Множества. Натуральные числа

Козлов Александр Иванович

Понятие множества

Множество — это совокупность объектов, называемых элементами множества.

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$B = \{\text{пирамида Хеопса, висячие сады Семирамиды, статуя Зевса в Олимпии, храм Артемиды в Эфесе, мавзолей в Галикарнасе, колосс Родосский, Александрийский маяк}\}$$

Понятие принадлежности

В общем случае запись

$$a \in S$$

означает, что объект a — элемент множества S.
Часто говорят, что a **принадлежит множеству** S.

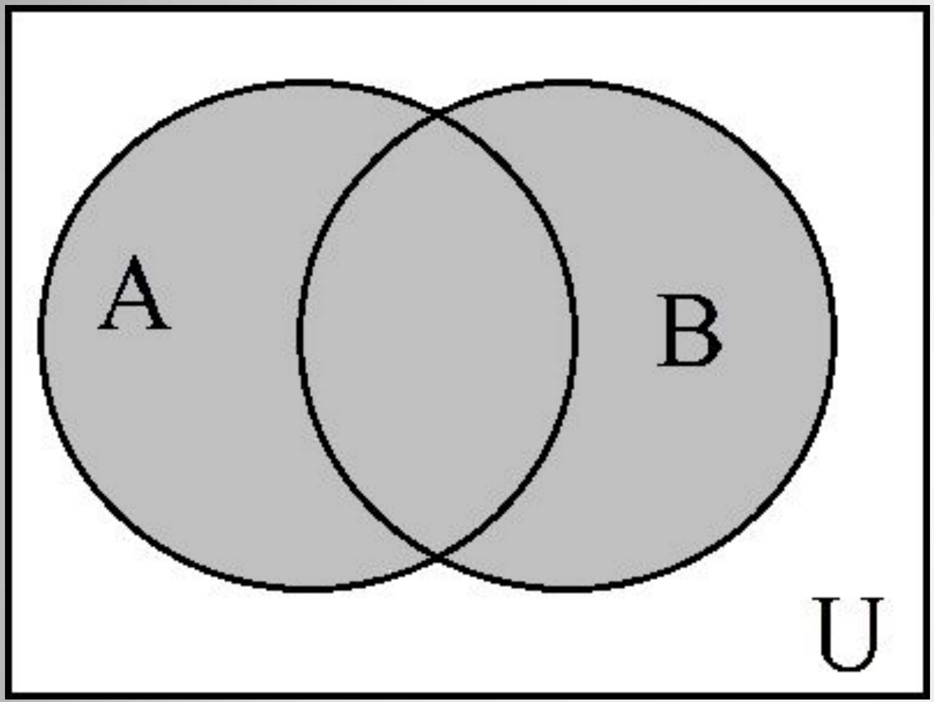
Если объект *a* **не принадлежит** S, то пишут:

$$a \notin S$$

$$13 \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$\text{Йошкин кот} \notin \text{Семь чудес света}$$

