

Множественный регрессионный анализ

Множественная регрессия – это уравнение связи с несколькими независимыми переменными:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \varepsilon$$



часть значения y ,
которая объяснена
уравнением регрессии
с несколькими
факторами



необъясненная
часть значения y
(или возмущение)

Построение уравнения регрессии

1. Постановка задачи

По имеющимся данным n наблюдений за совместным изменением параметров y , x_j и $((y_i, x_j, i); j=1, 2, \dots, p; i=1, 2, \dots, n)$ необходимо определить аналитическую зависимость $\hat{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$, наилучшим образом описывающую данные наблюдений.

Данные наблюдений

	y	X_1	X_2	...	X_p
1	y_1	x_{11}	x_{21}	...	x_{p1}
2	y_2	x_{12}	x_{22}	...	x_{p2}
...
n	y_n	x_{1n}	x_{2n}	...	x_{pn}

**Критерий качества
выбранной зависимости:**

$$S = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min$$

2. Спецификация модели

2.1. Отбор факторов, подлежащих включению в модель

Требования к отбираемым факторам

Факторы не должны
быть взаимно
коррелированы

Факторы должны
быть количественно
измеримы

Пример:

y – себестоимость единицы
продукции

x – заработная плата
работника

z – производительность
труда

$$y = 22600 - 5x - 10z + \varepsilon$$

$$r_{xz} = 0,95$$

- ✓ целесообразность включения каждого нового фактора оценивается с помощью коэффициента детерминации;
- ✓ при возникновении необходимости добавить в уравнение качественный фактор вводится «фиктивная» переменная

Парная коллинеарность и мультиколлинеарность

Две переменные считаются **явно коллинеарными**, т.е. находятся между собой в линейной зависимости, если **коэффициент интеркорреляции** (корреляции между двумя объясняющими переменными) $\geq 0,7$.

Если факторы явно коллинеарны, то они дублируют друг друга и один из них рекомендуется исключить из уравнения.

Мультиколлинеарность – линейная зависимость между более чем двумя переменными, т.е. совокупное воздействие факторов друг на друга.

Включение в модель мультиколлинеарных факторов нежелательно

по следующим причинам:

- затрудняется интерпретация параметров множественной регрессии; параметры линейной регрессии теряют экономический смысл;
- оценки параметров не надежны, имеют большие стандартные ошибки и меняются с изменением количества наблюдений (не только по величине, но и по знаку), что делает модель непригодной для анализа и прогнозирования.

Оценка мультиколлинеарности

Для оценки мультиколлинеарности используется **определитель матрицы парных коэффициентов интеркорреляции**:

(!) Если факторы не коррелируют между собой, то матрица коэффициентов интеркорреляции является единичной, поскольку в этом случае все недиагональные элементы равны 0.

Например, для уравнения с тремя переменными

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \varepsilon$$

$$\text{Det}(R) = |R| = \begin{vmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_2x_1} & r_{x_3x_1} \\ r_{x_1x_2} & r_{x_2x_2} & r_{x_3x_2} \\ r_{x_1x_3} & r_{x_2x_3} & r_{x_3x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(!) Если между факторами существует полная линейная зависимость и все коэффициенты корреляции равны 1, то определитель такой матрицы равен 0.

$$Det(R) = |R| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Чем ближе к 0 определитель матрицы коэффициентов интеркорреляции, тем сильнее мультиколлинеарность и ненадежнее результаты множественной регрессии.

Чем ближе к 1 определитель матрицы коэффициентов интеркорреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов.

Способы преодоления мультиколлинеарности факторов:

- исключение из модели одного или нескольких факторов;
- переход к совмещенным уравнениям регрессии, т.е. к уравнениям, которые отражают не только влияние факторов, но и их взаимодействие. *Например,*
если $y = f(x_1, x_2, x_3)$, то можно построить следующее совмещенное уравнение:
$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + \varepsilon$$
- переход к уравнениям приведенной формы (в уравнение регрессии подставляется рассматриваемый фактор, выраженный из другого уравнения).

2. Спецификация модели

2.2. Выбор формы уравнения регрессии

- **Линейная регрессия**

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p + \varepsilon$$

- **Линеаризуемые регрессии**

- **Степенная регрессия**

$$y = ax_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_p^{b_p} \varepsilon$$

- **Экспоненциальная регрессия**

$$y = e^{a+b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_px_p+\varepsilon}$$

- **Гиперболическая регрессия**

$$y = \frac{1}{a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p + \varepsilon}$$

Например, зависимость спроса на товар (Q_d) от цены (P) и дохода (I) характеризуется следующим уравнением:

$$Q_d = 2,5 - 0,12P + 0,23 I.$$

Коэффициенты данного уравнения говорят о том, что при увеличении цены на единицу, спрос уменьшится в среднем на 0,12 единиц, а при увеличении дохода на единицу, спрос возрастет в среднем 0,23 единицы.

Например, зависимость выпуска продукции Y от затрат капитала K и труда L :

$$Y = 0.89K^{0.23}L^{0.81}$$

говорит о том, что увеличение затрат капитала K на 1% при неизменных затратах труда вызывает увеличение выпуска продукции Y на 0,23%.

