Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 23.

Тема: Моделирование ценовой политики.

Цель: Рассмотреть изменение спроса при изменении цены и изменение спроса при изменении дохода. Предельное ценообразование.

Имеем уравнение

Вида

$$-\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_n} = x_n^*$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j^*}{\partial p_n} - p_i \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} = \begin{cases} 0, i = 1,\ldots, n-1, \\ \lambda^*, i = n. \end{cases}$$

Система из линейного уравнения (1)

- Относительно (n+1) неизвестного

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_n}, \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n}, \ldots, \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}$$

в матричной форме запишется следующим образом ,

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n^* \\ 0 \\ \lambda^* \end{pmatrix} \quad (2)$$

- где T - означает транспонирование,P- вектор – строка цен,U_* - матрица Гессе,X - вектор – столбец спроса на товары.

Таким образом, увеличение цены на n-й товар привело к следующему изменению спроса на товары:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_n} dp_n = \mu U^{-1} p^T x_n^* dp_n + \lambda^* (\mu U^{-1} p^T p U^{-1} + U^{-1})_n dp_n$$

Рассмотрим

такое увеличение дохода на *dM*, которое компенсирует потребителю увеличение цены на dp_n. Согласно теории потребления это означает, что полезность потребителя сохранилась на прежнем уровне, то есть $du_n=0$. $\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_i^*) - \lambda^* p_i = 0$

Используя получим

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) dx_i^* = \lambda^* \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i^* = \lambda^* \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial p_n} dp_n = 0$$

Условие постоянства полезности

Теперь можем определить *dM*, используя $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = M$:

$$dM = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial p_n} dp_n + x_n^* dp_n = x_n^* dp_n$$

то есть доход вырос ровно на столько, сколько необходимо было бы дополнительно затратить потребителю на приобретение n-го товара в прежнем объеме при увеличении цены на dp_n.

Которые в матричной форме примут вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^* \end{pmatrix}$$

- Решение уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p^T & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^* \end{pmatrix}$$

находим с помощью обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \mu p U^{-1} \\ \mu U^{-1} p^T & \mu U^{-1} p^T p U^{-1} + U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^* (\mu p U^{-1})_n \\ \lambda^* (\mu U^{-1} p^T p U^{=1} + U^{-1})_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, увеличение цены с компенсацией дохода приводит к следующему изменению спроса:

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{comp} dp_n = \lambda^* (\mu U^{-1} p^T p U^{-1} + U^{-1})_n dp_n$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_n} dp_n = \mu U^{-1} p^T x_n^* dp_n + \lambda^* (\mu U^{-1} p^T p U^{-1} + U^{-1})_n dp_n$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{comp} dp_n = \lambda^* (\mu U^{-1} p^T p U^{-1} + U^{-1})_n dp_n$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial M} = -\mu U^{-1} p^T$$

получаем уравнение Слуцкого, которое является стержнем теории полезности:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_n} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p_n}\right)_{comp} - \frac{\partial x^*}{\partial M} x_n^*$$

Ценный и малоценный товар

Товар i называется ценным если при увеличении дохода спрос на него растет

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial M} > 0$$

и малоценным, если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial M} \le 0$$

Валовой заменитель продукта

Продукт *L* называется валовым заменителем продукта i если $\dfrac{\partial x_l^*}{\partial p_i} > 0$

Функция спроса $X^*(p;м)$ обладает свойством **валовой заменимости,** если с увеличение цены на любой продукт *I* спрос на остальные продукты не убывает $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} > 0$ $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \geq 0$

если же , то функция спроса обладает свойством **сильной валовой заменимости.**

Вопросы:

1) Какие составляющие решения ценовой политики?
2) В чем заключается свойство валовой заменимости?