

Множественная регрессия

На любой экономической показатель как правило оказывает влияние не один, а несколько факторов. Например, спрос на некоторое благо определяется не только ценой данного блага, но и ценами на замещающие и дополняющие блага, доходом потребителей и многими другими факторами. В этом случае вместо парной регрессии $M(Y|x) = f(x)$ рассматривается *множественная регрессия*

$$M(Y|x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Задача оценки статистической взаимосвязи переменных Y и $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$ формулируется аналогично случаю парной регрессии. *Уравнение множественной регрессии* может быть представлено в виде

$$Y = f(\alpha, X) + \varepsilon$$

где $X = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)})$ — вектор независимых объясняющих переменных (регрессоры), α — вектор *параметров* (подлежащих определению), ε — *случайная ошибка (отклонение)*, Y — *зависимая (объясняемая) переменная*.

Наиболее простой моделью множественной регрессии является линейная модель множественной регрессии аддитивного вида.

Теоретическое линейное уравнение регрессии имеет вид:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} + \dots + \alpha_k X^{(k)} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^k \alpha_j X^{(j)}$$

или для индивидуальных наблюдений

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i^{(1)} + \alpha_2 x_i^{(2)} + \dots + \alpha_k x_i^{(k)}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ — вектор размерности $(m + 1)$ неизвестных параметров α_j , $(j = 1, k)$, называется j -ым теоретическим коэффициентом регрессии (частичным коэффициентом регрессии). Он характеризует чувствительность величины Y к изменению $X^{(j)}$ регрессора, который отражает влияние на условное математическое ожидание зависимой переменной Y объясняющей переменной $X^{(j)}$, при условии, что все другие объясняющие переменные модели остаются постоянными. α_0 — *свободный член*, определяющий значение Y в случае, когда все объясняющие переменные равны нулю.

Методом оценки параметров уравнения множественной линейной регрессии является *метод наименьших квадратов* (МНК), суть которого состоит в минимизации суммы квадратов отклонений наблюдаемых значений зависимой переменной Y от ее значений \hat{Y} , получаемых по уравнению регрессии. Определим предпосылки МНК, позволяющие его применить

Предпосылки МНК

1. *Математическое ожидание случайного отклонения ε , равно нулю для всех наблюдений:*

$$\forall i: M(\varepsilon_i) = 0$$

2. *Гомоскедастичность (постоянство дисперсии отклонений). Дисперсия случайных отклонений e_i постоянная:*

$$\forall (i, j): D(e_i) = D(e_j) = \sigma^2$$

3. *Отсутствие автокорреляции.*

Случайные отклонения ε_i и ε_j являются независимыми друг от друга

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2, & i = j \end{cases}$$

Предпосылки МНК (продолжение)

4. *Случайное отклонение должно быть независимо от объясняющих переменных:*

$$\forall(i, j): \text{cov}(\varepsilon_i, x_i^{(j)}) = 0$$

5. *Модель является линейной относительно параметров. Для случая множественной линейной регрессии существенными являются еще две предпосылки.*
6. *Отсутствие мультиколлинеарности.*
Между объясняющими переменными отсутствует строгая (сильная) линейная зависимость.
7. *Ошибки ε_i имеют нормальное распределение $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$.*

Теоретическое уравнение регрессии оценивается *эмпирическим уравнением регрессии*, которое имеет вид:

$$Y = a_0 + a_1X^{(1)} + a_2X^{(2)} + \dots + a_kX^{(k)} + e = a_0 + \sum_{j=1}^k a_jX^{(j)} + e$$

Здесь $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ — оценки теоретических значений $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ коэффициентов регрессии (*эмпирические коэффициенты регрессии*); e — оценка отклонения. Очевидно, для индивидуальных наблюдений имеем:

$$y_i = a_0 + a_1x_i^{(1)} + a_2x_i^{(2)} + \dots + a_kx_i^{(k)} + e_i$$