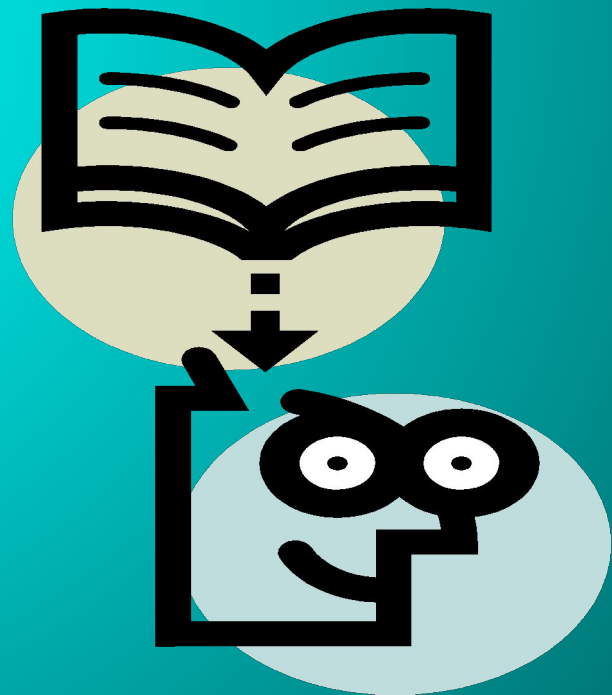


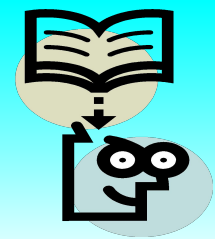
Модуль числа

Автор Календарева Н.Е.

© 2011 г.

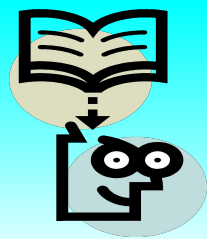


План



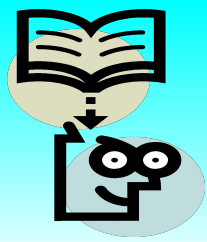
1. Определение модуля
2. Свойства модуля
3. Решение уравнений с модулем
4. Геометрический смысл модуля
5. Решение неравенств с модулем
6. График функции вида $y = a|x - b| + c$
7. Самостоятельная работа

Определение модуля



Модулем действительного числа a называется число, равное a , если a положительно или равно нулю, и минус a , если a отрицательно:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0; \\ 0, & \text{если } a = 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

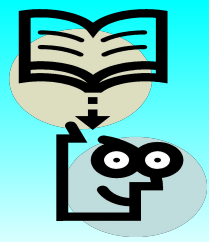


Примеры

$$|-3| = -(-3) = 3;$$

$$|7 - 1| = |6| = 6;$$

$$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$



Свойства модуля

Из определения модуля вытекает, что

$$|a| \geq 0.$$

$$1. \quad |a| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0;$$

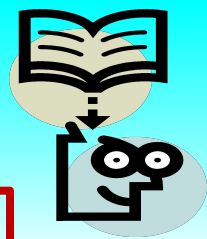
$$2. \quad |-a| = |a|;$$

$$3. \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

$$4. \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad \text{где } b \neq 0;$$

$$5. \quad |a|^2 = a^2.$$

$$6. \quad |k \cdot a| = k |a|, \quad \text{где } k > 0.$$



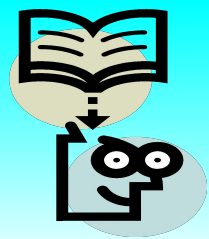
7. Из определения арифметического корня из неотрицательного числа имеем
где a – любое действительное число.

Примеры

$$|-a| = |-1 \cdot a| = |-1| \cdot |a| = |a|;$$

$$|a - b| \neq |-(b - a)| \neq |b - a|;$$

$$|2 \cdot x| = 2|x|.$$



Примеры

1. $|x - 2| = 0$

Ответ: $x = 2$.

