

Модели в виде систем одновременных уравнений

Проблемы построения моделей из одновременных уравнений

1. Авторегрессия

Рассмотрим элементарную макроэкономическую модель

$$\left. \begin{aligned} C_t &= a_0 + a_1 Y_t + u_t \\ Y_t &= C_t + I_t \\ M(u_t) &= 0 \\ \sigma^2(u_t) &= \sigma_u^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

В приведенной форме модель (1.1) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} C_t &= \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{a_1}{1-a_1} I_t + \frac{2-a_1}{1-a_1} u_t \\ Y_t &= \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_1} I_t + \frac{1}{1-a_1} u_t \\ M(u_t) &= 0 \\ \sigma^2(u_t) &= \sigma_u^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Из (1.2) видно, что $\text{COV}(Y_t, u_t) \neq 0$

Проблемы построения моделей из одновременных уравнений

2. Проблема идентификации уравнений

Пример. Имеем элементарную модель конкурентного рынка

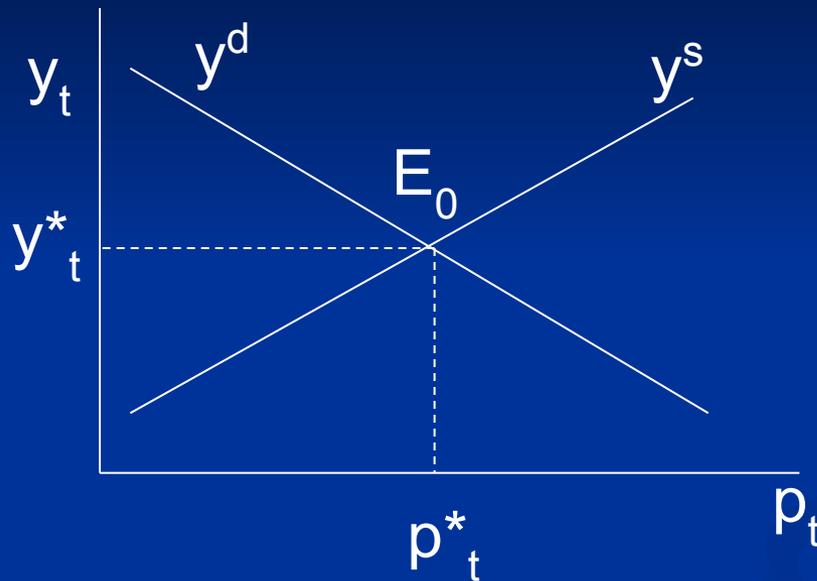
$$\left. \begin{aligned} y_t^d &= a_0 + a_1 \cdot p_t \\ y_t^s &= b_0 + b_1 \cdot p_t \\ y_t^d &= y_t^s, \\ a_1 &< 0, b_1 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

По результатам наблюдений необходимо получить оценки параметров a_0, a_1, b_0, b_1

Что доступно для наблюдений? Равновесная цена p^*_t и соответствующие ей уровни спроса и предложения, причем $Y_t^s = Y_t^d = Y_t^*$

Проблема идентификации уравнений

Графически это выглядит так



Из приведенной формы уравнений модели видно

$$\left. \begin{aligned} p_t^* &= \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} \\ y_t^* &= \frac{a_0 b_1 - b_0 a_1}{b_1 - a_1} \end{aligned} \right\}$$

