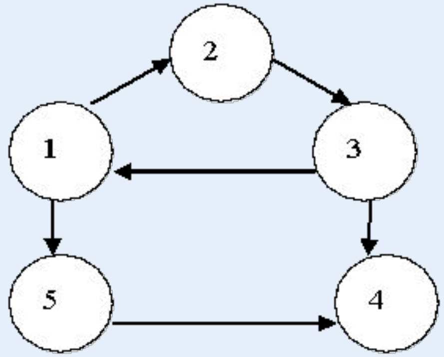
# Модели конфликтов

## Модели конфликтов с применением теории графов

Структура-совокупность связей между элементами системы

**Определение.** Пусть $X$ - конечное множество,
$(X,X)=\{(i,j): i,j\in X.i\neq j\}$

**Определение. Ориентированным графом** называется пара $G=(X,U), U\subset X\times X$, X- непустое множество, X – множество вершин, $U$ - дуги




**Определение. Неориентированным графом** называется пара $G=(V,E)$, где

$V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ конечное множество вершин,

$E=\{(v_i,v_j)\}$ множество ребер

**Путь** — это последовательность вершин $v_1$, $v_2$, …, $v_n$, для которой существуют дуги $v_1 \to v_2$, $v_2 \to v_3$, …, $v_{n-1} \to v_n$. Говорят, что этот путь начинается в вершине $v_1$, проходит через вершины $v_2$, $v_3$, …, $v_{n-1}$, и заканчивается в вершине $v_n$.

Путь называется:

- простым, если ни одна вершина не встречается более одного раза
- замкнутым, если $v_{t+1} = v_1$
- полным, если содержит все вершины из V

Контур**-** простой замкнутый путь в орграфе.

Вершина v достижима из вершины u, если существует путь из u в v (u→v).

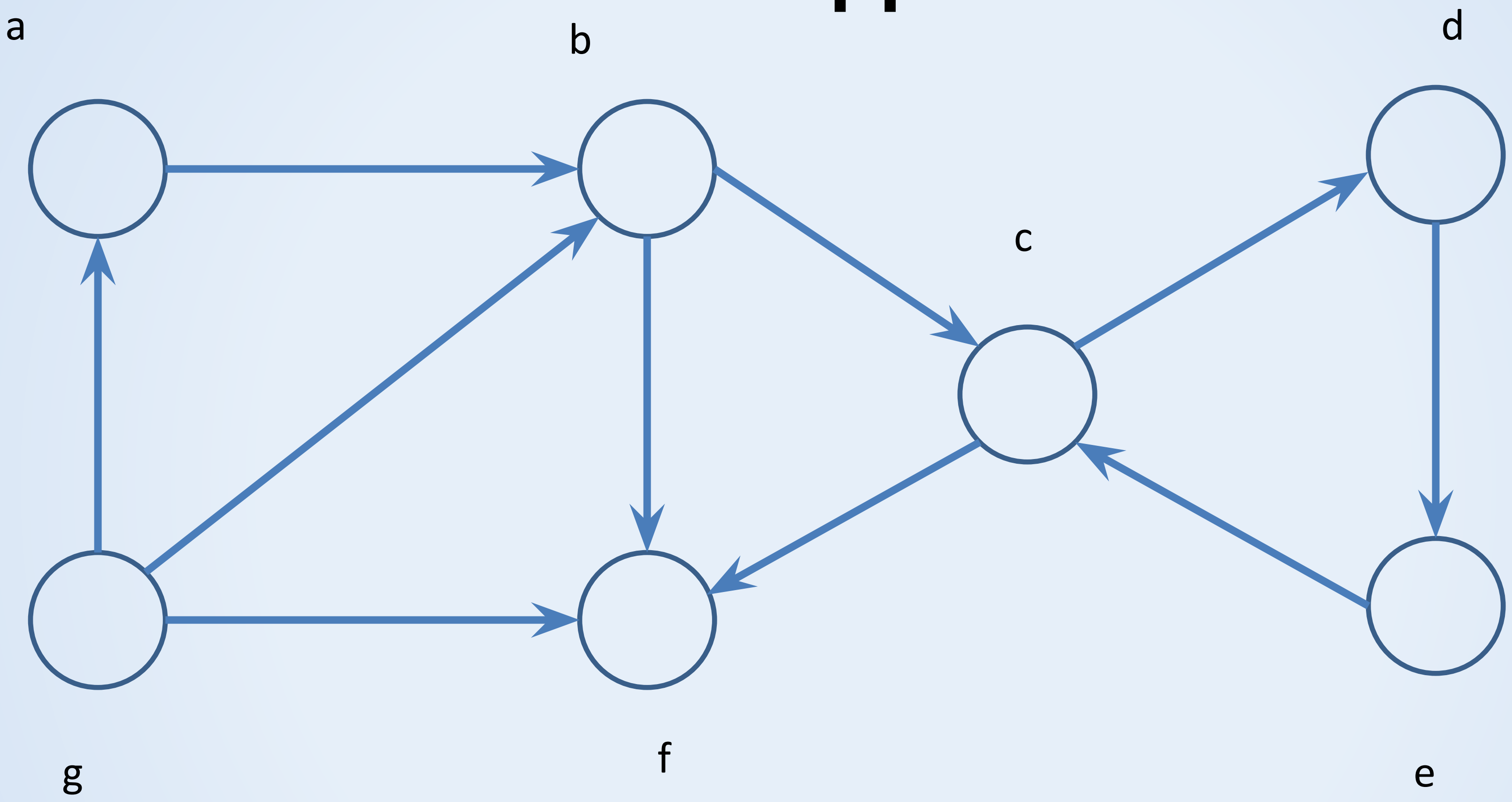
**Утверждение.** Если u→v, то существует простой путь из u в v .