2. $|3 + x| = 0$

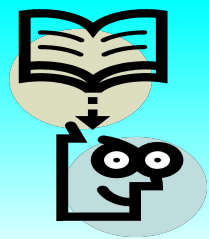
Ответ: $x = -3$.

3. $|x| = 5$

Ответ: $x_1 = 5; x_2 = -5$.

4. $|x - 3| = -3$

Ответ: \emptyset



5. $1 / |x| = 0$

Ответ: \emptyset

6. $|1 - x| = 0$

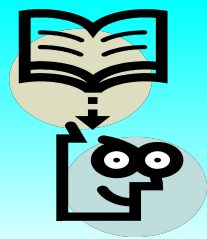
Ответ: $x = 1$

7. $|x - 1| = 2$

Ответ: $x_1 = 3; x_2 = -1.$

8. $|x| \geq 0$

Ответ: **R**



9. $|x| > 0$

Ответ: $x \neq 0$ или $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

10. $|1 - x| < 0$

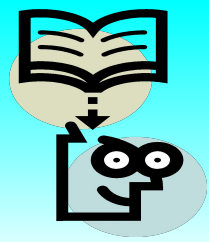
Ответ: \emptyset .

11. $|x - 2| \leq 0$

Ответ: $x = 2$.

12. $|x| \leq 0$

Ответ: $x = 0$.



Уравнения с модулем

Решите уравнение $|x - 2| = 2x + 1$.

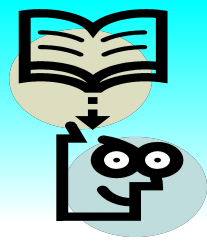
Решение. Чтобы раскрыть модуль, разберемся, в какой части числовой оси выражение под знаком модуля неотрицательно, а в какой отрицательно.

$$x - 2 < 0 \quad \text{при } x \in (-\infty; 2) \quad \text{и}$$

$$x - 2 \geq 0 \quad \text{при } x \in [2; +\infty).$$

Поэтому далее рассмотрим два случая.

$$|x - 2| = 2x + 1$$



I сл. $x - 2 < 0$.

Используя определение модуля, получим

$$|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x.$$

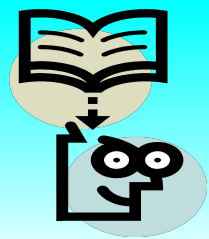
Подставим в исходное уравнение

$$2 - x = 2x + 1.$$

Так как есть еще неравенство, то получим

систему

$$\begin{cases} x - 2 < 0; \\ 2 - x = 2x + 1. \\ x = 1/3. \end{cases}$$



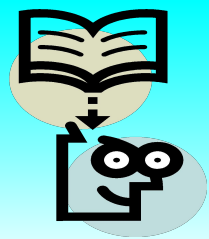
Значение $x = 1/3$ подставим в первое неравенство: $1/3 - 2 < 0$, неравенство верно.

Сл-но, $x = 1/3$ – решение уравнения.

II сл. $x - 2 \geq 0$. Поступаем аналогично.

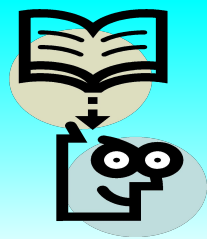
Имеем систему

$$\begin{cases} -2 \geq 0, \\ x - 2 = 2x + 1. \end{cases}$$



Из уравнения найдем $x = -3$. Подставим в неравенство, получим: $-3 - 2 \geq 0$.
Неравенство неверно, поэтому во втором случае система, а следовательно, и исходное уравнение не имеют решения.

Ответ: $x = 1/3$.



Уравнения с модулем

Решите уравнение $|x - 1| = |x + 3|$.

Решение. Используем нестандартный метод решения – возведение в квадрат

$$(x - 1)^2 = (x + 3)^2,$$

у которого такие же корни, как и у исходного.

