

**Лекция № 6**  
**множественная регрессия и**  
**корреляция.**  
**(продолжение)**

- При исключении из регрессии  $p+1$  фактора коэффициент детерминации должен уменьшаться, а остаточная дисперсия возрастет;

$$R_{p+1}^2 \geq R_p^2 \quad \text{и} \quad S_{p+1}^2 \leq S_p^2.$$

# Выбор формы уравнения регрессии.

- Как и в парной зависимости, возможны разные виды уравнений множественной регрессии: линейные и нелинейные.
- наиболее широко используются линейная и степенная функции .

- В линейной множественной регрессии

$$\hat{y}_x = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p$$

параметры при переменной  $x$  называются **коэффициентами «чистой» регрессии**. Они характеризуют среднее изменение результата с изменением соответствующего фактора на единицу при неизменном значении других факторов, закреплённом на среднем уровне.

- Возможен и иной подход к построению уравнения множественной регрессии ,когда на основе матрицы коэффициентов корреляции строится уравнение регрессии в стандартизованном виде:

$$t_y = \beta_1 \cdot t_{x_1} + \beta_2 \cdot t_{x_2} + \dots + b_p \cdot t_{x_p}$$

- Где  $t_y, y_{x_1}, \dots, t_{x_p}$  - стандартизованные переменные

$$t_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}, \quad t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$$

Для которых среднее значение равно нулю

$$\bar{t}_y = \bar{t}_{x_i} = 0,$$

а среднее квадратическое отклонение равно единице:

$$\sigma_{t_y} = \sigma_{t_x} = 1;$$

$\beta_i$  - стандартизованные коэффициенты регрессии.

- Стандартизированные коэффициенты регрессии показывают, на сколько % изменится в среднем результат, если соответствующий фактор  $x_i$  изменится на 1 % при неизменном среднем уровне других факторов.

- Стандартизированные коэффициенты регрессии  $\beta_i$  **сравнимы** между собой. Сравнивая их друг с другом, можно ранжировать факторы по силе их воздействия на результат.
- В этом основное стандартизированных коэффициентов регрессии в отличие от коэффициентов “чистой ” регрессии, которые несравнимы между собой.



- коэффициенты “чистой” регрессии связаны со стандартизованными коэффициентами регрессии следующими формулами :

$$b_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}}$$

- Это позволяет от уравнения регрессии в стандартизованном виде переходить к уравнению регрессии в естественном виде.

- Пример. Пусть функция издержек производства  $y$  (тыс. руб.) характеризуется уравнением вида

$$y = 200 + 1,2 \cdot x_1 + 1,1 \cdot x_2 + \varepsilon$$

- $x_1$  - основные производственные фонды (тыс.руб.)
- $x_2$  - численность занятых в производстве (чел.)

- Анализируя его, мы видим, что при той же занятости дополнительный рост стоимости основных производственных фондов на 1 тыс. руб. влечет за собой увеличение затрат в среднем на 1,2 тыс.руб. , а увеличение численности занятых на одного человека способствует при той же технической оснащённости предприятий росту затрат в среднем на 1,1 тыс.руб.
- Однако это не означает ,что фактор  $x_1$  оказывает более сильное влияние на издержки производства по сравнению с фактором  $x_2$ .

- уравнение регрессии в стандартизованном виде выглядит так

$$t_y = 0,5 \cdot t_{x_1} + 0,8 \cdot t_{x_2}.$$

- Вывод:

- Так как  $\beta_1 < \beta_2$  ( $0,5 < 0,8$ ) ,то можно заключить ,что большее влияние оказывает на производство продукции фактор  $X_2$  , а не  $X_1$  , как кажется из уравнения регрессии в натуральном виде .

- Рассмотренный смысл стандартизованных коэффициентов регрессии позволяет их использовать при отсеве факторов –из модели исключаются факторы **с наименьшим** значением  $\beta_j$  .

# Индекс множественной корреляции

- Оценивает тесноту совместного влияния факторов на результат

( 0 ; 1 )

Значение  $R_{yx_1 x_2 \dots x_i \dots x_p}$  должно быть больше или равно максимальному парному индексу корреляции

# ЧАСТНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

- Частные коэффициенты (или индексы) корреляции характеризуют тесноту связи между результатом и соответствующим фактором при неизменном уровне других факторов, включенных в уравнение регрессии
- (-1;1)



- частные показатели корреляции широко используются при
- 1) решении проблемы отбора факторов.
- 2) ранжировании факторов, участвующих в множественной регрессии – для линейных связей (при нелинейной взаимосвязи исследуемых признаков эту функцию выполняют частные индексы детерминации ).

- **Порядок** частного коэффициента корреляции определяется количеством факторов, влияние которых исключается.
- Например,  $r_{yx_1 \cdot x_2}$  — коэффициент частной корреляции первого порядка.

$$r_{yx_2 \cdot x_1 x_3 x_4} \text{ —}$$

- Коэффициенты частной корреляции более высоких порядков можно определить через коэффициенты частной корреляции более низких порядков по рекуррентной формуле

$$r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_p} = \frac{r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}} - r_{yx_p \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}} \cdot r_{x_i x_p \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}}}{\sqrt{(1 - r_{yx_p \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}}^2) \cdot (1 - r_{x_i x_p \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}}^2)}}$$

При двух факторах и  $i = 1$  данная формула примет вид:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1 x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_2}^2) \cdot (1 - r_{x_1 x_2}^2)}}.$$

- Соответственно при  $i = 2$  и двух факторах частный коэффициент корреляции  $y$  с фактором  $x_2$  можно определить по формуле