Расстояние между u и v - длина кратчайшего пути (ρ(u,v))

Вершины соединимы, если существует полупуть из u в v (u→v).

Полупуть в орграфе G=(V,A) – последовательность вершин и дуг
$v_1, a_1, v_2, a_2, v_t, a_t, v_{t+1}$
$a_i$ – $(v_{i,} v_{i+1})$ или $(v_{i+1}, v_i)$

# Примеры путей различного вида



Цепью в графе G=(V,E) называется последовательность вершин и ребер $v_1,(v_1,v_2), v_2, (v_2,v_3),\ldots,(v_t,v_{t+1}),v_{t+1}$

Простая замкнутая цепь называется циклом

Граф называется связным, если для любых двух его вершин существует путь, их соединяющий; в противном случае граф называется несвязным.

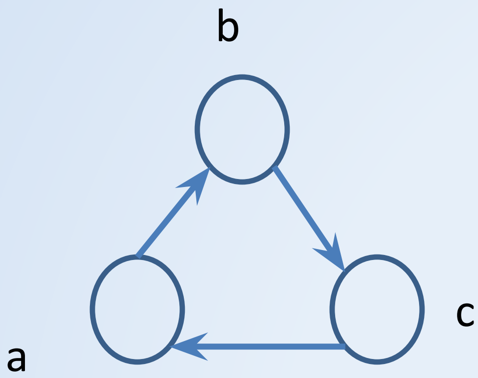
Дерево представляет собой связный граф без циклов, имеющий исходную вершину (корень) и крайние вершины; пути от исходной вершины к крайним вершинам называются ветвями.

**Утверждение.** Орграф сильно связен тогда и только тогда, тогда в нем имеется полный замкнутый путь.

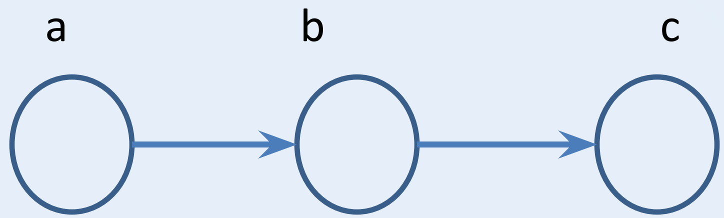
**Утверждение.** Орграф односторонне связен тогда и только тогда, тогда в нем имеется полный путь.

**Утверждение.** Орграф слабо связен тогда и только тогда, еогда в нем имеется полный полупуть.

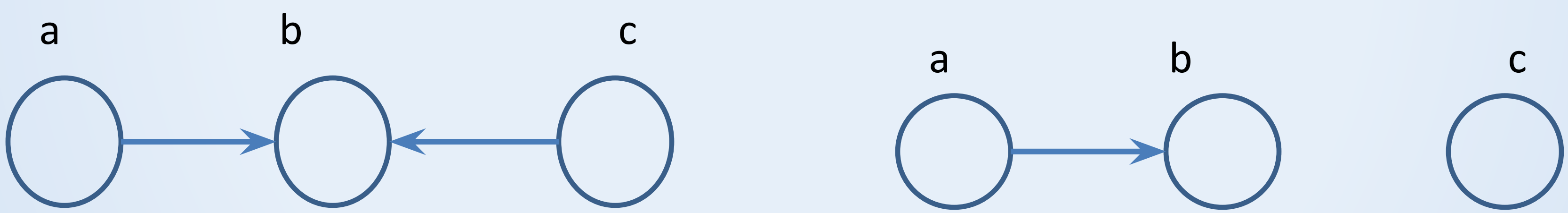
# Категории связности графов




а)




б)




в)

Матрица смежности орграфа G=(V,A) – матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \left(v_i, v_j\right) \in A \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Матрица достижимости R орграфа G=(V,A) – матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \to v_j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Матрица расстояний RO орграфа G=(V,A) – матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$\rho_{ij} = \rho_{ij}\left(v_i, v_j\right)$$

# Модели структурного баланса

Неориентированный граф G=(V,E)

Знак цепи в графе- произведение знаков ребер образующих цепь.

Модель структурного баланса – знаковый граф G=(V,E).