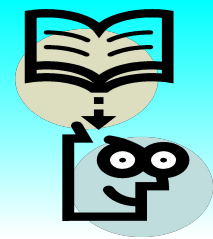
Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь

$$8x + 8 = 0,$$

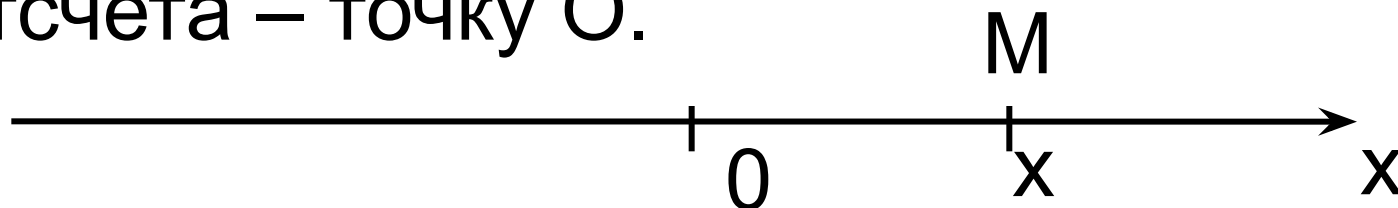
откуда находим $x = -1$.

Ответ: -1 .

Геометрический смысл модуля

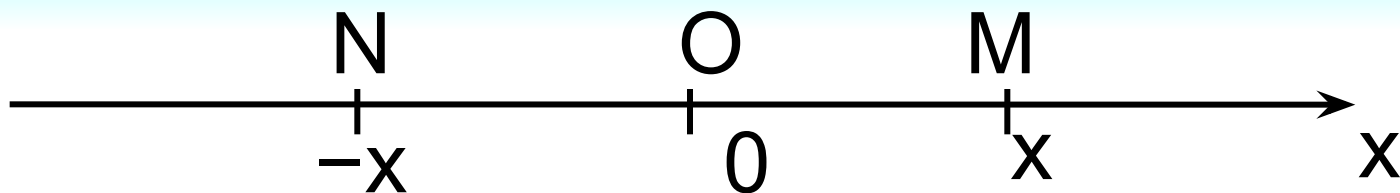
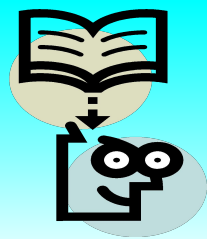


Отметим на координатной прямой начало отсчета – точку O .



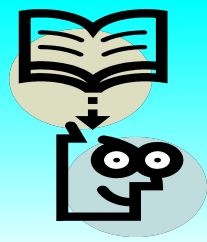
Возьмем произвольное число x и отметим его на координатной прямой.

При $x > 0$ число x изображается на прямой точкой M так, что длина отрезка OM равна x : $|OM| = x$. Поэтому модуль $|x| = |OM|$.



Число $-x$ изображается точкой N,
симметричной точке M относительно
точки O, и тогда $|-x| = |ON| = |OM|$.

Уравнение $|x| = a$

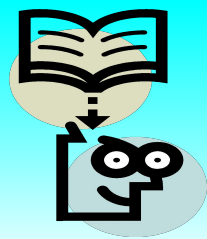


Модуль x с геометрической точки зрения есть расстояние от начала отсчета до точки x .

Тогда уравнение $|x| = a$ имеет два решения: $x_1 = a$ и $x_2 = -a$.

При $a = 0$ уравнение $|x| = 0$ имеет единственное решение: $x = 0$.

При $a < 0$ уравнение не имеет решений.



Отметим на координатной прямой две точки $A(x_1)$ с координатой x_1 и $B(x_2)$ с координатой x_2 .