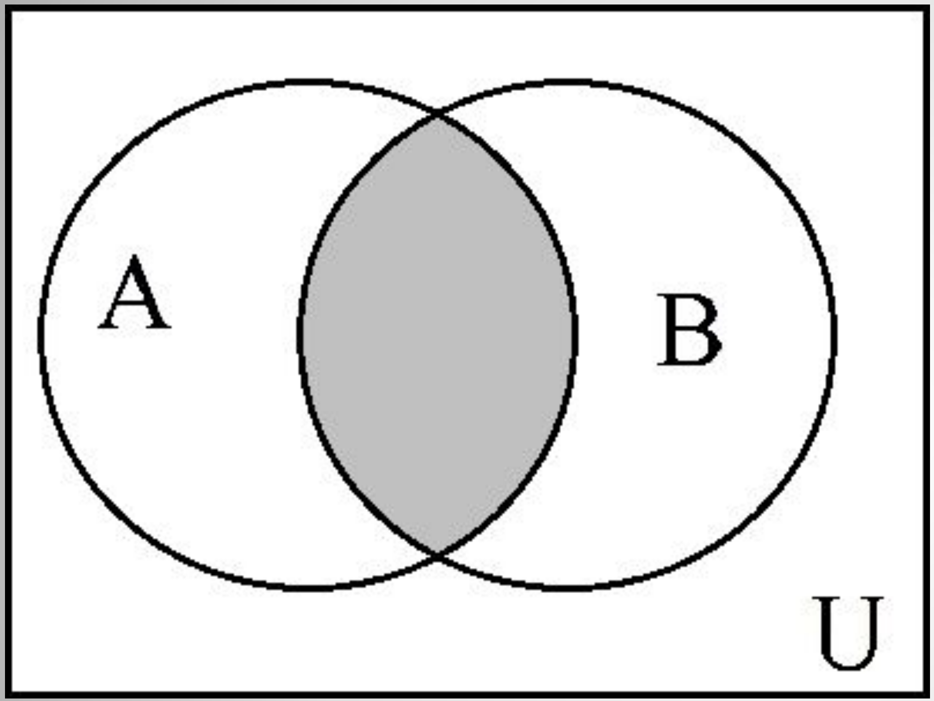
Операции над множествами



$A \cup B$

Объединение множеств

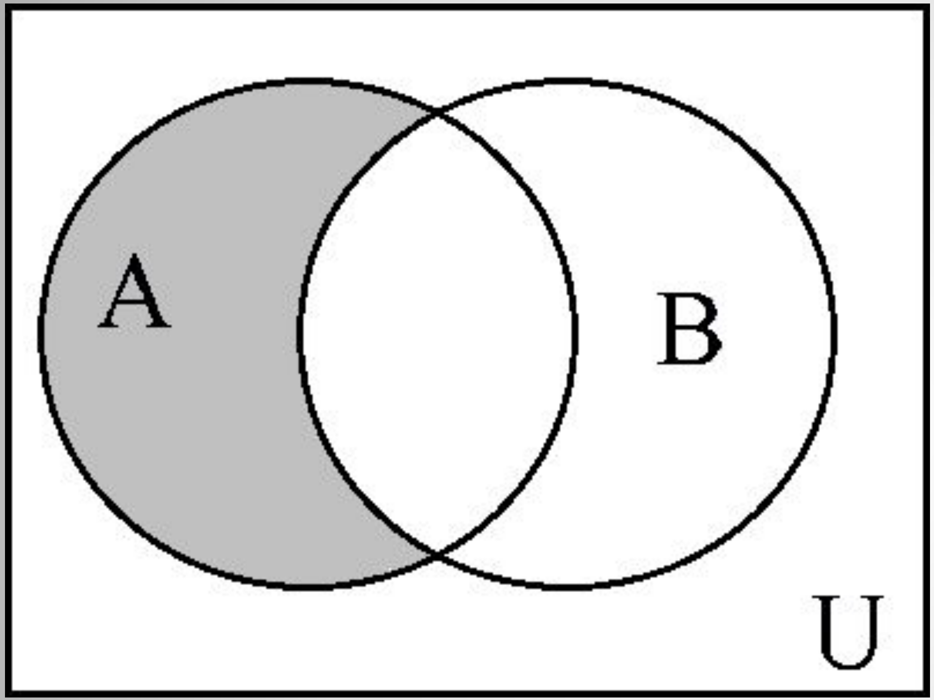
Операции над множествами



$$A \cap B = AB$$

Пересечение множеств

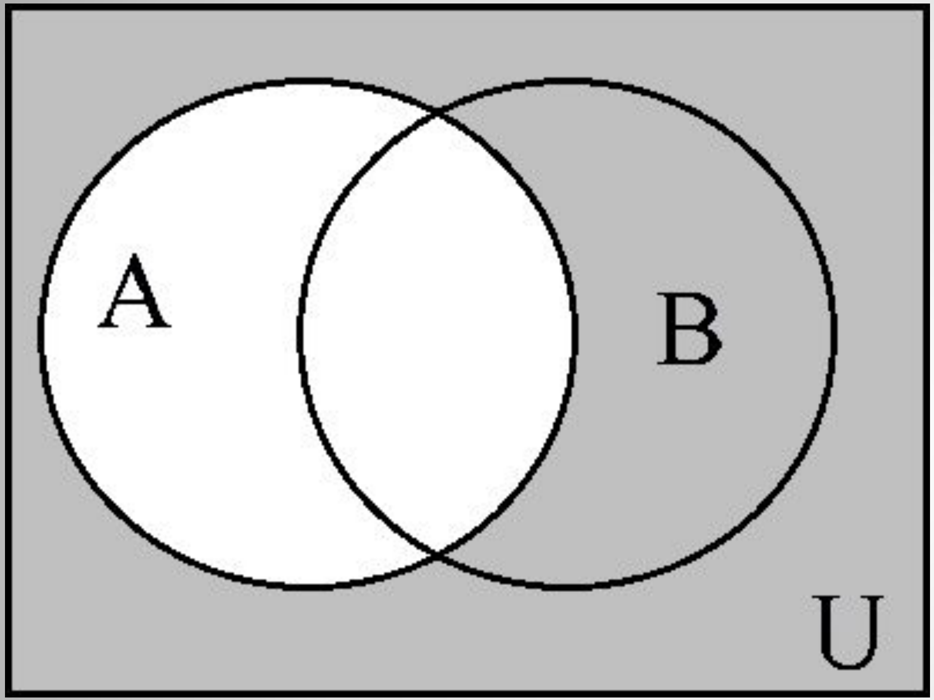
Операции над множествами



$$A \setminus B$$

Разность множеств

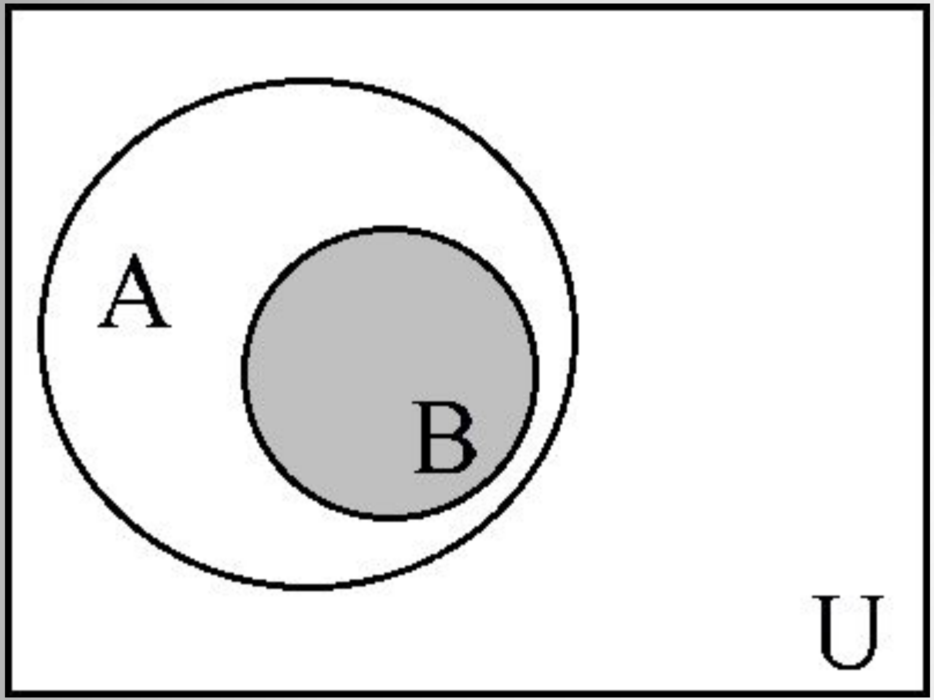