Положительный знак ребра (a,b) – симпатия между членами группы a и b

Отрицательный  знак ребра (a,b) – антипатия между членами группы a и b

# Ограничения базовой модели:

Симпатия не обязательно симметрична

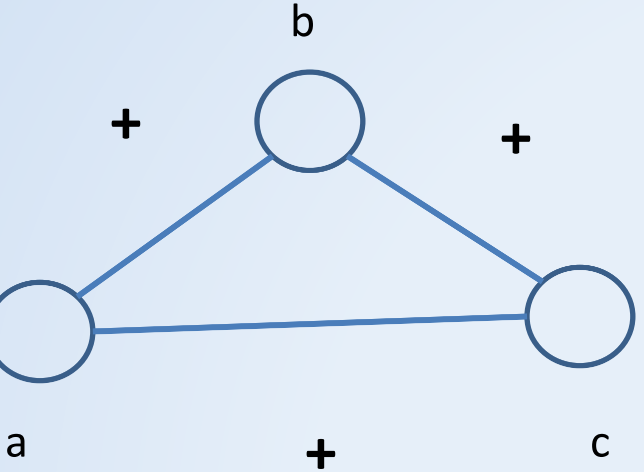
Модель не  учитывает силу  отношения симпатии (антипатии)

Модель не учитывает степени сбалансированности (несбалансированности)  социальной группы в целом.

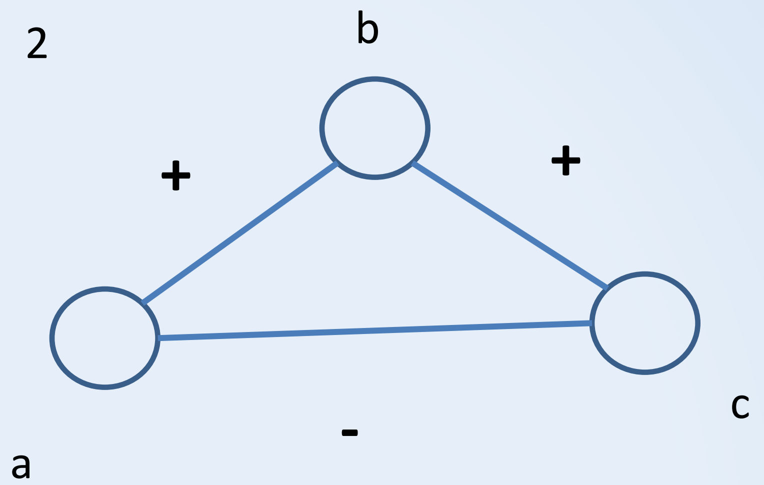
Модель не учитывает типы сбалансированности (несбалансированности)