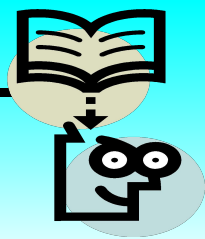
Расстояние между двумя точками, расположенными на координатной прямой, вычисляется по формуле

$$|AB| = |x_1 - x_2|$$

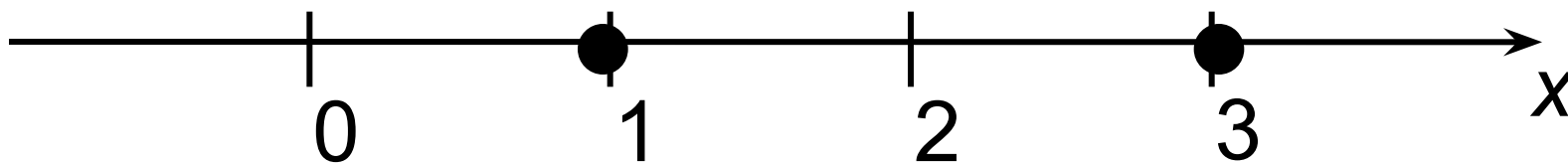
при любом расположении точек A и B .

$|x|$ – это расстояние от точки x до 0 .

Решение уравнения с использованием геометрического смысла

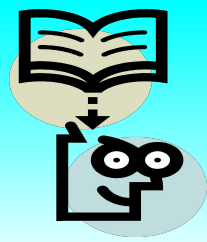


Решите уравнение $|x - 2| = 1$.



Ответ: 1, 3.

Алгебраический способ



Решите уравнение $|x + 3| = 2$.

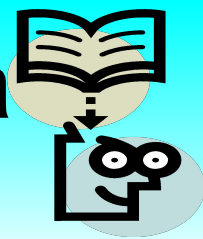
Решение. $x + 3 = \pm 2$, т.е.

$x + 3 = 2$ или $x + 3 = -2$,

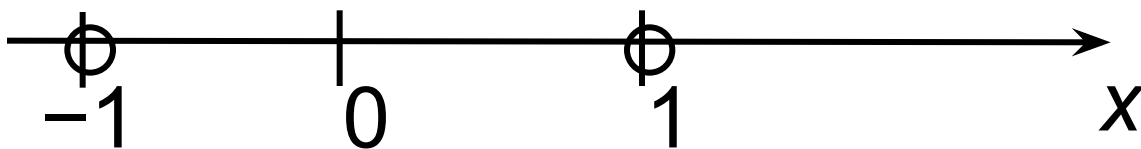
т.е. $x = -1$ или $x = -5$.

Ответ: $-1, -5$.

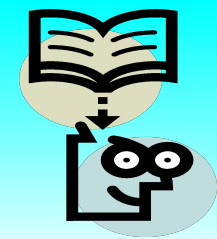
Решение неравенств с использованием геометрического смысла



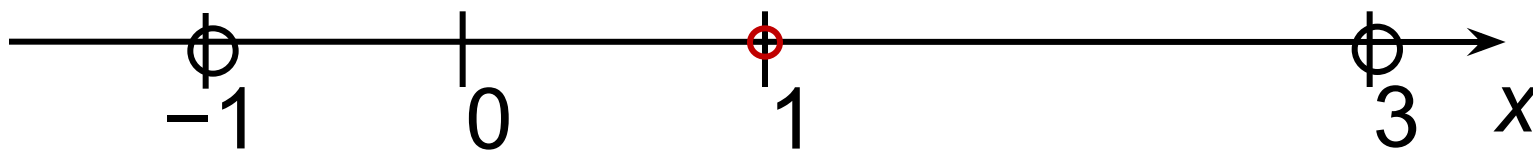
Решите неравенство $|x| < 1$.



Ответ: $(-1;1)$.

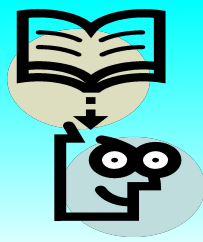


Решите неравенство $|x - 1| < 2$.

