Эконометрика.

Четвертая лекция.

Модель множественной регрессии.

Множественная регрессия – уравнение связи с несколькими независимыми переменными:
Можно записать линейную модель множественной регрессии в двух видах:

1. $$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \ldots + \beta_k x_{ik} + U_i$$

$$i = [1; n]$$

2. $$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \ldots + \beta_k x_{ik} + U_i$$

если $x_{i1}=1$, для любого $i = [1;n]$

Гипотезы, лежащие в основе множественной модели, являются естественным обобщением модели парной регрессии:

1. Спецификация модели:

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + U_i$$ для любого i=[1;n]

2. $x_{i1}, x_{i2} \ldots x_{ik}$ - детерминированные величины $x_S=(x_{1S}, x_{2S} \ldots x_{nS})^T$ линейно независимо в R^n

3. $E(U_t) = 0$

$E(U_t^2) = 0$

4. $E(U_t, U_s) = 0, \forall t \neq s$

5. $U_t \sim N(0, \sigma^2)$ $\quad U_t \approx N(0, \sigma^2)$

Если выполняются эти условия, то модель называется нормальной линейной регрессией.

Введем следующие обозначения:

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ Вектор значений зависимой переменной

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)^T$ Вектор неизвестных параметров модели

$U = (U_1, U_2, \ldots, U_n)^T$ Вектор значений случайной компоненты

$$X = \begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \square & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & x_{22} & \square & x_{2k} \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \square & x_{nk} \end{matrix}$$

Матрица значений регрессоров

$\hat{\beta}$ – вектор оценок

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T * Y$$

Интерпретация множественного уравнения регрессии.

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + u$$

$$\hat{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k$$

$$\hat{y} = 116{,}7 + 0{,}112 x_1 - 0{,}739 x_2$$

x_1 – доход потребителя (руб.)

x_2 – цена продукта питания (руб.)

Y – расход на питание (руб.)

Коэффициенты регрессии b – показатели силы связи, характеризующие абсолютное изменение результативного признака Y (в его единицах измерения) при изменении факторного признака x на 1 единицу своего измерения и при фиксированном влиянии остальных факторов, включенных в модель.

Коэффициент a показывает совокупное влияние прочих факторов, не включенных в модель.

Используя коэффициенты регрессии можно рассчитать частные коэффициенты эластичности. Как правило их рассчитывают для средних значений факторов:

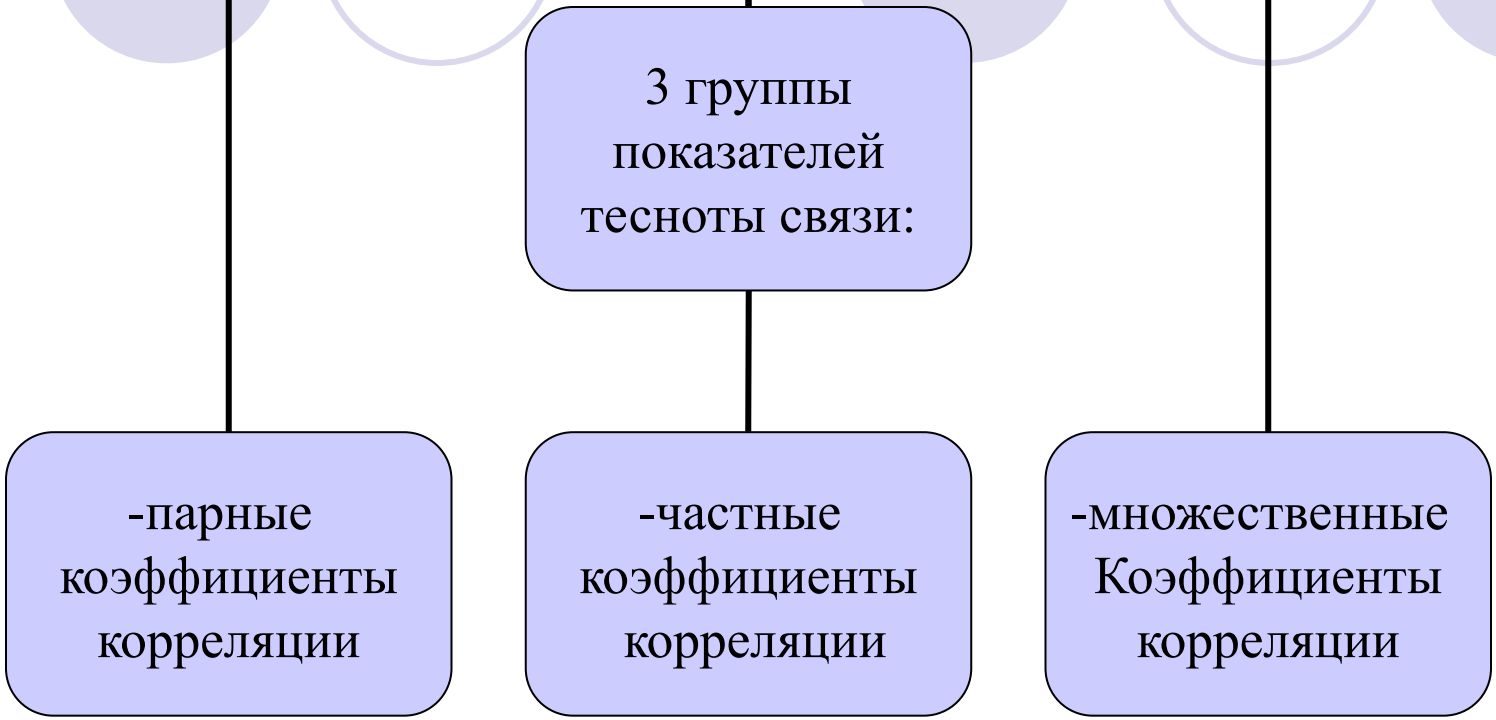
$$Э_j = b_j * \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}} = b_j * \frac{\bar{x}_j}{a + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j}$$