Операции над множествами



$$A' = U \setminus A$$

Дополнение множества

Подмножество



$$A \subset B$$

Мощность множества

Мощностью конечного множества S называется число его элементов. Она обозначается символом

$$|S|$$

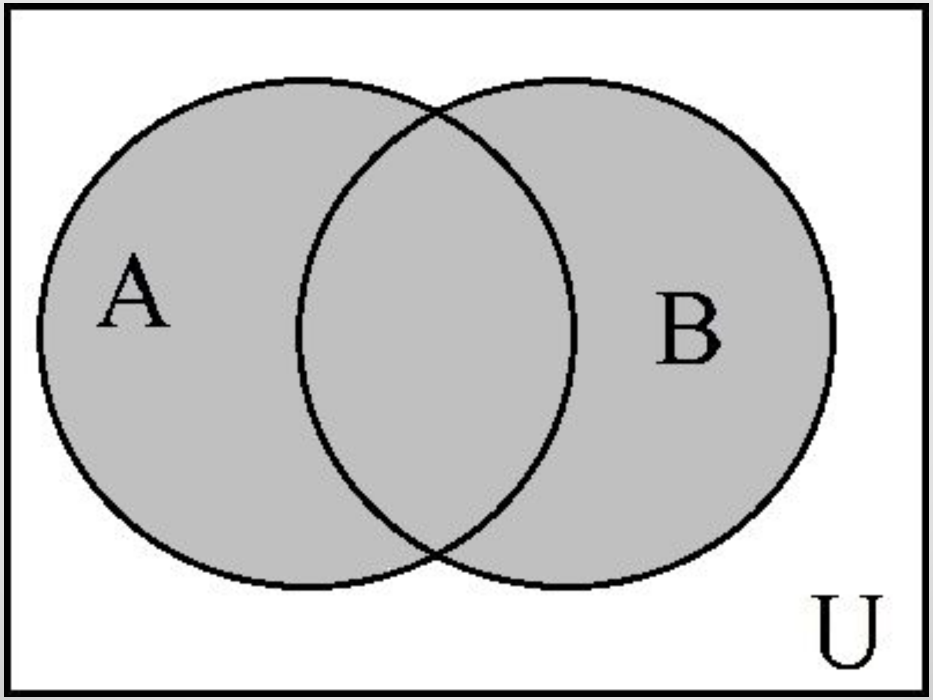
$$|\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}| = 8$$