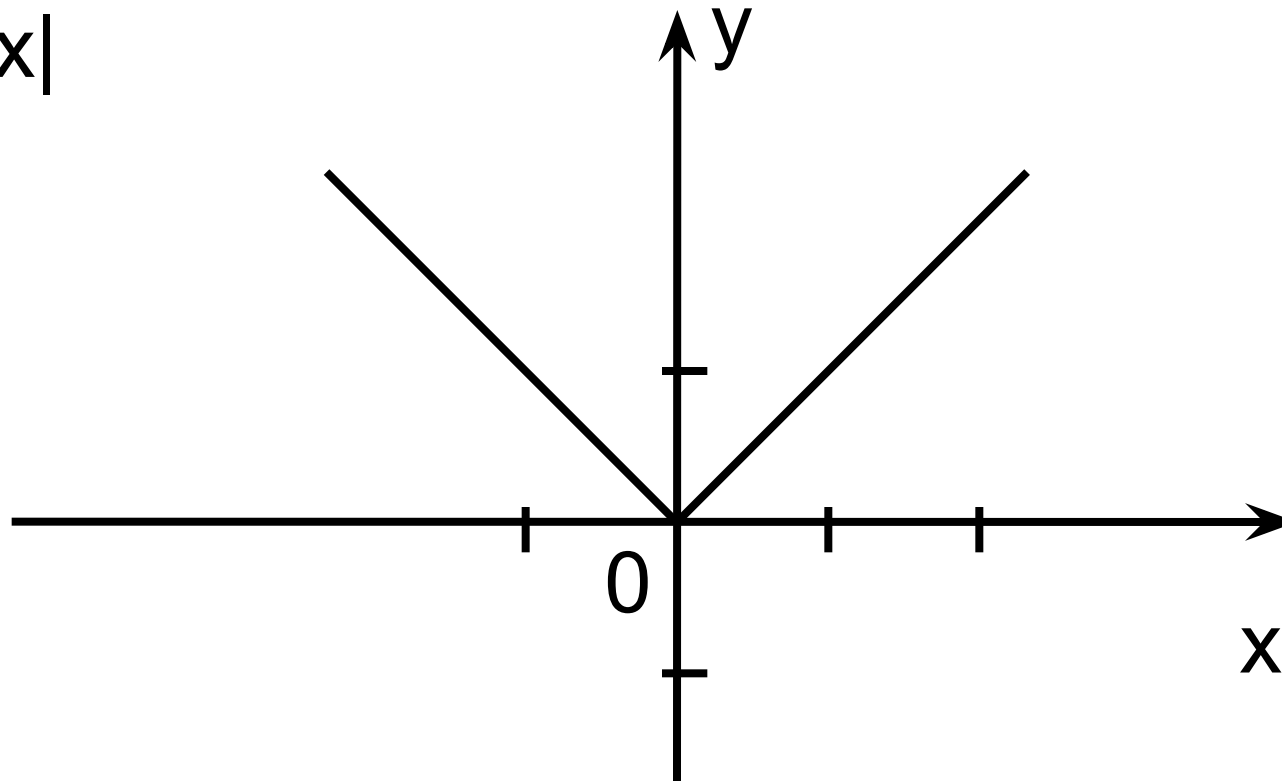


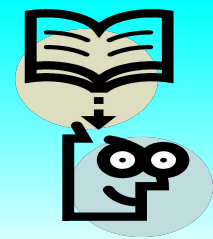
Ответ: $(-1; 3)$.

