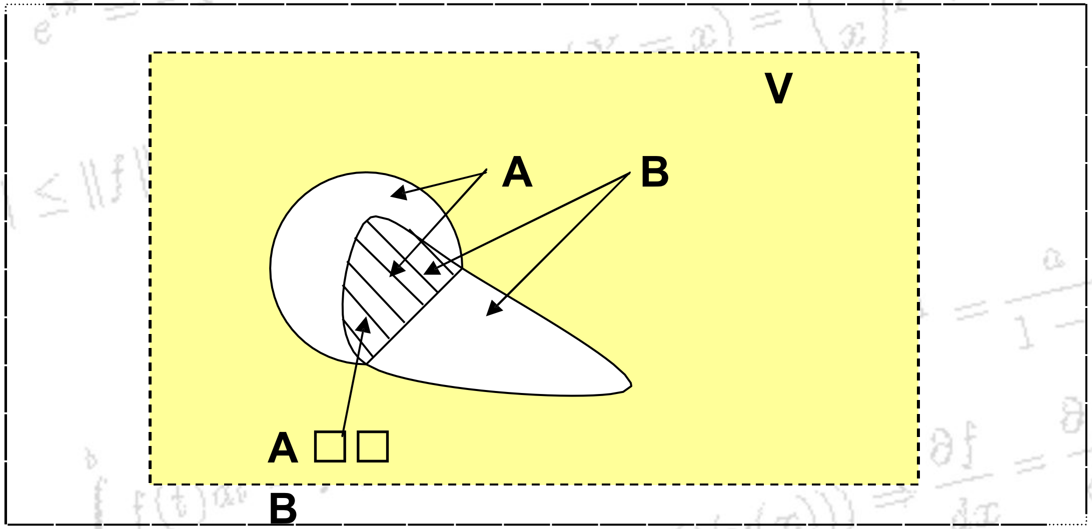
Свойства объединения множеств.

- **1) A □□ B = B □□ A** (**коммутативность**),
- **2) A □□ (B □□ C) = (A □□ B) □□ C** (**ассоциативность**).
- Очевидно
- **A □□ A = A,** **A □□ □ =A,** **A □□ V = V.**

Определение 1.4.

- **Пересечением** множеств **A** и **B** называется множество **A □□ B**, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно.
- **A □□ B = { x □ x □ A □ x □ B }.**

Диаграмма Эйлера-Венна



Свойства пересечения множеств.

- **1) A □□ B = B □□ A** (коммутативность),
- **2) A □□ (B □□ C) = (A □□ B) □□ C** (ассоциативность).
- Очевидно что **A □□ A = A, A □□ □ = □, A □□ V = A.**

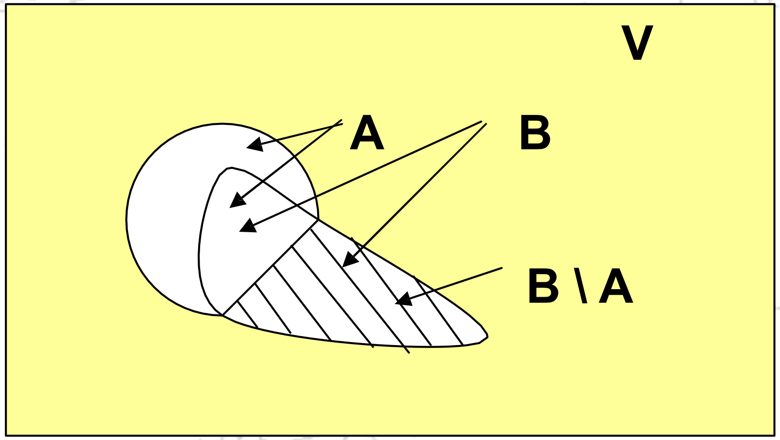
- Операции объединения и пересечения подчиняются дистрибутивным законам:
- **A □□ (B □□ C) = (A □□ B) □□ (A □□ C),**
- **A □□ (B □□ C) = (A □□ B) □□ (A □□ C).**

Определение 1.5.