# Типы отношений в группах из трех человек

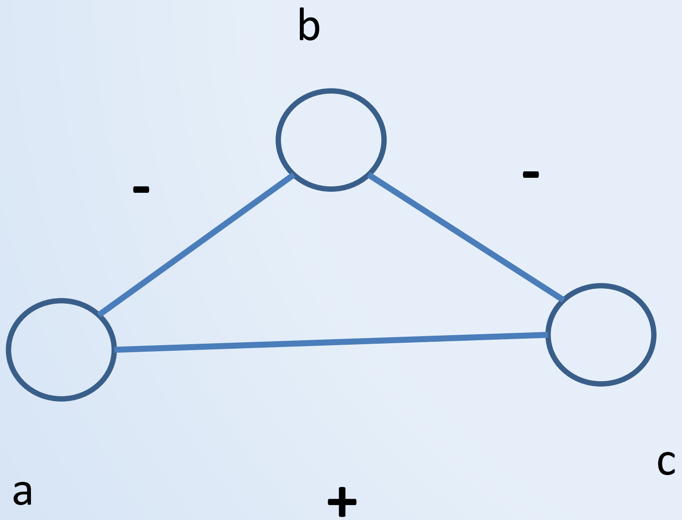
1



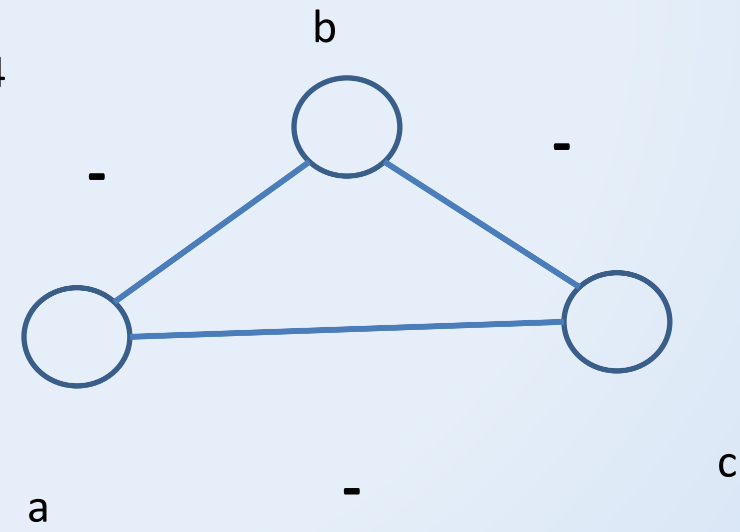

2



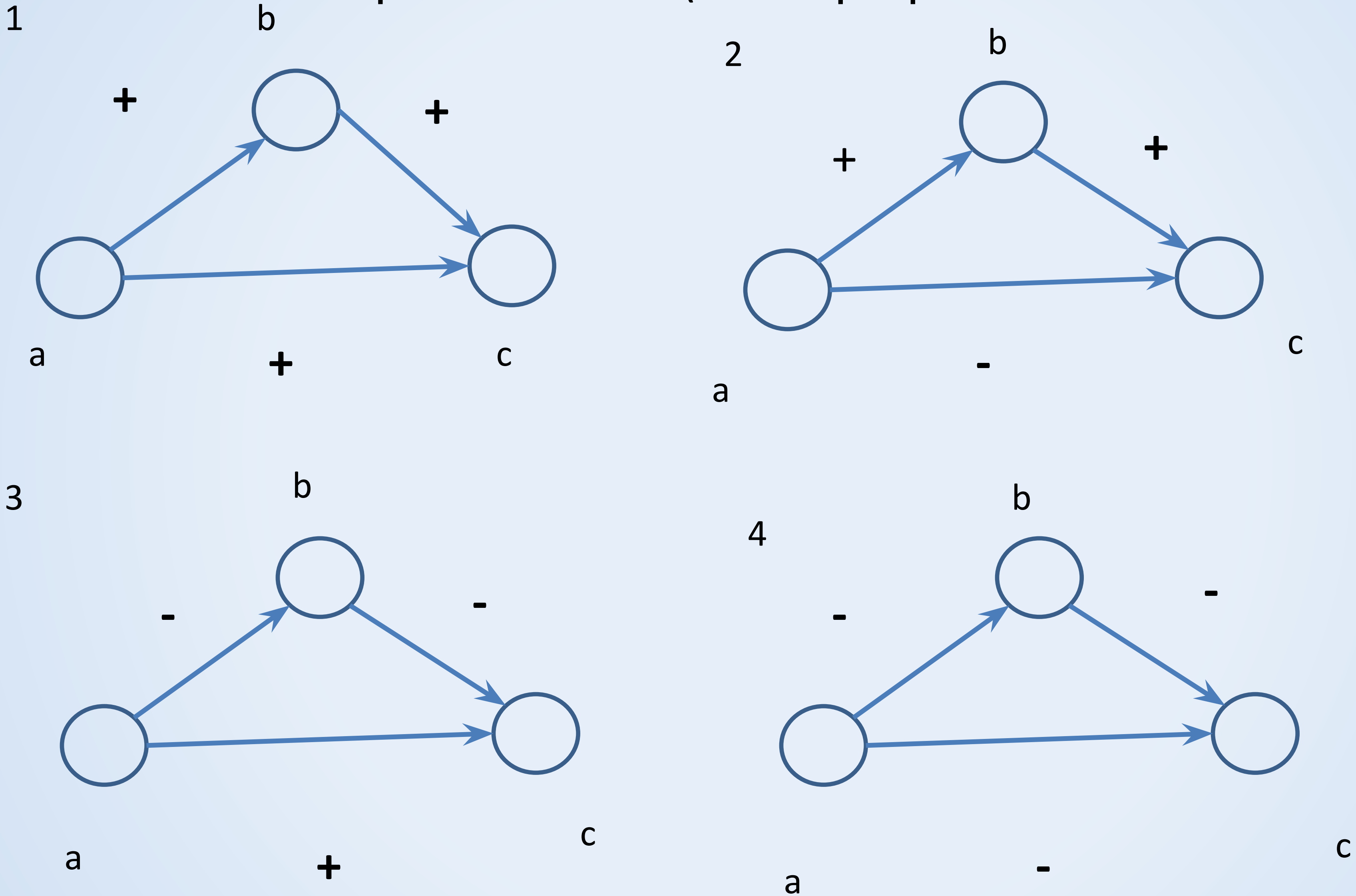

3




4



# Устойчивые конфигурации в модели направленных отношений из трех человек (монография В.А. Светлова 2001)



# Граф G сбалансирован, если он не содержит отрицательных циклов.

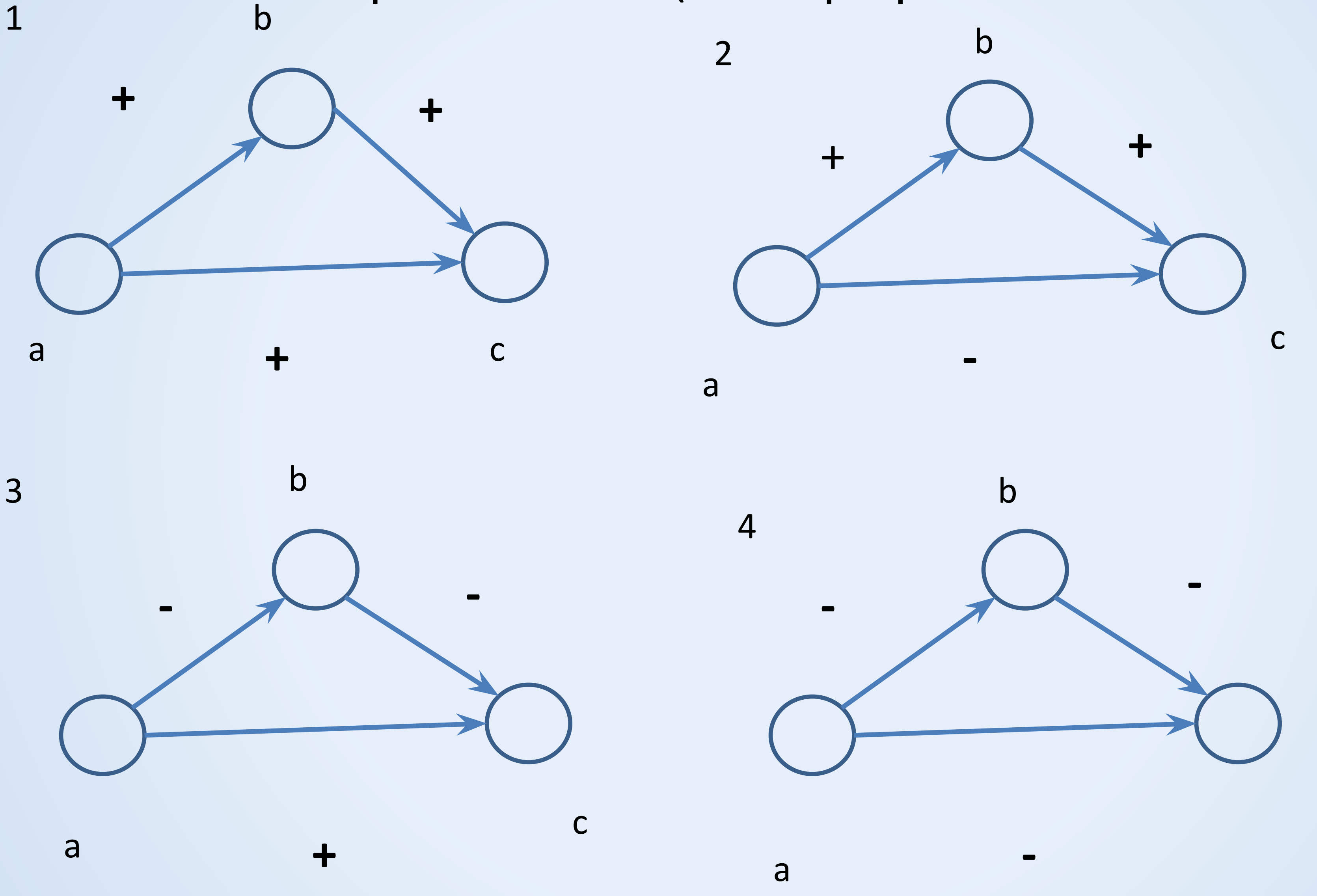
Теорема (Харари).

Для знакового графа G=(V,A) следующие утверждения эквивалентны:

- граф G сбалансирован;
- Любые две цепи между вершинами u и v имеют одинаковый знак;