Частные коэффициенты эластичности имеют тот же смысл, что и обычные, добавляется лишь ограничение на фиксированное значение остальных факторов.

Все коэффициенты регрессии должны быть подвергнуты оценке статистической значимости.

Процедура проверки такая же как и в парной линейной регрессии.

Анализ показателей тесноты связи.



Парные коэффициенты

$$r_{x_j y} = \frac{\overline{x_j y} - \overline{x_j}\,\overline{y}}{\sigma_{x_j}\sigma_y}$$

$$r_{x_j x_s} = \frac{\overline{x_j x_s} - \overline{x_j}\,\overline{x_s}}{\sigma_{x_j}\sigma_{x_s}}$$

Мультиколлинеарность (коллинеарность)– ситуация, когда регрессоры тесно связаны между собой. Если объясняющие переменные связаны строгой функциональной зависимостью, то говорят о совершенной мультиколлинеарности.

$$Y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

где Y - общая величина расходов на питание;

x_1 - заработная плата;

x_2 - доход, получаемый вне работы;

x_3 - совокупный доход.

Для оценки мультиколлинеарности составляется и анализируется матрица парных коэффициентов корреляции.

В первой строке и в первом столбце записывают все факторы, начиная с зависимой переменной.

В клетках матрицы рассчитывают соответствующие парные коэффициенты корреляции.

	Y	x_1	x_2	x_3
Y	1	r_{yx_1}	r_{yx_2}	r_{yx_3}
x_1	r_{x_1y}	1	$r_{x_1x_2}$	$r_{x_1x_3}$
x_2	r_{x_2y}	$r_{x_2x_1}$	1	$r_{x_2x_3}$
x_3	r_{x_3y}	$r_{x_3x_1}$	$r_{x_3x_2}$	1

Если $r_{x_j x_s} > 0,7$

тогда считают, что регрессоры коллинеарны.

Т.е. между регрессорами существует тесная связь. В этом случае нельзя определить их изолированное влияние на результативный показатель и параметры уравнения регрессии оказываются ***неинтерпретируемыми.***

Возникает вопрос: нужно ли исключать коррелируемые регрессоры?

Однозначного ответа на этот вопрос нет. Существует даже такая школа, представители которой считают, что и не нужно ничего делать, поскольку «так устроен мир».

Другие эконометристы считают, что необходимо исключить «лишние» регрессоры, которые могут служить причиной мультиколлинеарности.

Но при этом могут возникнуть новые проблемы.

Во-первых, не всегда ясно, какие переменные являются «лишними».

Во-вторых, удаление независимых переменных может значительно отразиться на содержательном смысле модели.

В-третьих, удаление переменных, которые реально влияют на изучаемую зависимую переменную, приводит к смещению МНК-оценок.

Теоретически регрессионная модель позволяет учесть любое число факторов, практически в этом нет необходимости.