- Разностью двух множеств **B** и **A** называется множество **B \ A**, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат **B,** но не принадлежат **A.**

- **B \ A = { x □ x □ B □ x □ A }.**

Диаграмма Эйлера-Венна



Определение 1.6.

- Разность **V \ A** называется **дополнением** множества **A** до
- универсального множества **V** и обозначается $\overline{A}$

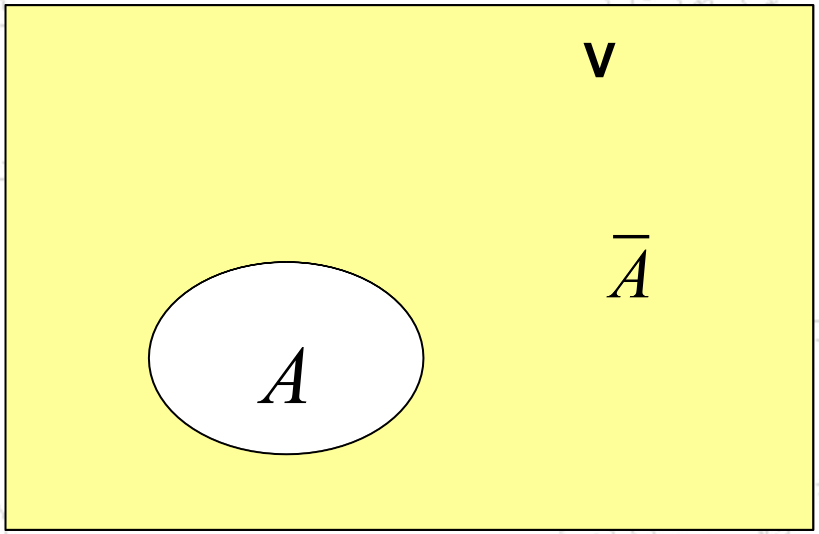
- ***Примеры:***

$$\overline{A} \overset{def}{=} V \setminus A = \{x \mid x \notin A\};$$

$$A \cup \overline{A} = V; \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing; \qquad \overline{\overline{A}} = A;$$

$$\overline{\varnothing} = V; \qquad \overline{V} = \varnothing.$$

Диаграмма Эйлера-Венна



Определение 1.7.

- Пара элементов **(x ; y), x □ A, y □ B** называется **упорядоченной,** если указан порядок записи элементов **x** и **y.**

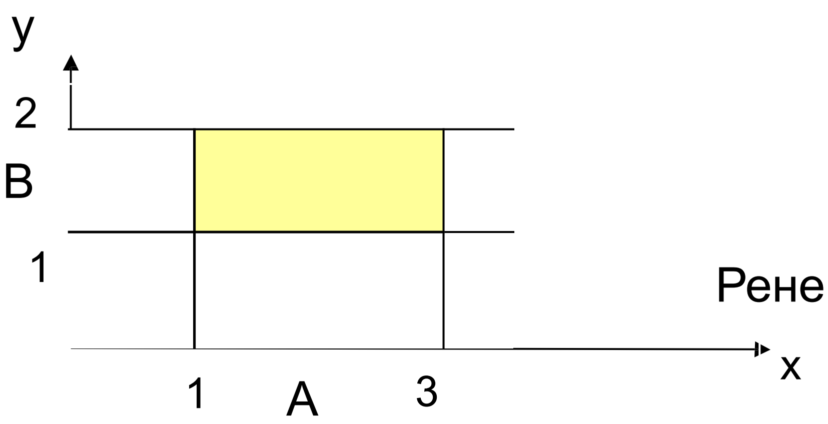
- Считается, что

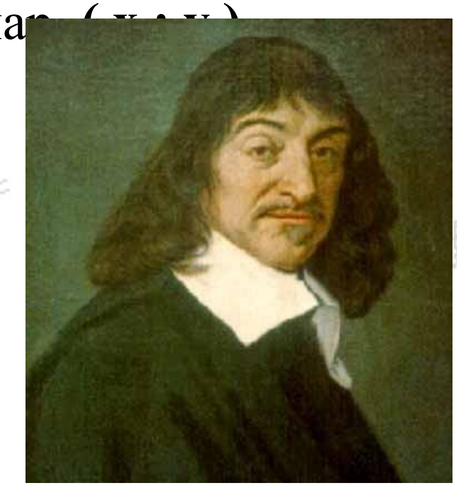
$$(x_1; y_1) = (x_2; y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \; y_1 = y_2.$$

Определение 1.8.