$$|\text{Семь чудес света}| = 7$$

$$|\emptyset| = 0$$

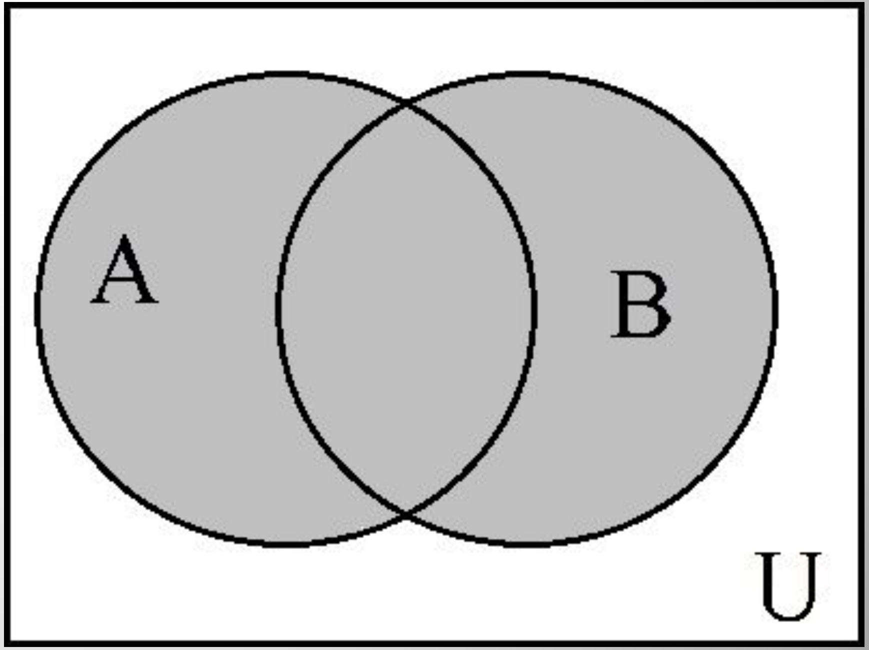
Формула включений и исключений

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



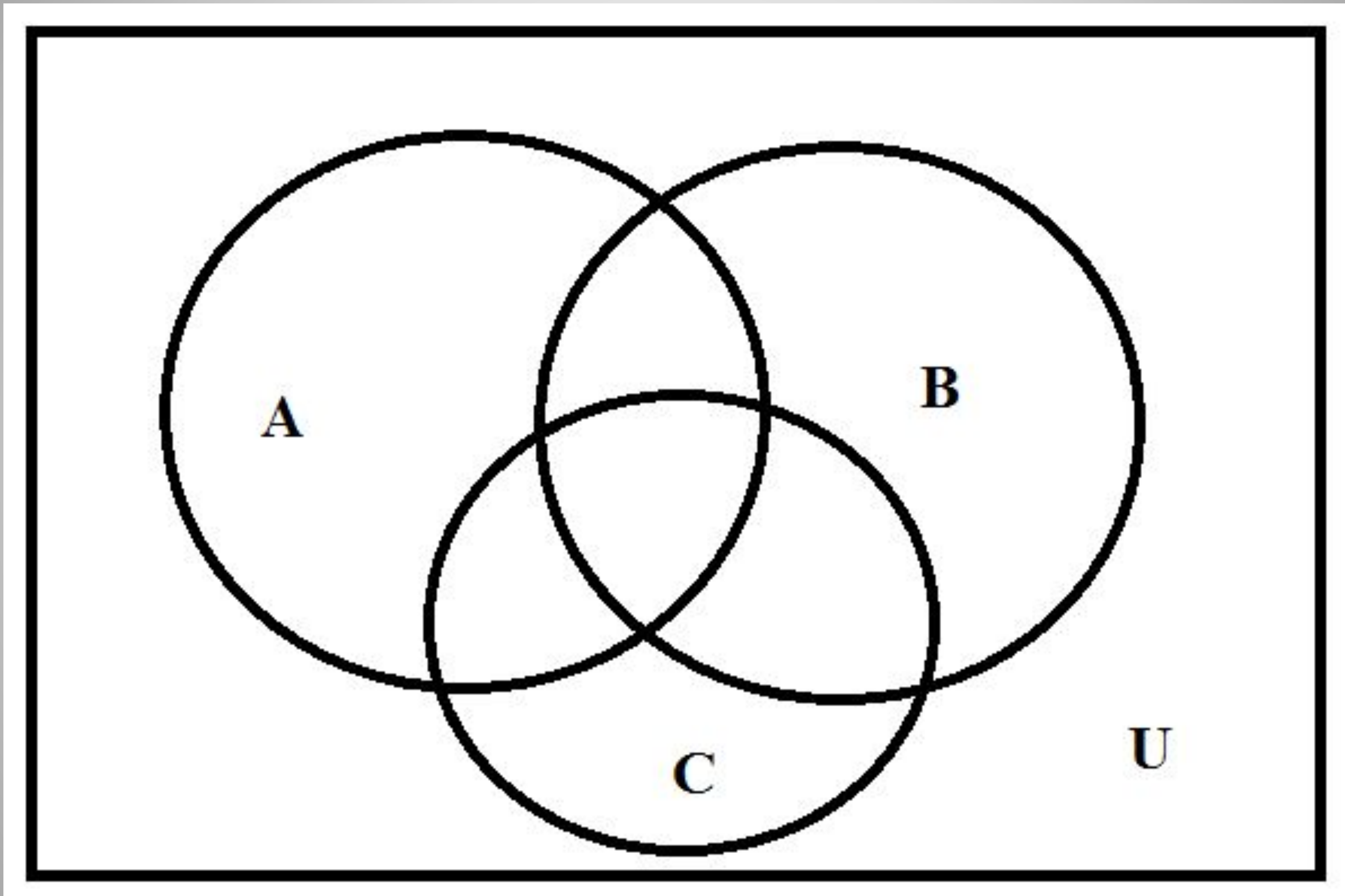
Задача 1

Каждый из 43 студентов первого курса, изучающих информатику в университете, может посещать и дополнительные лекции. Если 16 из них слушают еще курс альпинизма, 17 — курс парашютного спорта, и 5 изучают обе эти дисциплины, то сколько студентов вообще не посещают упомянутых дополнительных занятий?