- множество V можно разбить на 2 непересекающихся множества A и B так, что каждое «+» ребро соединяет вершины из одного множества и каждое «-» ребро соединяет вершины из различных множеств.

Граф G сбалансирован, если он не содержит отрицательных полуконтуров

# Устойчивые конфигурации в модели направленных отношений из трех человек (монография В.А. Светлова 2001)

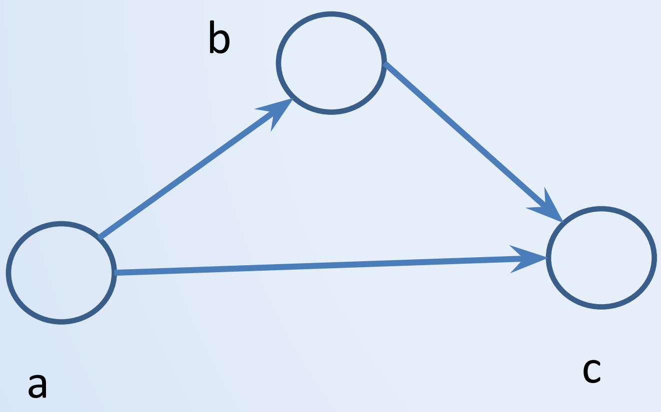


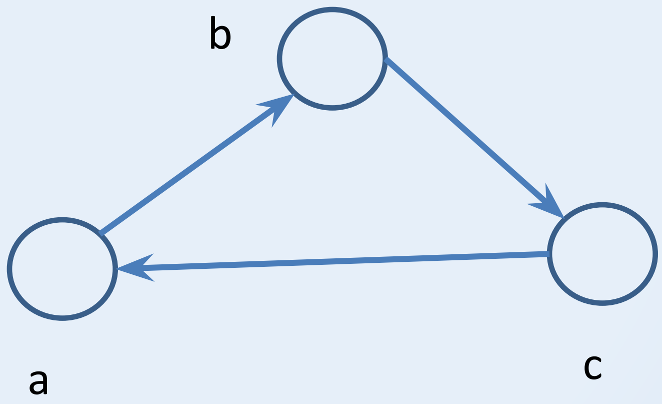
# Конфликты альтернатив

Орграф T=(V,A) называется турнирным, если для любой пары вершин $u,v \in V$ существует ровно одна дуга $(u,v) \in A$ либо $(v,u) \in A$