- Декартовым или прямым произведением двух множеств **A** и **B** называется множество, обозначаемое **A □ B**, состоящее из всевозможных упорядоченных пар (x ; y)

- **A □ B = { (x ; y) | □ x □ A ,**
□

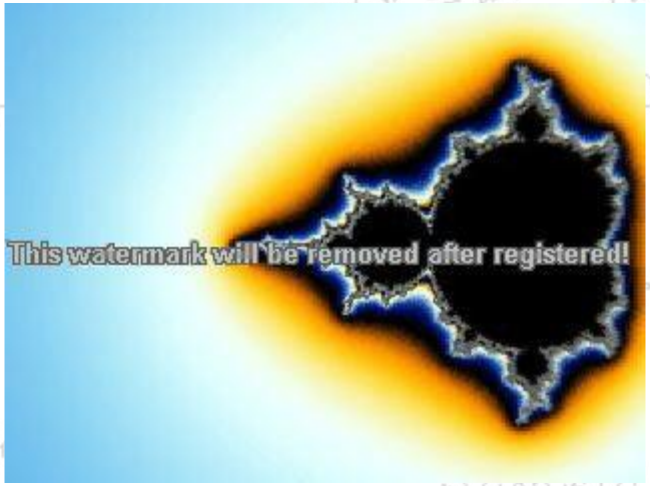


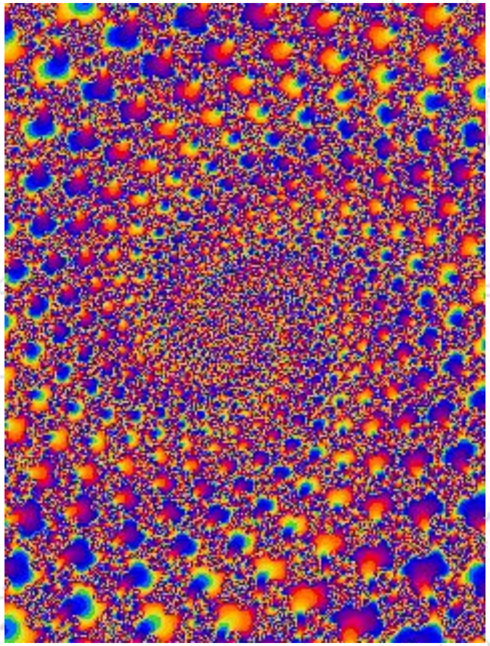


Рене Декарт(Rene Descartes)

Несколько приятелей встретились на вокзале, чтобы поехать за город в лес. При встрече все они поздоровались друг с другом за руку. Сколько человек поехало за город, если всего было10 рукопожатий?

Множество Мандельброта





Отображение множеств. Эквивалентность множеств.

- Пусть **A** и **B** - произвольные множества.
- Пусть ***f*** - закон (правило) по которому □ **a** □ **A** □ **b** □ **B**.
- Говорят, что задано **отображение** ***f*** **A** в **B** или оператор ***f*** **A** в **B.**
- Обозначение: ***f*** **: A** □ **B**

  или

$$A \xrightarrow{f} B \text{ .}$$

b – **образ** элемента ***a*** (обозначают ***f***(***a***));
a – **прообраз** элемента ***b*** = ***f*** $^{-1}$ (***a***).