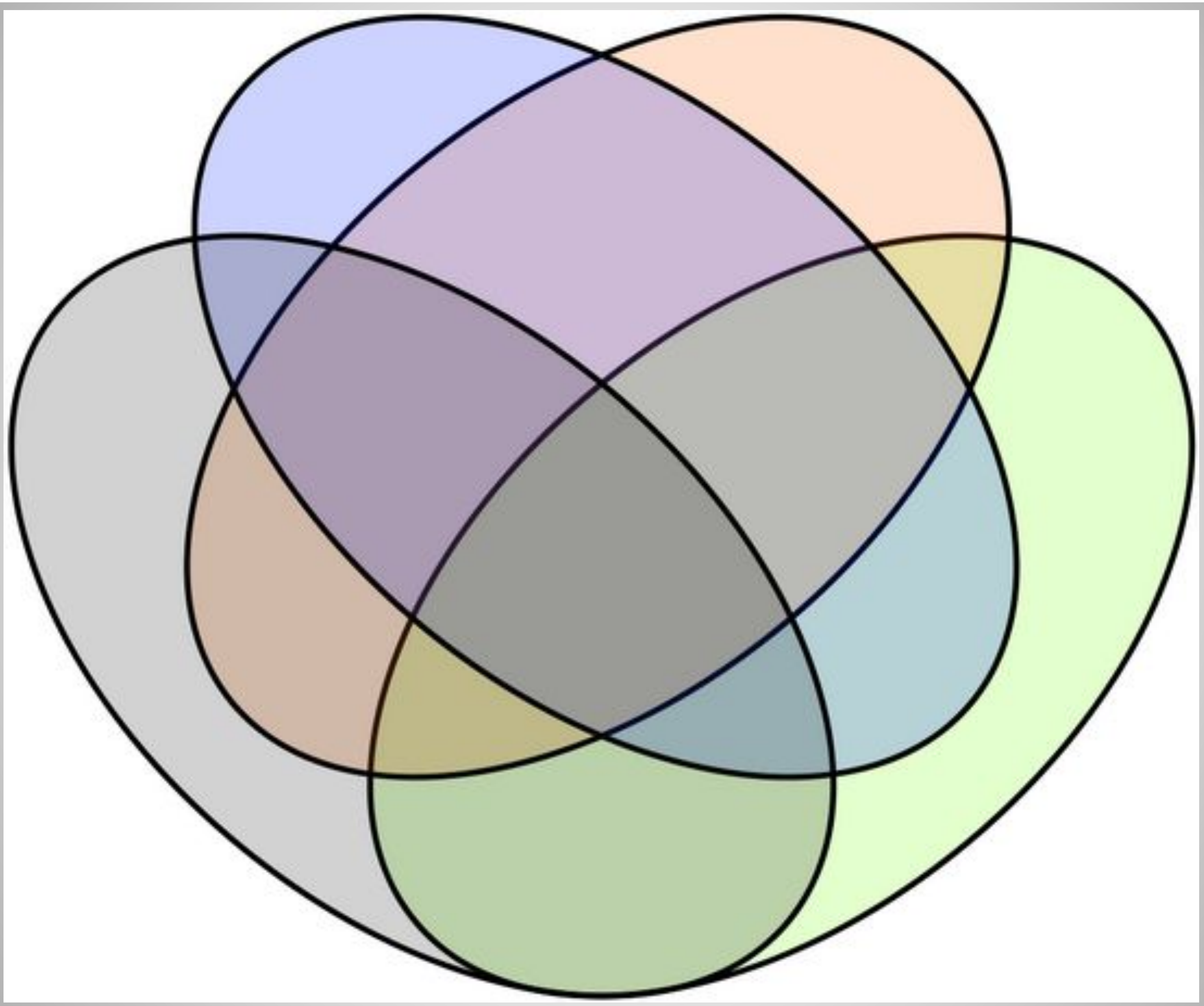


Задача 2

Студенты первого курса, изучающие информатику в университете, могут посещать и дополнительные дисциплины. В этом году 25 из них предпочли изучать бухгалтерию, 27 выбрали бизнес, а 12 решили заниматься туризмом. Кроме того, было 20 студентов, слушающих курс бухгалтерии и бизнеса, пятеро изучали бухгалтерию и туризм, а трое — туризм и бизнес. Известно, что 2 студента отважились