Увеличение затрат труда L на 1% при неизменных затратах капитала K вызывает увеличение выпуска продукции Y на 0,81%.

3. Оценка параметров модели

3.1. МНК

$$S = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min \quad \text{или} \quad \sum \varepsilon^2 \rightarrow \min$$

$$S = \sum (y_i - a - b_1 x_1 - b_2 x_2 - \dots - b_p x_p)^2 = S(a, b_1, \dots, b_p)$$

$$S'_a = -2 \sum (y_i - a - b_1 x_1 - b_2 x_2 - \dots - b_p x_p) = 0$$

$$S'_{b_1} = -2b_1 \sum (y_i - a - b_1 x_1 - b_2 x_2 - \dots - b_p x_p) = 0$$

...

$$S'_{b_p} = -2b_p \sum (y_i - a - b_1 x_1 - b_2 x_2 - \dots - b_p x_p) = 0$$

Отсюда
а
получаем
систему
уравнений
:

$$\begin{cases} \sum y = na + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 + \dots + b_p \sum x_p, \\ \sum yx_1 = a \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 + \dots + b_p \sum x_p x_1, \\ \dots \dots \dots \\ \sum yx_p = a \sum x_p + b_1 \sum x_1 x_p + b_2 \sum x_2 x_p + \dots + b_p \sum x_p^2. \end{cases}$$

Решение системы уравнений с помощью метода определителей:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}, \quad b_1 = \frac{\Delta b_1}{\Delta}, \quad \dots, \quad b_p = \frac{\Delta b_p}{\Delta}$$

где Δ – определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 & \dots & \sum x_p \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_2 x_1 & \dots & \sum x_p x_1 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 & \dots & \sum x_p x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_p & \sum x_1 x_p & \sum x_2 x_p & \dots & \sum x_p^2 \end{vmatrix}$$

$\Delta a, \Delta b_1, \Delta b_p$ – частные определители (Δj), которые получаются из основного определителя путем замены j -го столбца на столбец свободных членов

$$\begin{pmatrix} \sum y \\ \sum yx_1 \\ \dots \\ \sum yx_p \end{pmatrix}$$

3. Оценка параметров модели

3.2. Метод оценки параметров через стандартизованные коэффициенты β

Уравнение регрессии в стандартизованном (нормированном) масштабе:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \dots + \beta_p t_{x_p}$$

где $t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$, $t_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}$ - стандартизованные переменные

β - стандартизованные коэффициенты регрессии.

β -коэффициенты показывают, на сколько сигм (средних квадратических отклонений) изменится в среднем результат за счет изменения соответствующего фактора x_i на одну сигму при неизменном среднем уровне других факторов.

Взаимосвязь b_i и β

Связь коэффициентов «чистой» регрессии b_i с коэффициентами β_i описывается соотношением:

$$b_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}} \quad \text{или} \quad \beta_i = b_i \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_y} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

Коэффициенты β определяются при помощи МНК из следующей системы уравнений методом определителей:

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \beta_1 + \beta_2 r_{x_2 x_1} + \beta_3 r_{x_3 x_1} + \dots + \beta_p r_{x_p x_1}, \\ r_{yx_2} = \beta_1 r_{x_2 x_1} + \beta_2 + \beta_3 r_{x_3 x_2} + \dots + \beta_p r_{x_p x_2}, \\ r_{yx_p} = \beta_1 r_{x_p x_1} + \beta_2 r_{x_p x_2} + \beta_3 r_{x_p x_3} + \dots + \beta_p \end{cases}$$

Параметр a определяется как:

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - \dots - b_p \bar{x}_p$$

4. Проверка качества уравнения регрессии

Но: уравнение статистически не значимо

$$\begin{array}{rcc} y_i & = & \hat{y}_i + \varepsilon_i \\ D(y) & = & D(\hat{y}) + D(\varepsilon) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{n} \sum (y - \bar{y})^2 & = & \frac{1}{n} \sum (\hat{y} - \bar{y})^2 + \frac{1}{n} \sum (y - \hat{y})^2 \end{array}$$

полная (общая) сумма квадратов отклонений = **сумма квадратов отклонений, объясненная регрессией** + **(остаточная) сумма квадратов отклонений, не объясненная регрессией**

F-критерий Фишера:

$$F = \frac{\frac{D(\hat{y})}{k}}{\frac{D(\varepsilon)}{n - m - 1}} \quad \text{или} \quad \frac{R^2}{1 - R^2} \times \frac{n - m - 1}{m}$$

где m – число независимых переменных в уравнении

регрессии;

n – число единиц совокупности.

Если **Fфакт** > **Fтабл**, то H_0 о случайной природе связи отклоняется и признается статистическая значимость и надежность уравнения.

Если **Fфакт** < **Fтабл**, то H_0 не отклоняется и признается статистическая незначимость уравнения регрессии.

Частный F-критерий:

$$F_{\text{част}x_i} = \frac{R^2_{yx_1 \dots x_i \dots x_p} - R^2_{yx_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_p}}{1 - R^2_{yx_1 \dots x_i \dots x_p}} \cdot \frac{n - m - 1}{1}$$

- оценивает статистическую значимость присутствия каждого из факторов в уравнении.