Определение отображения:

- ***f*** **: A □ B □ □ *a* □ A □ *b* □ B : *b* = *f* (*a*).**

- Множество образов всех элементов ***a*** **□ A** при отображении **f** называют **образом множества** **A** при этом отображении и обозначают:

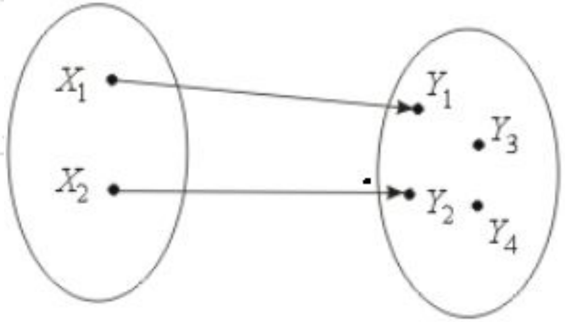
- ***f*(A)={ f(*a*) | *a*□A } □ B.**

- Задание отображения – это задание тройки **(A, f, B).**

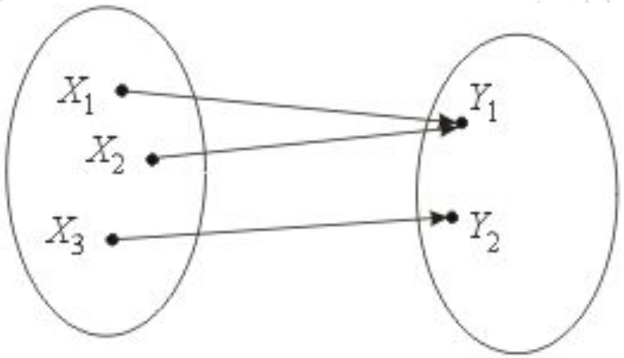
Множество упорядоченных пар *(x, f(x))* - **график** отображения

Определение 1.9

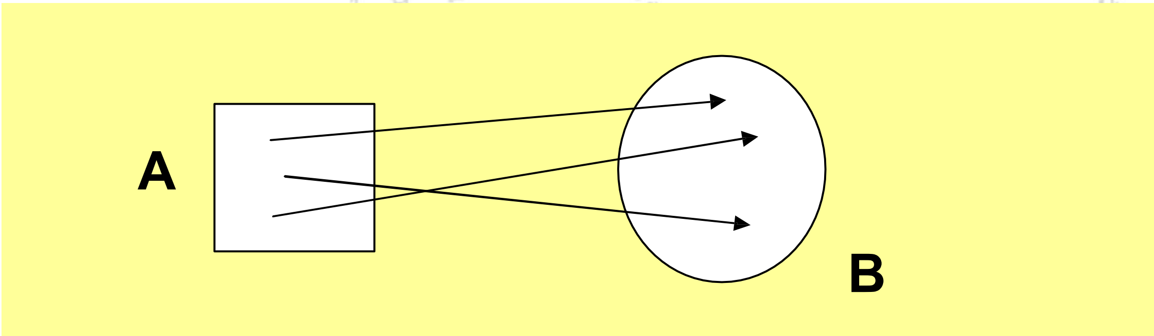
Отображение называется **инъекцией,** если для любых элементов x_1, $x_2 \in X$, для которых $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$



Сюръекцией (или отображением "на") называется отображение, при котором $f(X) = Y$



Биекция – это одновременно и сюръекция и инъекция, т.е., отображение **f : A □ B** называют биективным или взаимно однозначным, если каждый элемент **b □ B** является образом только одного элемента **a □ A.**



- ***f*** – взаимно однозначное отображение □ □ ***b*** □ **B** □ ***a*** □ **A :** $\boldsymbol{b = f(a)}$

$$\forall\, a_1, a_2 \in A \;\; a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

- Если ***f*** - взаимно однозначное отображение, то можно говорить
- об обратном отображении.