посещать сразу три дополнительных курса. Сколько студентов посещали по крайней мере один дополнительный курс? Сколько из них были увлечены только туризмом?



Диаграммы Эйлера-Венна



Диаграммы Эйлера-Венна

— *Ты умеешь считать? — спросила Белая Королева.— Сколько будет один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один?*

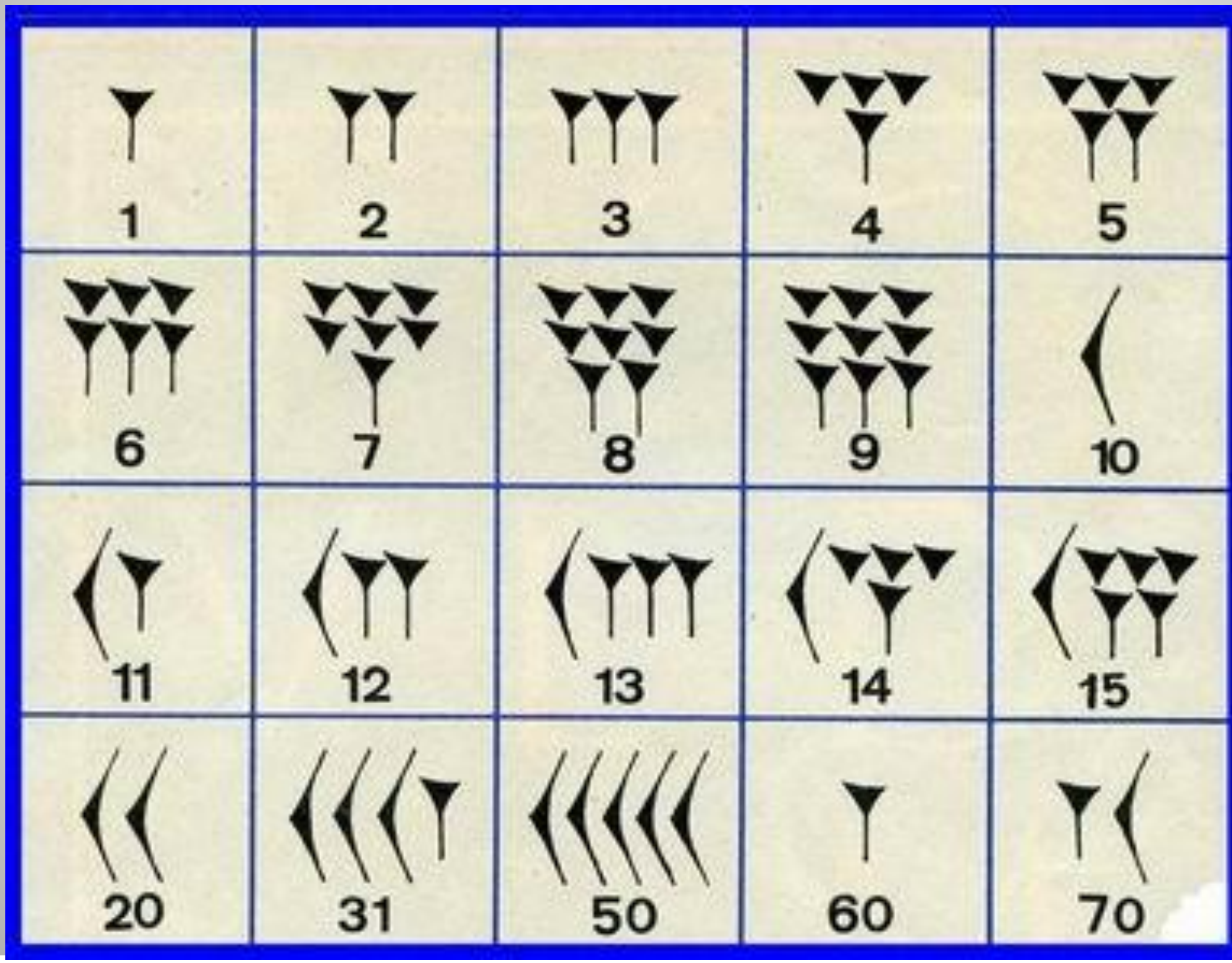
— Я не знаю, — ответила Алиса. — Я сбилась со счета.

