Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 22.

Тема: Моделирование потребительского поведения и спроса.

Цель: Рассмотреть модель поведения потребителя, функции полезности и ее свойства, ознакомиться с кривыми безразличия.

Аксиомы

1)Ненасыщаемость
2)Совершенность
3)Транзитивность
4)Рефлексивность

Ненасыщаемость.

- Больший набор всегда предпочитается меньшему. Если

$$\overline{X} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \geq Y\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$$

, то $\overline{X} \succ \overline{Y}$

Совершенность.

- В отношении двух наборов $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ потребитель может однозначно определить, предпочитает $\overline{Y}$ он набор $\overline{X}$ набору $\overline{Y}$, набор предпочитает, или они для него равнозначны (эквивалентны).

- Это означает, что не существует таких наборов, которые потребитель не мог бы сравнить с другими.

- После упорядочения отношений потребителя к отдельным наборам благ строится функция предпочтений или функция порядковой полезности. Другими словами, на множестве потребительских наборов определяют функцию полезности

$$U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$$

потребителя.

Полезность

- **В теории полезности понятие полезность означает не что иное как порядок предпочтения. Потребитель выбирает предпочтительный набор благ из всех доступных для него.**

Функция полезности

- является индикатором предпочтения, поскольку она обладает следующим характеристическим свойством:

$$\overline{X} \succeq \overline{Y}$$

тогда и только тогда, когда

$$U(x_1, x_2, \ldots x_n) \geq U(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

- рассматривается как некоторая монотонно возрастающая функция, определенная на множестве потребительских наборов

- Геометрическим образом функции полезности является гиперповерхность в n+1 – мерном пространстве, где n измерений образуют блага, n+1 измерение характеризует полезность каждого из соотношений благ при потреблении.

Чаще всего применяются

- линейная,

-квадратичная

-логарифмическая функции вида

$$U(\overline{x}) = c_0 + \sum_{1}^{n} c_j \log(x_j - x_j^0)$$

- В качестве примера приведем конкретную квадратичную функцию полезности для трех агрегированных групп товаров, построенную на основе обработки данных бюджетной статистики

$$U(\bar{x}) = (1 - 1{,}841c)x_1 + (1 - 2{,}054c)x_2 + (1 - 2{,}116c)x_3 +$$
$$+ 0{,}668\left(10^{-4}\right)x_1^2 + 1{,}230\left(10^{-4}\right)x_1 x_2 +$$
$$+ 1{,}243\left(10^{-4}\right)x_1 x_3 + 0{,}506\left(10^{-4}\right)x_2^2 +$$
$$+ 1{,}104\left(10^{-4}\right)x_2 x_3 + 0{,}492\left(10^{-4}\right)x_3^2 ,$$

Свойства функции полезности

- 1. С ростом потребления любого блага полезность растет. Частные производные функции полезности, определяющие предельную полезность всегда положительны

$$MU_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} > 0.$$

- 2. Небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность

$$\lim_{x_i \to 0} \frac{\partial U}{\partial x_i} = \infty.$$

3. Предельная полезность каждого блага уменьшается, если объем его потребления растет, то есть каждая дополнительная единица приобретенного блага используется менее эффективно. Скорость роста полезности замедляется. В этом случае вторые производные функции полезности отрицательны $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} < 0$

- 4. При очень большом объеме блага его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности

$$\lim_{x_i \to \infty} \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$$

- **5.** Предельная полезность каждого блага увеличивается, если растет количество другого блага. В этом случае смешанные производные второго порядка положительны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} < 0 .$$

Здесь благо, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным, поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и используется более эффективно. Данное свойство справедливо не для всех благ. Если блага могут полностью замещать друг друга в потреблении, то это свойство не выполняется, но оно гарантирует выпуклость вниз кривых безразличия.

Графический анализ функции полезности. Линии уровня.

- Рассмотрим функцию полезности U=U(x1,x2). Линией уровня функции U=U(x1,x2) называется геометрическое место точек плоскости (x1,x2), в которых функция принимает одно и то же значение равное q, U(x1,x2)=q. Пусть функция U=U(x1,x2) является степенной, например, $U = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$

Кривые безразличия.

- Для функции полезности линии уровня называют линиями или кривыми безразличия.
- Линия безразличия представляет собой геометрическое место точек плоскости, каждая из которых представляет собой такую комбинацию материальных благ, которая обеспечивает одну и ту же полезность, и потребителю безразлично какую из точек на данной кривой выбирать.

Типы кривых безразличия.

- Линейная. Функция полезности с полным взаимозамещением благ имеет вид

$$U=ax1+bx2,$$

 где *a* и *b* – параметры . Из функции полезности можно найти

$$x2=(U-ax1)/b$$

 и построить кривые безразличия линейного типа

Неоклассическая (степенная)

- функция полезности

$$U = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

, где *α+β<=1*. Выразив $x_2 = \left(\dfrac{U}{x_1^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{\beta}}$