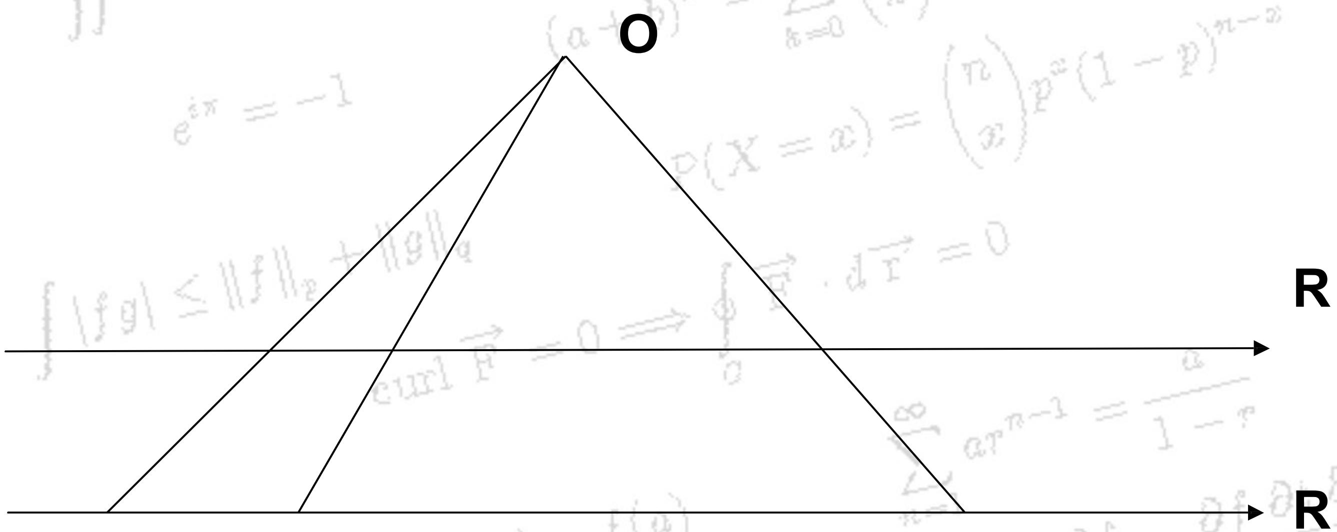
Определение 1.10.

Отображение f^{-1} : B→A называется обратным к отображению ***f*** : A→B **,** если каждому элементу ***b*** □**B** ставится в соответствие единственный элемент а □ **A,** образом которого при отображении ***f*** является ***b***

$$f^{-1}: B \to A \Leftrightarrow \forall b \in B \ \exists^{1} a \in A : a = f^{-1}(b)$$

.

Пример:



$f: R \to R$

Определение 1.11

Два множества **A** и **B** называются **эквивалентными** (равномощными), если существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое.

Свойства эквивалентности:

1) **A □ A □ A** (рефлексивность);

2) **A □ B □ B □ A □**
A, B □ **A,** (симметричность);
(транзитивность).

3) **A □ B, B □ C □ B, C**
A □ C

Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются ***числовыми***.

Примерами числовых множеств являются:
N = {1; 2; 3; ...; n; ... } - множество натуральных чисел;
Z = {0; ±1; ±2; ...; ±n; ...} - множество целых чисел;
Q = {m/n ; $m \in Z$, $n \in N$}- множество рациональных чисел. R - множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

N □ Z □ Q □ R.

- **Множество натуральных чисел N.**
- **N = {1, 2, 3, …}.**
- Свойства:
- 1) $\forall n_1, n_2 \in N \Rightarrow n_1 + n_2 \in N,\ n_1 \cdot n_2 \in N$
- выполняются: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность;
- 2) деление и вычитание не определены;
- 3) **1 □ N;**
- 4) **n □ N □ n + 1 □ N;**
- 5) если **M □ N, 1 □ M, n □ M** и **(n + 1) □ M,** то **M = N** (аксиома индукции);

Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел называется **счетным.**

Если множество счетно, то его элементы можно занумеровать.

Мощность счетного множества обозначают буквой *c*.

Множество целых чисел Z

Z = { …, -2, -1, 0, 1, 2, …}.

Свойства:

Определены операции сложения, умножения, вычитания; Не определено деление;

Z – упорядоченно, т.е. имеет место

$$p_1 < p_2 \vee p_1 = p_2 \vee p_1 > p_2;$$

Z – счетно и бесконечно;

N □ Z □ Q.

Множество рациональных чисел Q.

Q = { q = p / n | p □ Z , n □ N }.

Свойства:

Определены все арифметические операции;

Q – упорядоченно;

Q – плотно, т. е.

$$\forall q_1, q_2 \in Q \ \exists q \in Q: q_1 < q < q_2 .$$

Q – счетно и бесконечно;

N □ Z □ Q □ R.