Победитель турнира:

$$s(u^*) = \max_{u \in V} s(u)$$




**Утверждение.** В турнире существует полный простой путь.

s(u) – число выходных дуг для вершины u

# Статусные конфликты

Математическая модель – связный бесконтурный орграф $D=(V,A)$

Дуга $(u,v)$

Путь от $u$ до $v$

Длина кратчайшего пути от $u$ до $v$ – уровень $v$ относительно $u$

$t_D: V \to Z_+$

$1^0$. Если вершина $u$ не имеет выходных дуг, то $t_D(u)=0$.

$2^0$. D', D, u, то $t_{D'}(u)>t_D(u)$

$3^0$. D', D, u, v, то $t_{D'}(u)>t_D(u)$

$$h_D(u)=\sum_k k n_k(u)$$

$$n_k(u)$$

Теорема (Кемени-Снелл). Мера статуса $h_D(u)$ обладает следующими свойствами:

1) Удовлетворяет $1^0$- $3^0$
2) Если $t_D$ - некоторая мера статуса, принимающая неотрицательные численные значения и удовлетворяющая $1^0$- $3^0$, то для любой $u$ - $t_D(u)> h_D(u)$

Если $u\to v$, то уровень $v$ относительно $u$- длина максимального пути от $u$ до $v$

$V=L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_m,\ L_p \cap L_q = \varnothing$

Упорядоченные разбиения-расслоения

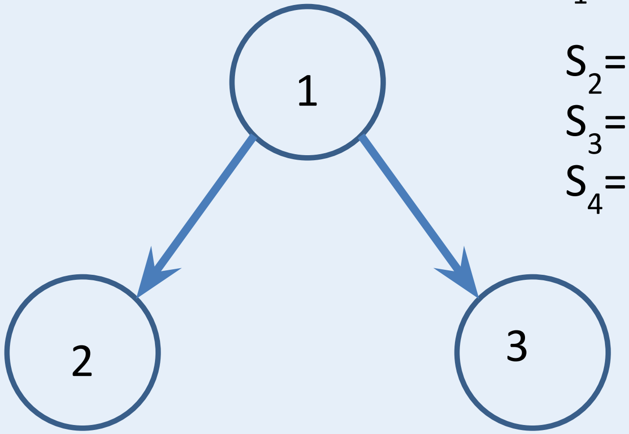
Мера статуса сотрудника u в организации D:

$$G_D^S(u) = \sum_{k=1}^{m} (k-p) b_k(u)$$

u- принадлежит слою $L_p$ в расслоении S

$b_k(u)$ – число вершин в слое $L_k$, достижимых из u

m – число слоев в расслоении S




$S_1=L_1 \cup L_2,\ L_1=\{1\}, L_2=\{2,3\}$

$S_2=L_1 \cup L_2,\ L_1=\{1,2\}, L_2=\{3\}$

$S_3=L_1,\ L_1=\{1,2,3\}$

$S_4=L_1 \cup L_2,\ L_1=\{2\}, L_2=\{1,3\}$

$S_5=L_1 \cup L_2 \cup L_3$

| S | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $G^S(u)$ | 2 | 1 | 0 | -1 | -3 |

# Когнитивные карты конфликтных процессов

Элементы системы. Обозначаются вершинами орграфа

Значимые связи обозначают дугами. (u,v) – элемент u непосредственно влияет на элемент v.

Элементам могут приписываться числовые значения.

Дуга (u,v) : «+» или «-»

Обратные связи - контуры

Два типа контуров: положительные (положительная обратная связь) и отрицательные (отрицательная обратная связь)