График модуля



$$y = |x|$$



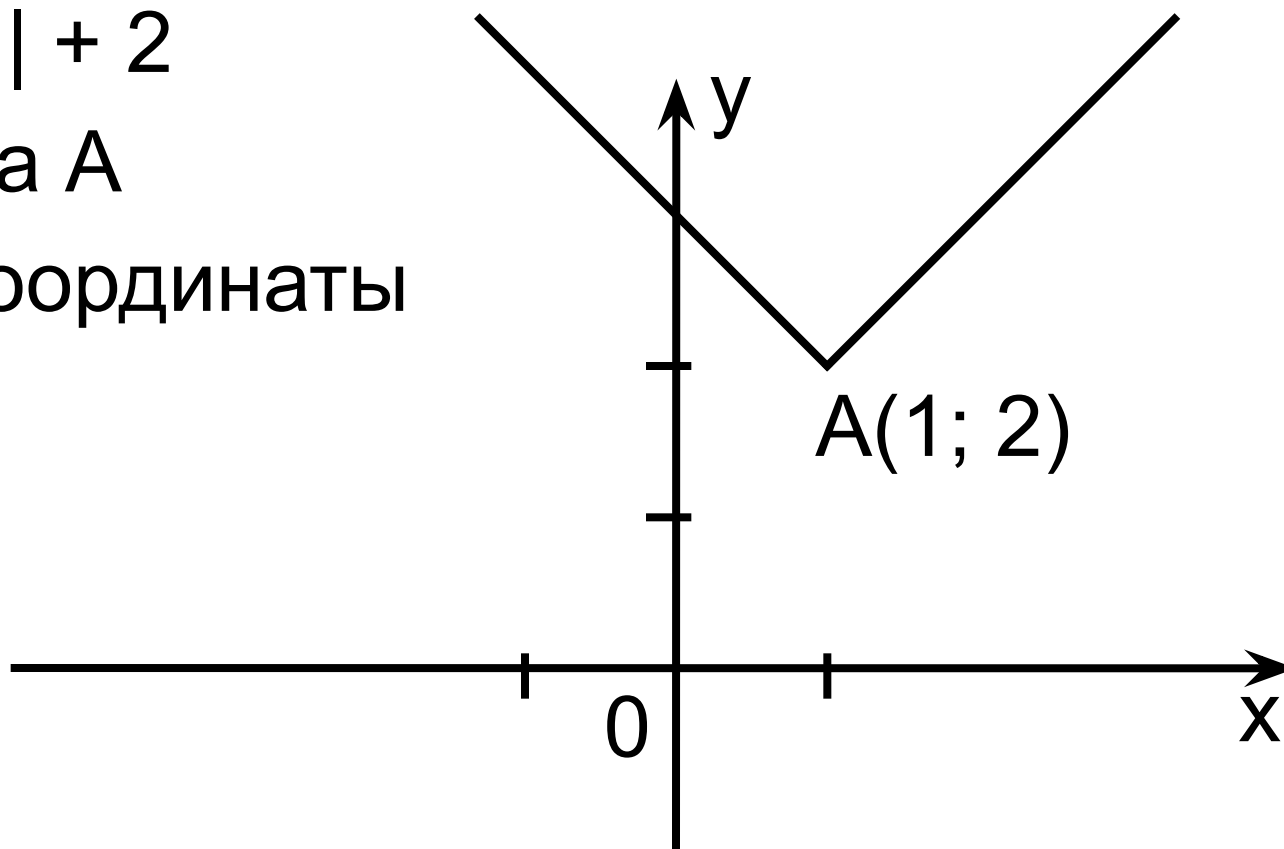


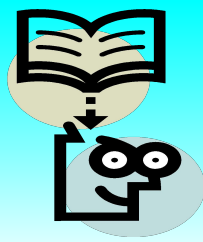
$$y = |x - 1| + 2$$