, построим кривые безразличия неоклассическоо типа

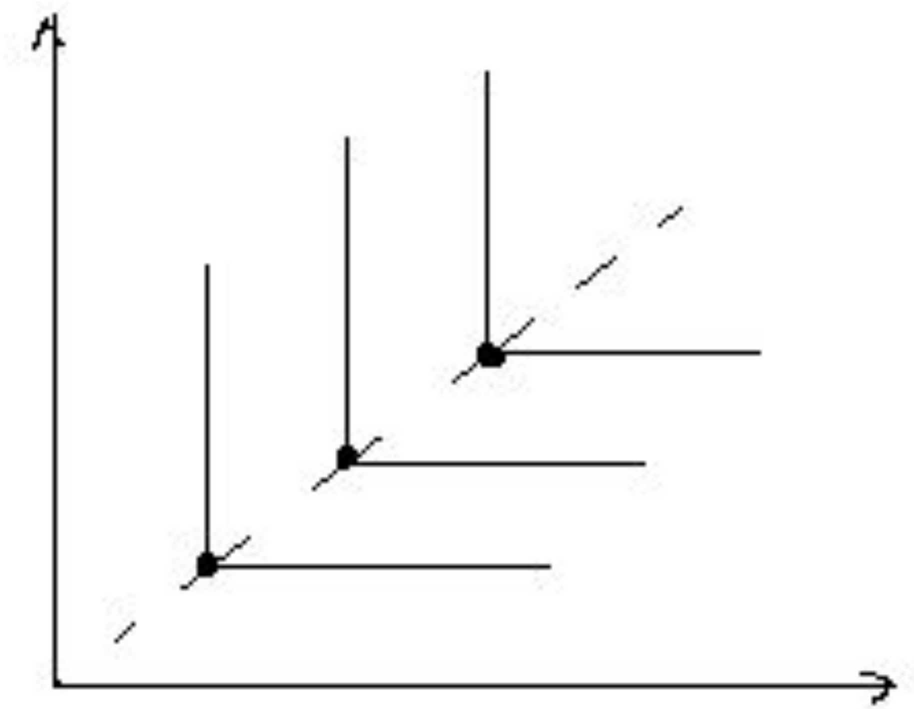
С полным взаимодополнением благ

- (например, при увеличении спроса на одно благо, растёт спрос на другое благо) имеет кривые безразличия в виде точки на пересечении двух прямых. Избыток одного блага не имеет значение.

Полезность достигается лишь приопределённой комбинации благ

$$U=min(x1/a;x2/b)$$

Кривые безразличия для функции полезности с полным взаимодополнением благ



Свойства кривых безразличия

- На основании аксиомы поведения потребителя кривая безразличия, лежащая выше и правее другой кривой, представляет собой более предпочтительные наборы благ.

- Кривые безразличия никогда не пересекаются, т.к. через любую точку на карте можно провести только одну кривую безразличия.

- Кривые безразличия имеют отрицательный наклон. Абсолютный наклон кривой безразличия при движении вправо уменьшается, она становится более пологой.

Предельная норма замещения благ.

- Выражение $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u}{\partial x_1} / \frac{\partial u}{\partial x_2} = MRS_{x_1,x_2}$

называют предельной нормой замещения первого блага вторым, которая показывает, на сколько единиц увеличится (уменьшится) потребление второго блага, при уменьшении (увеличении) потребления первого блага на единицу без изменения функции полезности.

- В общем виде формулу предельной нормы замещения благ записывают в виде

$$MRS_{x_i, x_j} = \frac{dx_i}{dx_j} = -\frac{\partial u}{\partial x_j} / \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

которая показывает, на сколько увеличится (уменьшится) потребление одного блага, при уменьшении (увеличении) потребления другого блага на единицу без изменения полезности.

Предельная норма замещения благ равна обратному соотношению предельных полезностей, взятому со знаком «-».

- Для определения поведения потребителя, нужны ещё сведения о доходе потребителя и рыночных ценах. Информация о ценах и доходах задаётся бюджетной линией или линией цен. Уровень бюджетной линии отражает ограничения в доходе, а её наклон – соотношение цен.

- Бюджетным множеством называется множество всех наборов благ, которые может приобрести потребитель, имея доход *I*. $\overline{p} \cdot \overline{x} \le I$

где $\overline{p} = \left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$

- вектор цен,

$\overline{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$

- вектор благ.

- Бюджетной линией называется геометрическое место точек всех комбинаций благ, стоимость которых равна определённой сумме.

- При постоянных ценах на оба блага, линия цен - это прямая линия, имеющая отрицательный наклон. Ее уравнение имеет вид

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

где *x1,x2* - блага, *p1,p2* - их цены, *I* - бюджет.

Задача о максимальном выборе потребителя.

- При заданных ценах и имеющемся доходе потребитель стремится обеспечить максимум полезности. Этот максимум достигается в точке касания самой высокой кривой безразличия с бюджетной линией.

- Такая точка называется точкой равновесия. В точке равновесия наклон бюджетной линии и кривой безразличия равны

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}$$

и

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

- Задача о максимальном выборе потребителя сводится к отысканию точки равновесия. Требуется найти максимум $U(x_1,\dots,x_n)$

при условии $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I.$

- Решение этой задачи на условный экстремум находят с помощью метода множителей Лагранжа. Строим функцию Лагранжа относительно x_i и λ, где λ - множитель Лагранжа, x_i - блага.

- $$\max I = U(x_1, \ldots, x_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I\right)$$

при $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i = I \end{cases}$$

или $$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i$$

- Решая систему, получаем набор благ $\overline{x}^{*} = \left(x_1^{\ *}, \ldots, x_n^{\ *}\right)$ оптимизирующий полезность и при котором все предельные полезности пропорциональны ценам $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i$

- При этом оптимальное значение множителя Лагранжа λ^* называется предельной полезностью денег, которая показывает прирост максимальной полезности при увеличении дохода I на малую единицу.

Вопросы:

1) Дать понятие полезности, функции полезности.

2) В чем заключается задача об оптимальном выборе потребителя?