Множество действительных чисел R.

- Свойства:
- **R** – упорядоченно;
- **R** –бесконечно;

Множество R *плотное:* между любыми двумя различными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел x, т. е. чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$.

Множество R непрерывное.

Пусть множество R разбито на два непустых класса *A* и *B* таких, что каждое действительное число содержится только в одном классе и для каждой пары чисел *a* □ *A* и b □ *B* выполнено неравенство $a < b$.

Тогда **(свойство непрерывности)** существует единственное число с, удовлетворяющее неравенству

$$a \leqslant c \leqslant b \ (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

Оно отделяет числа класса *A* от чисел класса *B*, Число *c* является либо наибольшим числом в классе *A* (тогда в классе *B* нет наименьшего числа), либо наименьшим числом в классе *B* (тогда в классе *A* нет наибольшего).

Это позволяет установить *взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой*

Последовательности

Определение 1.12

Пусть каждому натуральному числу n=1, 2, ... приведено в соответствие в силу некоторого закона число x_n. Тогда говорят, что этим определена ***последовательность чисел*** $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ или, короче, ***последовательность*** $\{x_i\}$

Отдельные снабженные номерами *n* (***индексами***) числа x_n называют *элементами последовательности* $\{x_i\}$. Они могут быть действительными или комплексными. Мы рассматриваем случай, когда они действительны.
Для разных *n* отдельные элементы последовательности могут оказаться равными как числа $(x_i = x_j)$ Однако x_i, x_j рассматриваются как разные элементы последовательности.

Примеры последовательностей:

1) $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

2) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$,

3) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\right\}$,

4) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right\}$,

5) $\left\{1 + \frac{1}{10^n}\right\} = \{1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001;\ \ldots\}$,

6) $\{(-1)^n\} = \{-1, +1, -1, \ldots\}$,

7) $\{1;\ 2;\ \ldots;\ 10;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots\}$.

В случае 7) не видно, как написать общую формулу для произвольного элемента x_n, однако закон образования чисел x_n ясен:

$$x_n = \begin{cases} n & (n = 1, \ldots, 10), \\ \dfrac{1}{10^{n-10}} & (n = 11, 12, \ldots). \end{cases}$$

Определение 1.13

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной,*** если существует такое число $M > 0$, что для любого n □ N выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant M.$$

В противном случае последовательность называется ***неограниченной.***

Легко видеть, что последовательности *2,3,4* ограничены, а *1*— неограничена

Определение 1.14

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей (неубывающей),*** если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} \geq x_n)$.

Аналогично определяется ***убывающая (невозрастающая)*** последовательность.

Все эти последовательности называются **монотонными**

Предел последовательности

Метод пределов есть основной метод, на котором базируется математический анализ

Можно заметить, что члены последовательности

$$u_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}.$$

неограниченно приближаются к числу 1.

.

В этом случае говорят, что последовательность u_n стремится к пределу 1

Определение 1.14

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$ если для любого положительного числа □ найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$$

или $x_n \to a$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный числу a (или x_n стремится к a). Говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к* a.

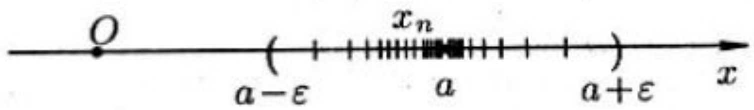
Геометрический смысл определения предела последовательности.

Неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

равносильно неравенствам $-\square < x_n - a < \square$ или $a - \square < x_n < a + \square$, которые показывают, что элемент x_n находится в $\square$ -окрестности точки *a*.

Поэтому определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число *a* называется пределом последовательности $\{x_n\}$ если для любой ε-окрестности точки *a* найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε-о



Ясно, что чем меньше ε, тем больше число *N,* но в любом случае внутри ε-окрестности точки а находится бесконечное число членов последовательности, εа вне ее может быть лишь конечное их число.

Отсюда следует, что ***сходящаяся последовательность имеет только один предел***.

Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся.***

Таковой является, например, последовательность x_n=n^2+1