Вершина A

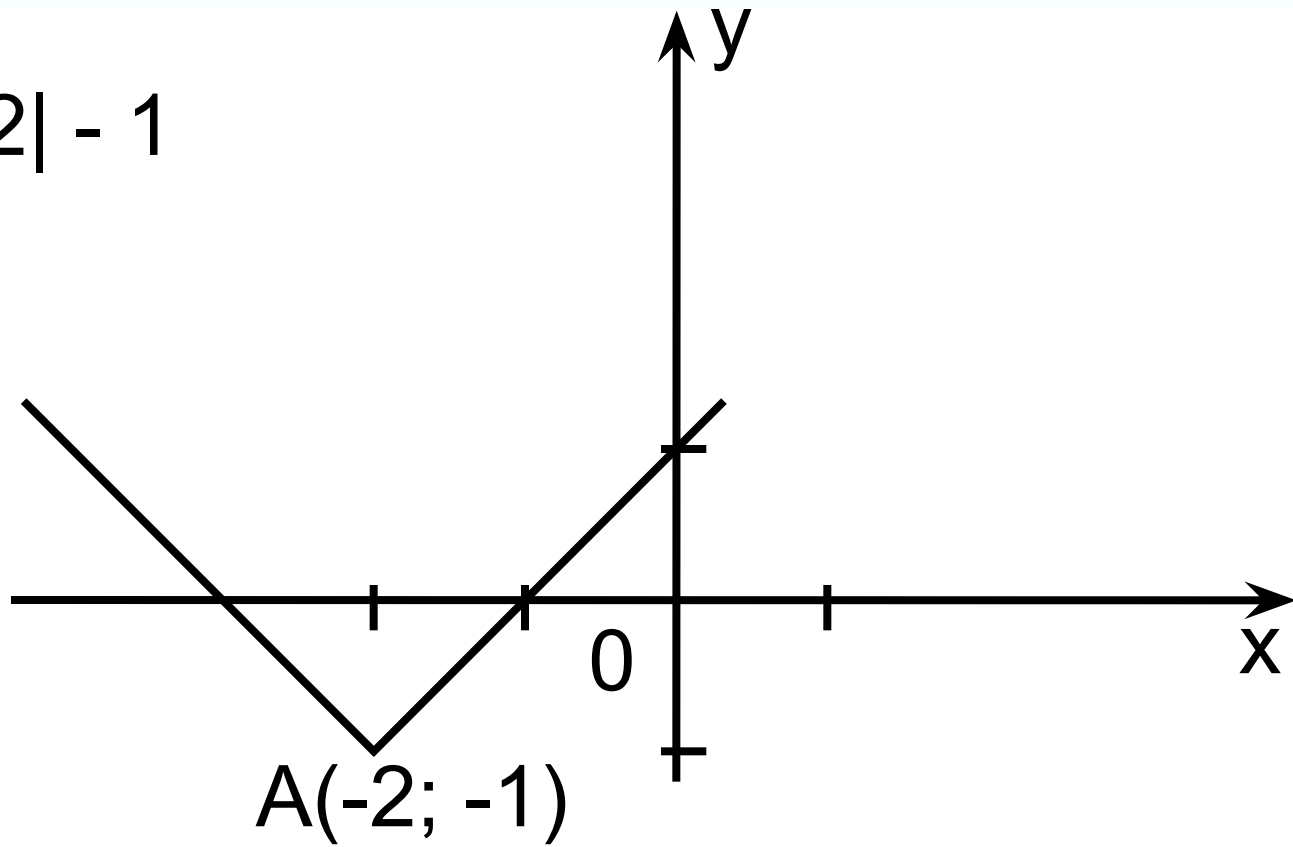
имеет координаты

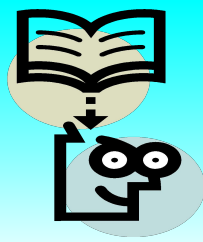
(1; 2)





