

Лекция 4.

Тема: Множество. Операции над множествами.

Цель: Рассмотреть понятие множества, подмножества, пустого, универсального множества. Определить основные операции на множествами.

Введение в теорию множеств

1. Основные определения, терминология

Под *множеством* A мы понимаем совокупность объектов произвольной природы, объединенных общим свойством $P(x)$.

Обозначение

- 1) Указанием определяющего свойства $A = \{x | P(x)\}$
- 2) Перечислением элементов $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Пример 1

$$B = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$$
$$B = \{3; -1\}$$

Иногда второе обозначение распространяется и на некоторые бесконечные множества. Так,

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Определение 1

Множество A называется *подмножеством* B , если для любого x ($x \in A \rightarrow x \in B$)

Обозначение:

$$A \subseteq B$$

Другими словами, символ " $A \subseteq B$ " есть сокращение для высказывания ($x \in A \rightarrow x \in B$)

Теорема 1

Для любых множеств A, B, C верно следующее:

- а) $A \subseteq A$;
- б) $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.



Определение 2

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов ($A=B$). Другими словами, обозначение $A=B$ служит сокращением для высказывания

$$(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Пример

Указать равные множества

$$A=\{0;1;2\}, \quad B = \{1;0;2\}, \quad C=\{0;1;2;0\},$$

$$D=\{\{1;2\};0\}, \quad E=\{1;2\}, \quad F=\{x:x^3-3x^2+2x=0\}.$$

Определение 3

Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента, то есть x не принадлежит этому множеству (для любого x).

Обозначение: \emptyset

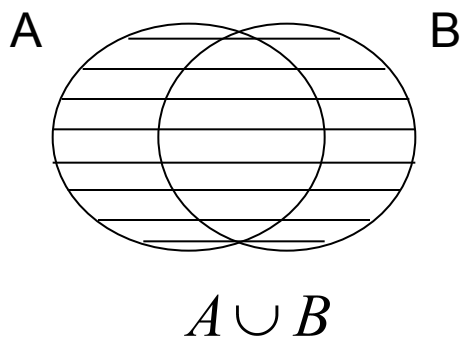
2. Операции над множествами

Определение 1

Объединением двух множеств A и B называется

$$\text{МНОЖЕСТВО } A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$



Пример

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, тогда
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

Объединение множеств

Теорема 1

Пусть A, B, C – произвольные множества. Тогда:

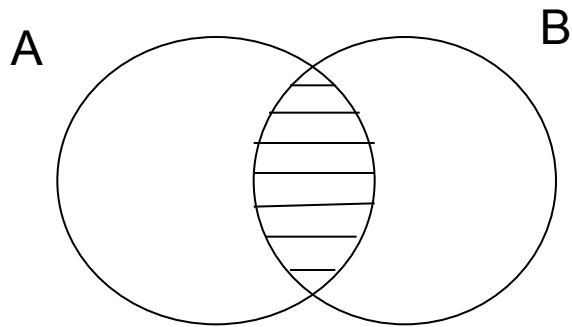
- а) $A \cup A = A$ – *идемпотентность* объединения;
- б) $A \cup B = B \cup A$ – *коммутативность* объединения;
- в) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – *ассоциативность* объединения;
- г) $A \cup \emptyset = A$;
- д) $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = B = \emptyset$

Пересечение множеств

Определение 2

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



$$A \cap B$$

Пример

Пусть $A = \{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$, тогда

$$A \cap B = \{1, 7, 8\}$$

Пересечение множеств

Теорема 2

Пусть A, B, C – произвольные множества, тогда:

а) $A \cap A = A$ - *идемпотентность* пересечения;

б) $A \cap B = B \cap A$ - *коммутативность* пересечения;

в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - *ассоциативность* пересечения;

г) $A \cap \emptyset = \emptyset$

Объединение и пересечение множеств

Теорема 3

$$1) \quad A \cap B \subseteq A$$

$$2) \quad A \subseteq A \cup B$$

$$3) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

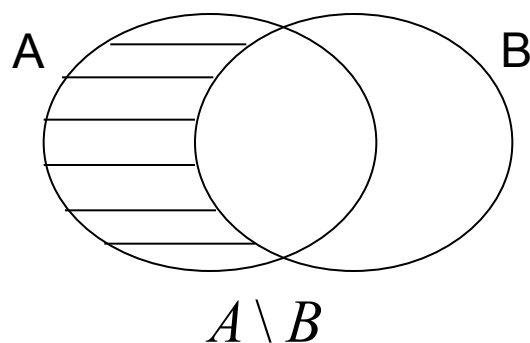
$$4) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Разность множеств, дополнение, симметрическая разность

Определение 3

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\} .$$



Пример

Пусть $A = \{1, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, тогда $A \setminus B = \{1, 8, 9, 10\}$,
 $B \setminus A = \{2, 5, 6\}$.

Разность множеств

Теорема 4

Пусть A, B, C – произвольные множества, тогда:

- 1) $A \setminus A = \emptyset$
- 2) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$
- 3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- 4) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Теорема 5 (законы Моргана)

- а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

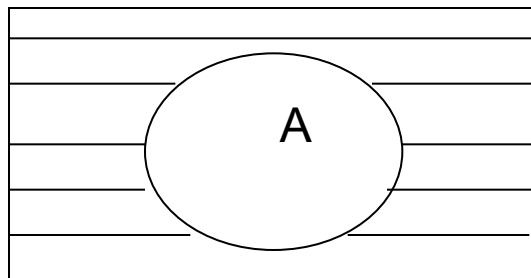
Множество U назовем "универсальным", если оно содержит все элементы и все множества являются его подмножествами. Понятие "универсального множества" у нас будет зависеть от круга задач, которые мы рассматриваем. Довольно часто под универсальным множеством понимают множество R — множество вещественных чисел или множество C — комплексных чисел. Возможны и другие примеры. Всегда в контексте необходимо оговорить, что мы понимаем под универсальным множеством U .