— Она не умеет считать,— сказала Черная Королева.

Л. Кэрролл. Алиса в зазеркалье

Натуральные числа

Числа в Вавилоне



Числа в Китае

0	〇	零			
1	一	壹	10	十	拾
2	二	貳	20	卄/廿	貳拾
3	三	叁	30	卅	參拾
4	四	肆	40	卌	肆拾
5	五	伍			
6	六	陸	10^2	百	佰
7	七	柒	10^3	千	仟
8	八	捌	10^4	万	萬
9	九	玖	10^8	亿	億

Древний Рим

I MMXVII

V

X

L

C

D

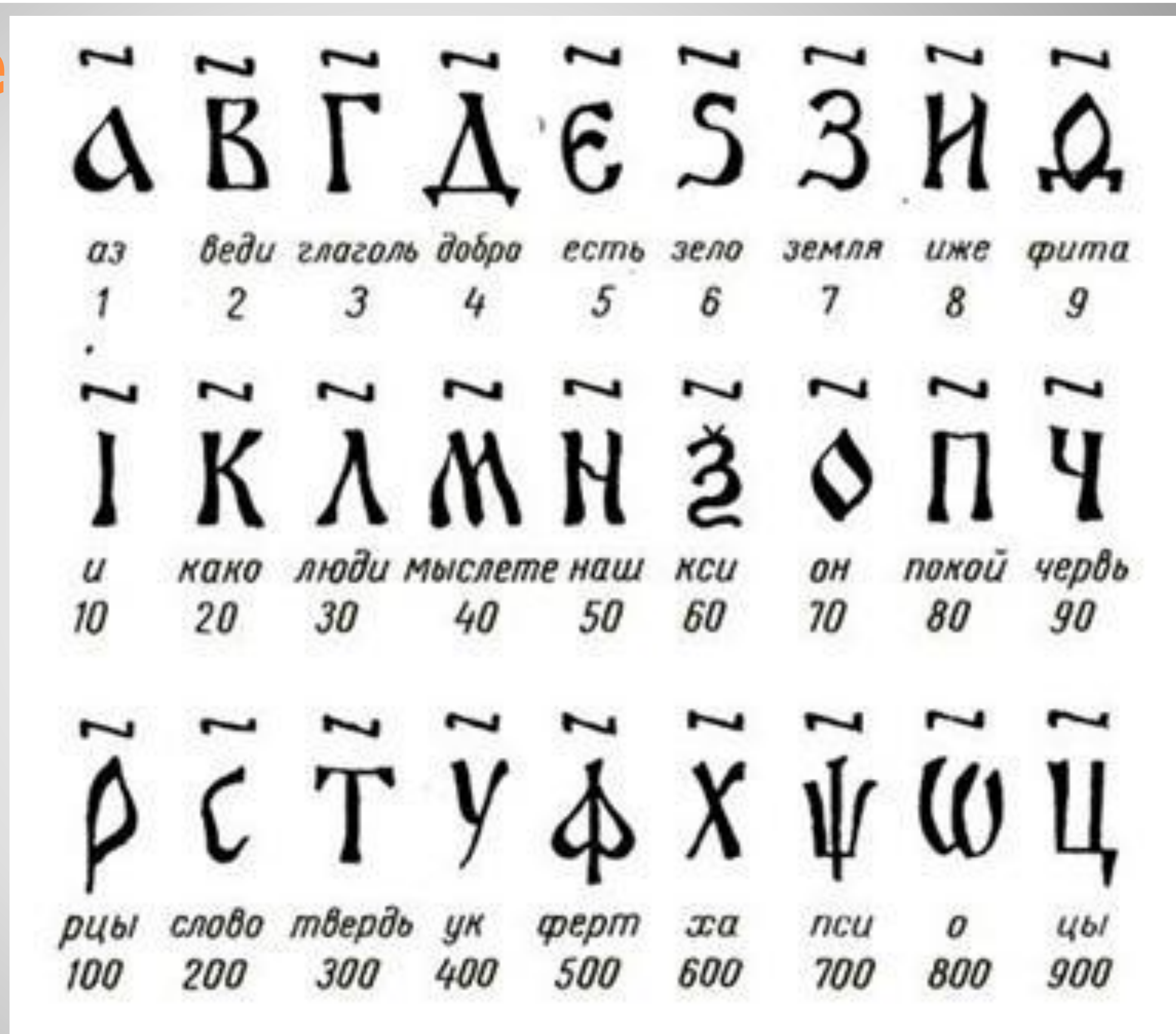
M

Древний Греция

Греческий числовой алфавит

Число	Буква	Название буквы	Число	Буква	Название буквы	Число	Буква	Название буквы
1	α	альфа	10	ι	иота	100	ρ	ро
2	β	бета	20	κ	каппа	200	σ	сигма
3	γ	гамма	30	λ	ламбда	300	τ	тау
4	δ	дельта	40	μ	мю	400	υ	ипсилон
5	ε	эпсилон	50	ν	ню	500	ϕ	фи
6	ς*	стигма, дигамма	60	ξ	кси	600	χ	хи
7	ζ	дзета	70	ο	омикрон	700	ψ	пси
8	η	эта	80	π	пи	800	Ω	омега
9	θ	тэта	90	Q*	копа	900	ϡ*	сампи, саде

Славяне


аз 1
веди 2
глаголь 3
добро 4
есть 5
зело 6
земля 7
иже 8
фита 9
и 10
како 20
люди 30
мыслете 40
наш 50
кси 60
он 70
покой 80
червь 90
рцы 100
слово 200
твердь 300
ук 400
ферт 500
ха 600
пси 700
о 800
цы 900

Япония

一 二 三 四 五

六 七 八 九 十

Десятичная система счисления

$b_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_2 b_1 b_0 =$

1254398021

1000000000

$125{,}3689$

Аксиомы Пеано

1. 0 есть натуральное число;
2. Следующее за натуральным числом есть натуральное число;
3. 0 не следует ни за каким натуральным числом;
4. Если натуральное число a следует за натуральным числом b и за натуральным числом c, то b и c тождественны;
5. Если какое-либо предложение доказано для 0 и если из допущения, что оно верно для натурального числа n, вытекает, что оно верно для следующего за n натурального числа, то это предложение верно для всех натуральных чисел.

Аксиомы Пеано

Пусть *следующий* для целого числа n будет обозначаться s(n).