$$y = |x + 2| - 1$$





$$y = -|x + 1|$$

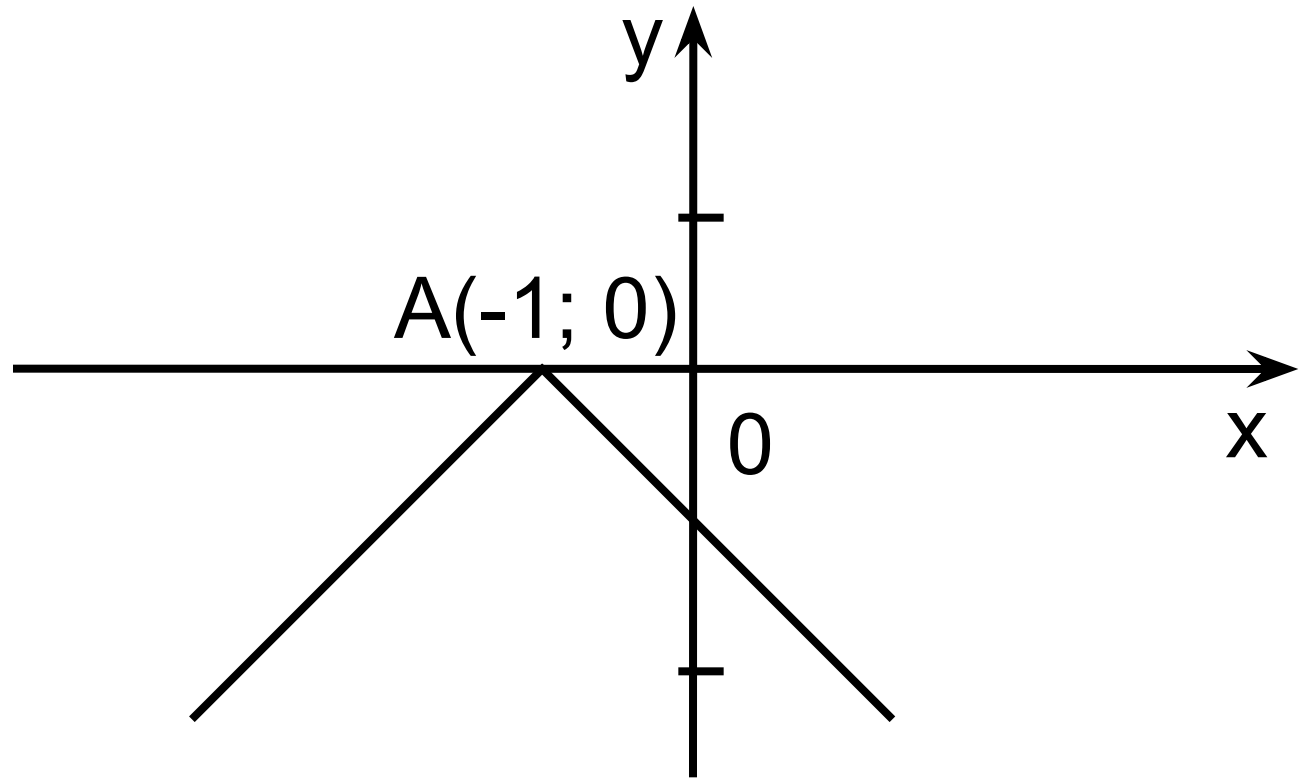
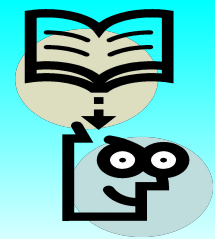


График функции вида

$$y = a|x - b| + c$$

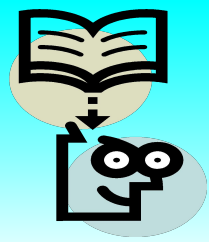


При $a > 0$ ветви графика направлены
вверх;

при $a < 0$ ветви графика направлены вниз.

Вершина модуля имеет координаты $(b; c)$.

Число c – смещение графика вдоль оси y ,
т.е. при положительном c перемещаем
график параллельным переносом вверх,
при отрицательном – вниз.

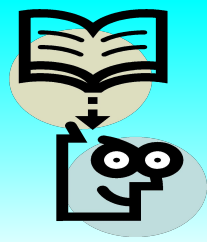


Число a отвечает за сжатие к оси Oy :
 $a > 1$ «усы» прижимаются к оси Oy ,
при $0 < a < 1$ «усы» прижимаются к оси Ox .

Домашнее задание

1. Прочитать раздел 5
2. Решить на стр. 57 номера 4.6 – 4.8,
на стр. 68 номера 5.1, 5.2 и 5.4.

Самостоятельная работа



1 вариант

1. $|x + 1| < 0$

2. $|x| > 0$

3. $|x| \leq 2$

4. $|x| > 1$

5. $1 < |x| < 2$

6. $|x - 1| < 3$

2 вариант

1. $|x - 1| < 0$

2. $|x| \leq 0$

3. $|x| > 3$

4. $|x| \leq 1$

5. $2 < |x| < 3$

6. $|x - 2| < 1$