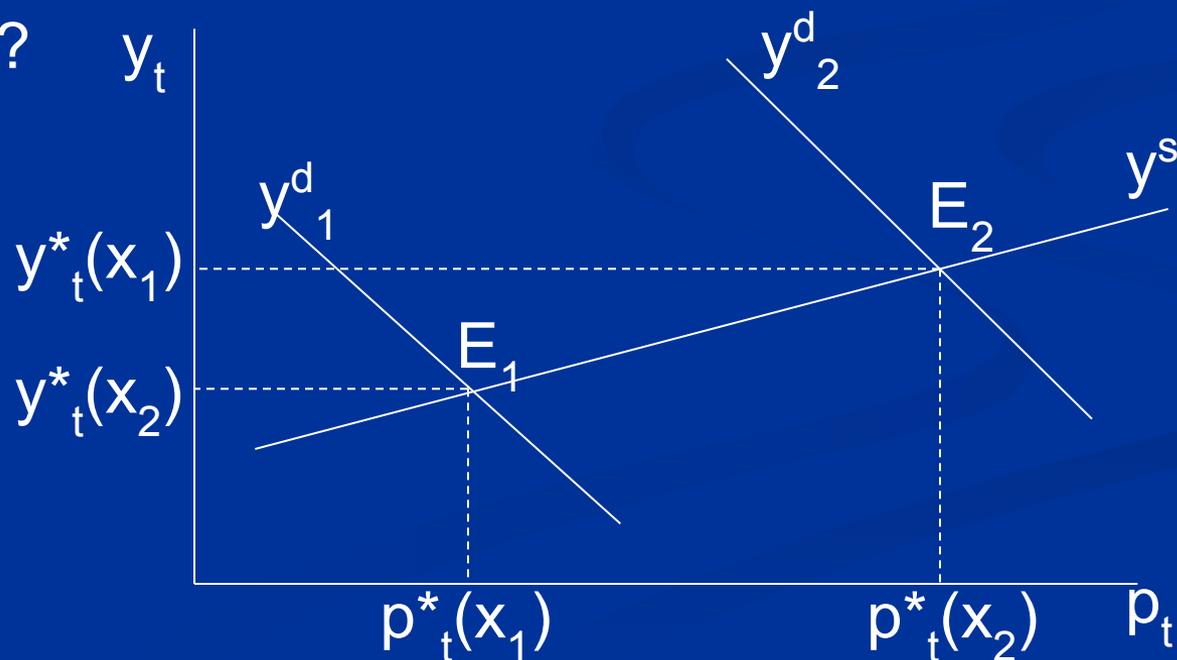
Проблема идентификации уравнений

Вопрос. Как преодолеть эту проблему?

Вспомним, что на спрос влияет располагаемый доход

$$\left. \begin{aligned} y_t^d &= a_0 + a_1 \cdot p_t + a_2 x_t \\ y_t^s &= b_0 + b_1 \cdot p_t \\ y_t^d &= y_t^s, \\ a_1 < 0, b_1 > 0 \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Что это дает?



Проблема идентификации уравнений

Вывод. Введение в первое уравнение системы (2.1) дополнительной экзогенной переменной x_t привело к тому, что второе уравнение стало идентифицируемо.

Правило. Для устранения проблемы идентификации необходимо:

1. Дополнить уравнения системы дополнительными predetermined переменными

2. Дополнительные переменные включаются в уравнения смежные с неидентифицируемыми

Идентифицируемая модель конкурентного рынка

$$\left. \begin{aligned} y_t^d &= a_0 + a_1 \cdot p_t + a_2 x_t + u_t \\ y_t^s &= b_0 + b_1 \cdot p_{t-1} + v_t \\ y_t^d &= y_t^s, \\ a_1 < 0, b_1 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Проблема идентификации уравнений

Остаются вопросы:

1. Как определить, какие уравнения в модели являются неидентифицируемые

2. Как определить, какие уравнения в модели идентифицируемые

Проблема идентификации уравнений

Ответ на первый вопрос дает теорема, которая имеет название «правило порядка» и формулирует необходимое условие идентифицируемости i -го уравнения модели

Общий вид каждого уравнение модели в структурной форме можно записать как:

$$a_{i1} \cdot y_{1t} + \dots + a_{ii} \cdot y_{it} + \dots + a_{iG} \cdot y_{Gt} + b_{i1} \cdot x_{1t} + \dots + b_{iK} \cdot x_{Kt} = u_{it} \quad (2.4)$$

где: G – количество эндогенных переменных в модели

K – количество predetermined переменных в модели

Проблема идентификации уравнений

Необходимое условие идентифицируемости

Теорема 1. Пусть i -ое уравнение модели (2.4) идентифицируемо. Тогда справедливо неравенство

$$M_i(\text{пред}) \geq G - M_i(\text{энд}) - 1. \quad (2.5)$$

В нём:

$M_i(\text{пред})$ – количество predetermined переменных модели, **не включённых** в i -ое уравнение;
 $M_i(\text{энд})$ – количество эндогенных переменных модели, **не включённых** в i -ое уравнение.

Проблема идентификации уравнений

Замечание. Справедливость неравенства (2.5) является **необходимым условием** идентифицируемости i -го уравнения. Это значит, что, когда неравенство (2.5) несправедливо, то i -ое уравнение заведомо **неидентифицируемо**. Однако при выполнении неравенства (2.5) ещё нельзя сделать вывод о идентифицируемости данного уравнения.

Условие (2.5), именуемое **правилом порядка**, позволяет выявлять неидентифицируемые уравнения модели, но не даёт возможности отмечать её идентифицируемые уравнения.

