Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 20.

Тема: Моделирование поведения производителей.

Цель: Рассмотреть производственные функции и их свойства. Изучить понятие эластичности.

Производственные функции.

Производственные функции – это экономико-математическое выражение зависимости результативного показателя от обуславливающих его показателей факторов.

<u>Производственные функции</u> делятся на

1. Однофакторные $y = f(x)$,

2. Многофакторные $y = f(x_1, \quad x_2, \quad \dots \quad x_n)$,

где y - результативный показатель,

x - показатель фактор,

f - вид зависимости.

Производственные функции также делят на

- **статические** (не учитывают фактор времени)
- **Динамические** (включают фактор время)

Наиболее распространенные ПФ:

- **Функция выпуска y=f(x)**
- **Функция производственных затрат x=f(y)**
- **Функция издержек**
- **Функция спроса относительно цены q = q (p)**
- **Функция цен спроса P= P(x)**
- **Функция выручки U= U (x)**
- **Функция предложения относительно цены S= S (p)**
- **Функция цен предложения P= P(s) и т.д.**

Экономический смысл производной для ПФ.

Если $y = f(x)$ –ПФ выпуска, то производная характеризует ***предельную отдачу некоторого ресурса*** и показывает, сколько дополнительных единиц продукции приносит дополнительная единица затраченного ресурса.

Это количество продукции носит название ***предельного продукта***.

1. **Скорость изменения величины продукта, получаемая на единицу затрат:**

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

2. **Предельные издержки:**

$$\frac{dK}{dX} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta K}{\Delta x}$$

3. **Предельный спрос относительной цены:**

$$\frac{dq}{dp} = \underset{\Delta p \to 0}{Lim} \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

4. **Предельное предложение относительно цены:**

$$\frac{ds}{dp} = \underset{\Delta p \to 0}{Lim} \frac{\Delta s}{\Delta p}$$

Свойства производственных функций

- Без ресурсов выпуск невозможен ,

$$f(0,0)=0$$

- При отсутствии хотя бы одного из ресурсов выпуск невозможен

$$f(0,x_2)=f(x_1,0)=0$$

- **Предполагается, что по крайней мере дважды дифференцируема, т.е. переменные x_1 и x_2 меняются непрерывно и результат производственной деятельности достаточно гладко меняется при изменении количества используемых ресурсов.**

- При увеличении затрат ресурсов выпуск продукции не уменьшается,

т.е $y = f(x_1, x_2)$ не убывает. Это значит,

что $\frac{\partial f}{\partial x_1} > 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x_2} > 0$

т.е. предельные производительности всех ресурсов положительны.

- Предельная производительность данного ресурса падает, если объём его затрат растёт, т. е. эффективность использования дополнительной единицы этого ресурса падает. Др. словами: величина прироста продукта на каждую дополнительную единицу i-го ресурса не растёт. Это закон убывающей эффективности.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\,2}} < 0$$

- Предельная производительность данного ресурса возрастает с ростом затрат другого ресурса, т.е. эффективность использования единицы данного ресурса возрастает с ростом затрат данного ресурса.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} > 0$$

и

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} > 0$$

- Отдача от расширения масштабов производства. Характеризует ПФ с точки зрения выпуска продукции при пропорциональном изменении затрат.

Эластичность функции показывает процентное изменение функции, соответствующее изменению независимой переменной на 1%.

$$E(y) = \frac{x}{y} * \frac{dy}{dx}$$

Эластичность замещения ресурсов.

- Эластичность замещения ресурсов определяется как предел относительных приращений фондовооружённости труда $\left(\dfrac{\Delta x_2 / x_1}{x_2 / x_1}\right)$

  и предельной нормы замещения ресурсов Δγ/γ.

$$\lim_{\Delta\gamma \to 0} \frac{\Delta x_2 / x_1}{x_2 / x_1} \div \frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{dx_2 / x_1}{x_2 / x_1} \div \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dx_2 / x_1}{d\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x_2 / x_1}$$

- Эластичность замещения ресурсов для ПФ

$$y = ax_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}$$

постоянна и равна единице, и показывает, что изменению фондовооружённости труда на 1% соответствует изменению предельной нормы замещения тоже на 1%.

- ***<u>Изоквантой</u>*** называют геометрическое место точек плоскости (x_1, x_2) для которых $f(x_1, x_2) = Y_c$
- ***<u>Предельной формой замещения</u>*** ресурсов называется величина

$$\gamma = \frac{df / dx_1}{df / dx2}$$

Под **balансовой моделью** понимается система уравнений, каждое из которых выражает требования баланса между, производимым отдельными экономическими объектами, количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции.

Балансовые модели широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов.

В основе создания этих моделей лежит *балансовый метод*, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Межотраслевой баланс - это важный раздел системы национальных счетов, с помощью которого исследуются межотраслевые связи, сложные зависимости между промежуточным потреблением, конечным спросом и выпуском отраслей экономики.

Схема межотраслевого баланса производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…	*n*		
1	x_{11}	x_{21}	x_{23}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
…	…	…	…	I	…	II	…
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}		x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3		c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	III	v_n	IV	
Чистый доход	m_1	m_2	m_3		m_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n	$\sum_{i=1}^{n} Xi = \sum_{j=1}^{n} Xj$	

Итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$Xj = \sum_{i=1}^{n} Xij + Z$$, где

x_j - валовый продукт потребляющей отрасли;

x_{ij}- величины межотраслевых потоков продукции;

z_j - сумма амортизации, оплаты труда и чистого дохода j-ой отрасли.

Валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$Xi = \sum_{i=1}^{n} Xij + Yj$$

x_i- валовый продукт производящих отраслей,

y_j- конечная продукция.

Вопросы:

1)Что такое производственные функции и на какие виды они делятся?

2)Что такое изокванта?

3)В чем суть балансового метода?