Отбор факторов проводится на основе качественного теоретико-экономического анализа.

Но теоретический анализ не всегда позволяет однозначно ответить на вопрос о количественной взаимосвязи рассматриваемых признаков и целесообразности включения фактора в модель.

Поэтому отбор факторов обычно проводится в два этапа:

1. Отбираются факторы, исходя из сущности проблемы.
2. На основе матрицы парных коэффициентов корреляции и определения t-статистик для параметров регрессии.

Если факторы явно коллинеарны, то они дублируют друг друга и один из них рекомендуется исключить из регрессии. Предпочтение при этом отдается не фактору, более тесно связанному с результатом, а тому фактору, который при достаточно тесной связи с результатом имеет наименьшую тесноту с другими факторами.

Частные коэффициенты корреляции

Для решения проблемы коллинеарности можно использовать частные коэффициенты корреляции, которые характеризуют тесноту связи между результатом и регрессором при фиксированном влиянии других факторов.

$$r_{yx_1/x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} * r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_2}{}^2)(1 - r_{x_1x_2}{}^2)}}$$

Исключаем тот регрессор, для которого частный коэффициент наименьший, так как учтено взаимное влияние регрессоров.

Коэффициент множественной корреляции, множественный коэффициент детерминации.

Коэффициент множественной корреляции используется для оценки тесноты связи между зависимой переменной и всеми регрессорами, включенными в модель.

$$R = \sqrt{\frac{\sigma^2_{факт}}{\sigma^2_{общ}}} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_{общ}}}$$

$$R \in [0;1]$$

R^2 – коэффициент множественной детерминации.

$R^2 * 100 -$ доля вариации y, обусловленная включенными в модель факторами.

$(1 - R^2) * 100 -$ доля вариации Y, обусловленная не включенными в модель факторами.

Проверка статистической значимости множественного коэффициента корреляции осуществляется также как и в парном анализе. Фактическое значение статистики Фишера определяется по формулам:

$$F_{ф} = \frac{R^2}{1-R^2} * \frac{n-k}{k-1}$$

n – размер выборки,
k – общее число параметров, оцениваемых в уравнении.

$$F_{ф} = \frac{R^2 / k}{(1-R^2) \div (n-k-1)}$$

n – размер выборки,
k – число независимых переменных.

Стандартизированное уравнение множественной регрессии.

Существует другой подход к построению множественной регрессии – уравнение регрессии в стандартизированном масштабе. Для этого введем стандартизированные переменные

$$Z_y, Z_{x_1}, \ldots, Z_{x_k}$$

$$Z_y = \frac{(y - \bar{y})}{\sigma_y}$$

$$Z_{x_k} = \frac{(x_k - \bar{x})}{\sigma_{x_k}}$$

Для этих переменных среднее значение равно 0, а среднее квадратическое отклонение равно 1.

$$Z_y = b_1 Z_{x_1} + b_2 Z_{x_2} + \ldots + b_k Z_{x_k} + U$$

К этому уравнению можно применить МНК. Система:

$$r_{yx_1} = \beta_1 + \beta_2 r_{x_1x_2} + \beta_3 r_{x_1x_3} + \ldots + \beta_k r_{x_1x_k}$$

$$r_{yx_2} = \beta_1 r_{x_2x_1} + \beta_2 + \beta_3 r_{x_2x_3} + \ldots + \beta_k r_{x_2x_k}$$

$$\ldots$$

$$r_{yx_k} = \beta_1 r_{x_kx_1} + \beta_2 r_{x_kx_2} + \beta_3 r_{x_kx_3} + \ldots + \beta_k$$

β – стандартизированные коэффициенты регрессии.

Данные коэффициенты сравнимы между собой и можно ранжировать факторы по силе воздействия на результат.

Стандартизированный коэффициент регрессии – показывает, на сколько средних квадратических отклонений изменится результат, если соответствующий фактор изменится на 1 сигма при неизменной величине остальных факторов.

Пример: Пусть функция издержек производства Y (тыс.руб.) характеризуется уравнением вида:

$$\hat{Y} = 200 + 1{,}2x_1 + 1{,}1x_2$$

где x_1 – основные производственные фонды (тыс.руб.)

x_2 – численность занятых в производстве (чел.)

Построим уравнение в стандартизированном масштабе:

$$Z_y = 0{,}5 \cdot Z_{x_1} + 0{,}8 \cdot Z_{x_2}$$