Дополнение множеств

Определение 4

Пусть U – универсальное множество. *Дополнением A в U* (или просто *дополнением A*) называется множество .

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



\bar{A}

Пример

Если U – множество вещественных чисел и A – множество рациональных чисел, то \bar{A} – множество иррациональных чисел

Дополнение множеств

$$1) \overline{\overline{A}} = A$$

$$2) \overline{U} = \emptyset$$

$$3) \overline{\emptyset} = U$$

Законы Моргана для дополнений

$$а) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad ;$$

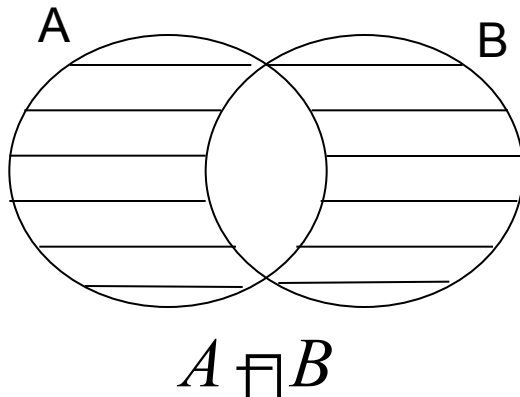
$$б) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad .$$

Симметрическая разность

- **Определение 5**

- Симметрической разностью множеств A и B называют множество

$$A \boxplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



- Задача (3 балла).

- Доказать, что $A \boxplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

- **Вопросы:**
- 1) Приведите пример множества, состоящего из 3 элементов. Опишите это множество свойством.
- 2) Перечислите все подмножества указанного множества. Чему равно их пересечение?

Лекция 5.

Тема: Вычисление множеств. Выражение множеств через данные.

Цель: Овладеть навыками вычисления множеств и выражения множеств через данные.

Вопросы:

- 1) Чему равно объединение и пересечение пустого и универсального множеств?
- 2) Выразить множество $\{1;4\}$ через данные:

$$A = \{1;3;5\}$$

$$B = \{2;5;4;6\}$$

$$C = \{1;2;3;7\}$$

$$U = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$$

Лекция 6.

Тема: Размещения.

Цель: Рассмотреть формулы для числа размещений без повторений и с повторениями.

Вопросы:

- 1) Является ли перестановка – размещением?
- 2) Сравнить выражения A_7^3 и A_3^7

Лекция 7.

Тема: Сочетания.

Цель: Разобрать формулы для числа сочетаний с повтором и без повтора. Освоить их применение при решении задач.

Вопросы:

- 1) Сравнить выражения C_n^k и A_n^k
- 2) Вычислить C_8^2

Лекция 8.

Тема: Случайное событие. Вероятность события.

Цель: Разобрать понятия опыта случайного события, вероятности. Обсудить условия применения классической формулы вероятности.

Вопросы:

- 1) Ответить на вопрос слайда №5.
- 2) Можно ли в задаче 3 (слайд №12) случай A_1 и A_4 объединить в один и применить классическую формулу? Почему?

Лекция 9.

Тема: Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Цель: Рассмотреть события и действия над ними на языке теории множеств. Разобрать теоремы сложения и умножения вероятностей.

Вопросы:

- 1) Чему равно произведение противоположных событий?
- 2) Описать множество элементарных событий для последнего примера.

Лекция 10.

Тема: Решение задач по классической формуле для подсчета вероятностей.

Цель: Привить навыки применения классической формулы вероятности.

Вопросы:

- 1) Каким условиям должны удовлетворять события, чтобы допустимо было применить классическую формулу вероятности.
- 2) Найти вероятность, угадать задуманное двузначное число с первого раза.

Лекция 11.

Тема: Решение задач с использованием теорем сложений
и умножения вероятностей.

Цель:

Вопросы:

Лекция 12.

Тема: Формула полной вероятности. Формула Бейеса.

Цель: Разъяснить формулу полной вероятности и как следствие из неё – формулу Бейеса.

Вопросы:

- 1) Каким условиям должны отвечать гипотезы H_i для события A ?
- 2) В примере 2 (слайд №13) найти вероятность того, что ошибся 2 студент?

Лекция 13.

Тема: Решение задач с использованием формулы полной вероятности и формулы Байеса.

Цель: Овладеть навыками решения задач по формулам полной вероятности и формуле Байеса.

Вопросы:

- 1) Чему равна сумма вероятностей гипотез H_i для события A ?
- 2) Чему равна сумма гипотез события A ?

Лекция 14.

Тема: Повторение опытов. Формула Бернулли.

Цель: Ознакомиться с формулой Бернулли и приближенными формулами в схеме Бернулли.

Вопросы:

- 1) Укажите условия применения формулы Бернулли.
- 2)

Лекция 0.

Тема: Метод математической индукции.

Цель: Научиться применять ММИ при доказательстве утверждений, свойств.

Вопросы:

- 1) Перечислить основные этапы доказательства ММИ.
- 2) Слайд №11.

Лекция 6.

Тема: Основные принципы комбинаторики.

Цель: Ознакомиться с основными принципами комбинаторики.

Вопросы:

- 1) Перечислите основные принципы комбинаторики.
- 2) Сколькими способами могут совершить обмен 1 диска два студента, если у одного 7 дисков, а у другого 5?