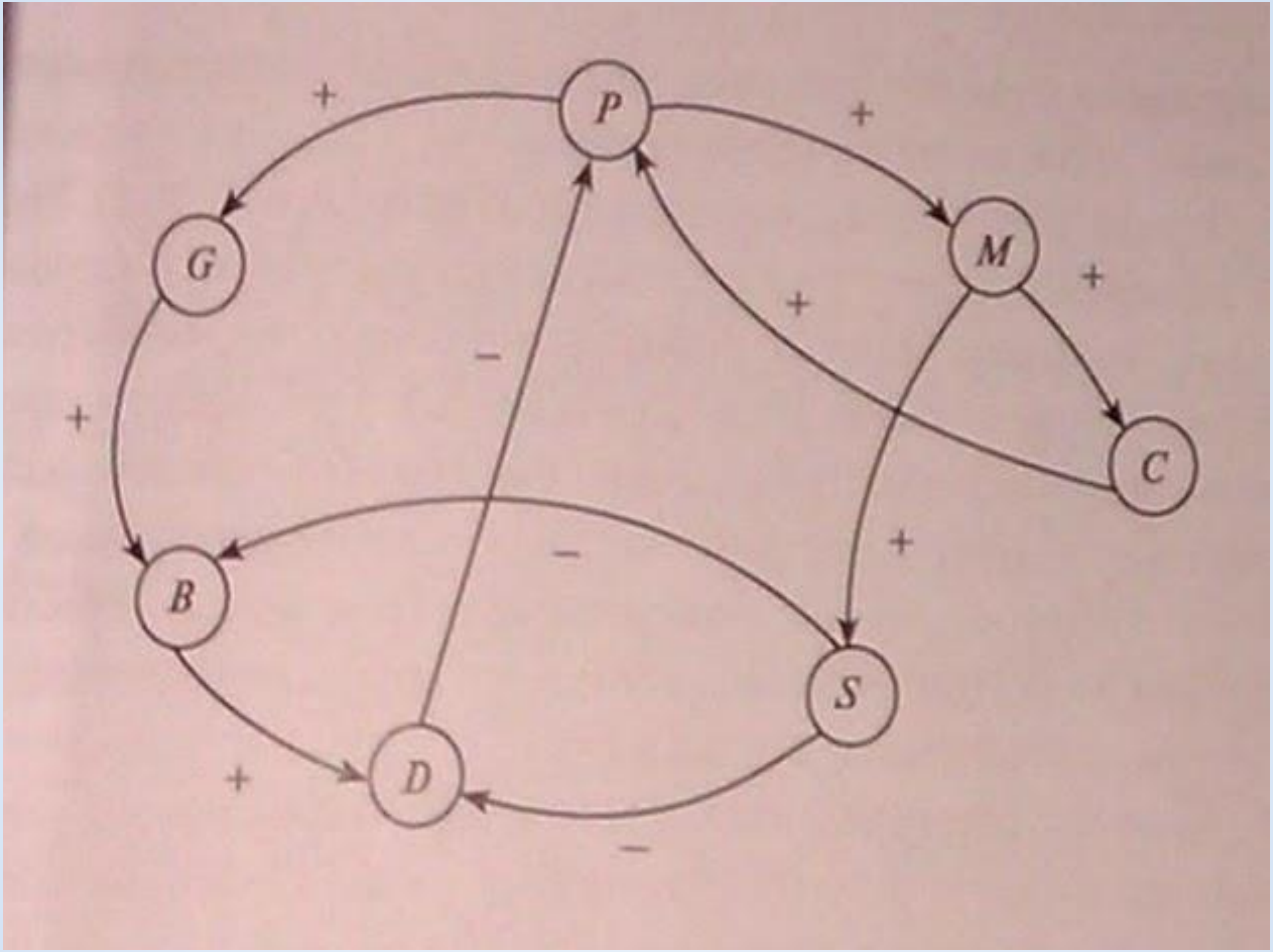
Контур усиливает отклонение тогда и только тогда, когда он положителен.

$$R = \sum_{i=1}^{m} R_i$$

| | Система бесконфликтна | Система конфликтна |
|---|---|---|
| Система устойчива | -1<R<0 | 0≤R≤1 |
| Система неустойчива | ∞<R≤-1 | 1≤R≤∞ |

# Пример

- P- численность городского населения
- G-количество мусора на единицу площади
- B – бактериологическая зараженность на единицу площади
- D –число заболеваний
- S – число очистных сооружений
- C –миграция в город
- M –улучшение условий жизни в городе


P
G
M
C
B
S
D
+
+
+
+
+
+
+
–
–
–

# Сетевое планирование и управление

**Сетевое планирование и управление (СПУ)** – это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения сложных проектов и разработок

**Объект управления** - коллективы исполнителей, располагающие определенными ресурсами и выполняющие комплекс операций, который призван обеспечить достижение намеченной цели, например разработку новой услуги – исследование системы управления, реализацию комплекса управленческих процедур и операций для достижения стратегической организации и др.

Комплекс работ (комплекс операций, или проект) - любая достаточно сложная задача, решение которой требует выполнения большого количества разнообразных работ

Сетевая модель - это план выполнения некоторого комплекса работ, заданный в специфической форме сети (дугам поставлены в соответствие интервалы времени), графическое изображение которой называют *сетевым графиком.*

## Работа

действительная работа - протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов

ожидание - протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда

зависимость, или фиктивная работа, - логическая связь между двумя или несколькими работами, не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени.