Определение неидентифицируемых уравнений производится методом «от противного»: **если условие (2.5) не выполняется для i -го уравнения, то оно неидентифицируемо**

Проблема идентификации уравнений

Задача. Показать, что оба уравнения модели (2.3) не являются идентифицируемыми

$$\left. \begin{aligned} y_t^d &= a_0 + a_1 \cdot p_t + a_2 x_t + u_t \\ y_t^s &= b_0 + b_1 \cdot p_{t-1} + v_t \\ y_t^d &= y_t^s \\ a_1 < 0, b_1 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Здесь:

(y_t^d, y_t^s, p_t) – эндогенные переменные ($G=3$)

$(1, x_t, p_{t-1})$ – предопределенные переменные ($K=3$)

Для первого уравнения: $M(\text{пред})=1$, $M(\text{энд})=1$, $M(\text{пред})=G-M(\text{энд})-1$

Для второго уравнения: $M(\text{пред})=1$, $M(\text{энд})=2$, $M(\text{пред}) > G-M(\text{энд})-1$ ($1 > 3-2-1$)

Проблема идентификации уравнений

Введем еще несколько понятий, связанных с уравнением (2.4)

$$\bar{a}_i = (y_{1t}, \dots, y_{Gt}; x_{1t}, \dots, x_{Kt})^T \quad (2.6) \quad \text{- Набор переменных модели}$$

Матрица $A = (a_{ij})$ является не вырожденной и будем считать, что любое уравнение (2.4) может быть решено относительно y_i и приведено к нормализованному виду ($a_i=1$)

Определение. Ограничениями называется система из L_i линейных однородных алгебраических уравнений

$$R_i \cdot \bar{a}_i = 0 \quad (2.7)$$

которым априорно удовлетворяет вектор набора переменных (2.6) коэффициентов i -го уравнения

Проблема идентификации уравнений

Пример. Модель конкурентного рынка (2.3)

$$\left. \begin{aligned} y_t^d &= a_0 + a_1 \cdot p_t + a_2 x_t + u_t \\ y_t^s &= b_0 + b_1 \cdot p_{t-1} + v_t \\ y_t^d &= y_t^s, \\ a_1 < 0, b_1 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Коэффициенты её первого уравнения, такие:

$$a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{13} = -a_1, b_{11} = -a_0, b_{12} = -a_2.$$

Следовательно, вектор этих коэффициентов

$$a_1 = (1, 0, -a_1, -a_0, -a_2)^T \quad (2.8)$$

заведомо удовлетворяет одному ($L_1 = 1$) ограничению которое можно представить в форме линейного однородного уравнения (2.7) относительно компонентов вектора (2.6) с матрицей $R_1 = (0, 1, 0, 0, 0)$

$$R_1 \cdot a_1 = (0, 1, 0, 0, 0) \cdot (1, 0, -a_1, -a_0, -a_2)^T = 0$$

Проблема идентификации уравнений

Обозначим символом \bar{A} расширенную матрицу коэффициентов структурной формы модели

$$\bar{A} = (A \mid B) \quad (2.8)$$

Теорема. (Правило ранга) i -ое уравнение модели (2.4) идентифицируемо тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\text{rk}(\bar{A} \cdot R_i^T) = G - 1. \quad (2.9)$$

В нём символом rk обозначен ранг произведения матриц (2.8) и R_i^T

Условие (2.9) является необходимым и достаточным для идентифицируемости i -го уравнения модели

Проблема идентификации уравнений

Пример. Проиллюстрируем процедуру использования критерия (2.9) на примере уравнений модели (2.11).

$$\left. \begin{aligned} y_t^d &= a_0 + a_1 \cdot p_t + a_2 x_t + u_t \\ y_t^s &= b_0 + b_1 \cdot p_t + v_t \\ y_t^d &= y_t^s, \\ a_1 < 0, b_1 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Ее расширенная матрица

$$\bar{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -a_1 & -a_0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (2.10)$$

Отметим, что для третьего уравнения модели (2.3) условие нормализации не выполняется. Однако это уравнение является тождеством, к которому проблема идентификации не имеет отношение.

Проблема идентификации уравнений

Для первого уравнения модели (2.11) :

Вычисляем значение критерия (2.9)

$$\bar{A} \bullet R_1^T = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -a_1 & -a_0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad rk \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \quad (2.12)$$

Проверяем условие (2.9): $rk = G - 1 = 3 - 1 = 2$, следовательно, первое уравнение модели (2.11) **неидентифицируемо**

Проблема идентификации уравнений

Для второго уравнения модели (2.11) имеем:

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем значение критерия (2.9)

$$\bar{A} \cdot R_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1 & -a_0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad rk \begin{pmatrix} 1 & -a_2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Проверка условия (2.9): $rk = G - 1 = 2 = 3 - 1 = 2$, следовательно, второе уравнение модели (2.11) **идентифицируемо**

Проблема идентификации уравнений

Замечания.

1. Если условие (2.9) выполняется точно:

$$\text{rk}(\bar{A}R^T_i) = G-1,$$

то уравнения модели **точно идентифицированы**

2. Если условие (2.9) выполняется не точно:

$$\text{rk}(\bar{A}R^T_i) > G-1,$$

то уравнения модели **сверхидентифицированы**