Тогда числа выглядят так:

1 = s(0);

2 = s(1) = s(s(0));

3 = s(2) = s(s(s(0)));

…

10 = s(9) = s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(0))))))))));

…

n = s(n-1);

…

Свойства чисел

Математические свойства натуральных чисел зависят только от 0 и s, а не от представления их с помощью цифр.

Представления чисел с помощью цифр ни разу не использованы в работе Пеано за исключением символа 0, который достаточно условно взят как символ начала последовательности.

$10 > 8$, потому что $10 = s(s(8))$,

$10 = 7 + 3$, потому что $10 = s(s(s(7)))$.

Множество натуральных чисел

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, …

$0 \in \mathbb{N}$

$\forall$ n$\in \mathbb{N}$, $\quad s(n) \in \mathbb{N}$

$\nexists n \in \mathbb{N}: \quad 0 = s(n)$

$a = s(n)$ и $a = s(k) \implies n = k$

$\big(P(0) \text{ и } (P(k) \Rightarrow P(k+1))\big) \Rightarrow \forall\, n\, P(n)$

Операции на множестве $\mathbb{N}$

$\forall\, n, m \in \mathbb{N},\quad n + m \in \mathbb{N}$ и $\mathrm{m} \cdot n \in \mathbb{N};$

$\forall\, n, m, k \in \mathbb{N}\quad n + (m + k) = (n + m) + k;$

$\exists\, 0 \in \mathbb{N}\quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ n + 0 = 0 + n = n;$

$\exists\, 1 \in \mathbb{N}\quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ 1 \cdot n = n \cdot 1 = n;$

$\forall\, n, m \in \mathbb{N},\qquad n + m = m + n;$

$\forall\, n, m \in \mathbb{N},\qquad n \cdot m = m \cdot n;$

$\forall\, n, m, k \in \mathbb{N}\qquad n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k.$

Замкнутость сложения

Замкнутость умножения

Замкнутость возведения в степень

Сравнения больших натуральных чисел

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