## Событие

момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта

может быть частным результатом отдельной работы или суммарным результатом выполнения нескольких работ

# Общие черты и особенности проектов

- Проект определяется множеством работ. Проект завершен, если все работы выполнены
- Для каждой работы указано подмножество работ, которые обязательно должны выполняться
- Для каждой работы в простейшем случае точно указано время ее выполнения
- Начатая работа  продолжается без перерыва до завершения. Последующая работа не может начинаться, пока не завершена предыдущая работа
- Цели – выполнить проект в кратчайшие сроки , не превышающие заданную величину с минимальными затратами каких-то ресурсов

## Путь

любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей работы

## Критический путь

| | |
|---|---|
| наиболее продолжительный путь в сетевом графике | работы этого пути определяют общую продолжительность работы над проектом |

# Метод критического пути

1.Список работ, входящих в проект: $S = \{s_1, .., s_n\}$

Продолжительность выполнения: $t(s_i)$.

2. Список предшествующих работ $\Gamma^{-1}(s_i)$

**Определение.** Наиболее ранним возможным сроком наступления j-го события является наиболее ранний возможный срок завершения всех работ, подходящих к j-му узлу

$\lambda_j^p$ -наиболее ранний возможный срок наступления, $t_{ij}$ - продолжительность работы, $\lambda_0^p = 0$

$$\lambda_j^p = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} \{\lambda_i^p + t_{ij}\}, j = 1,2,..,n \qquad (1)$$

$$T_{кр} = \lambda_n^p$$

## Резерв времени и критический путь

**Определение.** Наиболее поздним допустимым сроком наступления i-го события является наиболее поздний срок завершения всех работ, идущих к i-му узлу, не влияющий на время завершения всего проекта за $T_{\text{кр}}$, $T_{\text{кр}} = \lambda_n^{\text{п}}$

Начинаем с события n до 0:

$$\lambda_i^{\text{п}} = \min_{j \in \Gamma_i} \left\{ \lambda_j^{\text{п}} - t_{ij} \right\} \qquad (2)$$

$j^*(i)$ - номер, при котором достигается минимум.

**Определение.** Полный резерв времени $r_{ij}^{\text{п}}$ для работы (i,j) есть максимальная продолжительность задержки работы, не вызывающая задержки в осуществлении всего проекта.

$$r_{ij}^{\text{п}} = \lambda_j^{\text{п}} - \lambda_i^{\text{р}} - t_{ij}$$

**Определение.** Свободный резерв времени $r_{ij}^{\text{с}}$ для работы (i,j) является показателем максимальной задержки работы (i,j) , не влияющий на начало последующих работ

$$r_{ij}^{\text{с}} = \lambda_j^{\text{р}} - \lambda_i^{\text{р}} - t_{ij}$$

**Определение.** Независимый резерв времени $r_{ij}^{\text{н}}$ для работы (i,jпредставляет собой максимальную продолжительность задержки работы (i,j) без задержки последующих работ, если все предшествующие работы заканчиваются как можно позже.

$$r_{ij}^{\text{н}} = \max\left\{0, \lambda_j^{\text{р}} - \lambda_i^{\text{п}} - t_{ij}\right\}$$

**Утверждение 1.** Полный резерв работ, лежащих на критическом пути равен нулю.

**Утверждение 2.** Увеличение продолжительности некритических работ за счет использования всего ее полного резерва обязательно влечет появление нового критического пути, в который войдет эта работа.

Резервы связаны соотношением:

$$r_{ij}^{\text{н}} \le r_{ij}^{\text{с}} \le r_{ij}^{\text{п}}$$

# Поиск нового критического пути

Работа (k,l)

- Узел с номером k принадлежит новому критическому пути
- Если узел с номером j ($j \leq k$) принадлежит критическому пути, то номер предшествующего узла равен i(j) (формула (1))
- Начальный узел всегда имеет номер 0
- Узел с номером l принадлежит новому критическому пути
- Если узел с номером ($j \geq l$) принадлежит критическому пути, то номер следующего за ним узла равен i*(j) (формула (2) )
- Конечный узел всегда имеет номер n

# Оптимизация плана комплекса работ

Продолжительность работы (i,j) $y_{ij}$ принадлежит $\left[L_{ij}, U_{ij}\right]$

Затраты на выполнение работы $b_{ij} - a_{ij} y_{ij}, a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0$

Желаемая продолжительность исполнения проекта $T_0$

$t_i$ - неизвестный момент наступления события i

Математическая модель:

$$\sum_{(i,j)\in S} a_{ij} y_{ij} \to \max_{t_i, y_{ij}}$$

$$t_i - t_j + y_{ij} \leq 0, \quad (i, j) \in S$$

$$-t_0 + t_n \leq T_0,$$

$$L_{ij} \leq y_{ij} \leq U_{ij}, \quad (i, j) \in S$$

# Правила построения

В сетевой модели не должно быть «тупиковых» событий, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.

В сетевом графике не должно быть «хвостовых» событий, т.е. событий, которым не предшествует хотя бы одна работа, за исключением исходного.

В сети не должно быть контуров и петель, т.е. путей, соединяющих некоторые события с ними же самими.

Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой (стрелкой). Чтобы выполнить это требование, в некоторых случаях приходится вводить *фиктивное событие и фиктивную работу, изображаемую на графике пунктирной линией.*

В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.

Сетевой график должен быть упорядочен