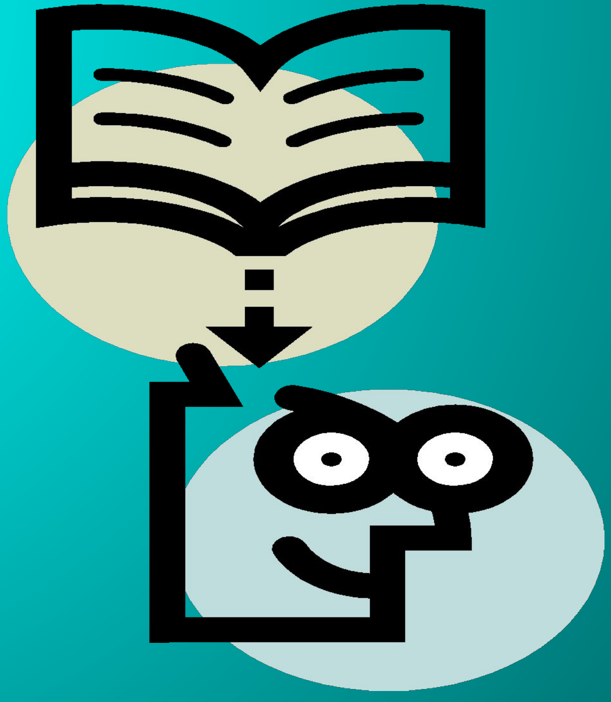
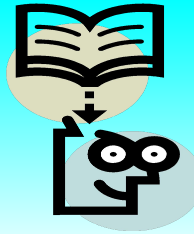
Модуль числа



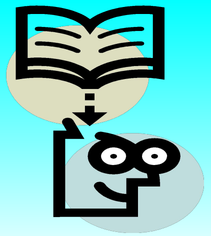
Автор Календарева Н.Е.

План



1. Определение модуля
2. Свойства модуля
3. Решение уравнений с модулем
4. Геометрический смысл модуля
5. Решение неравенств с модулем
6. График функции вида $y = a|x - b| + c$
7. Самостоятельная работа

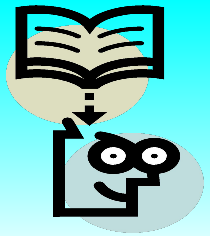
Определение модуля



Модулем действительного числа a называется число, равное a, если a положительно или равно нулю, и минус a, если a отрицательно:

$$|\, a \,| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0; \\ 0, \text{ если } a = 0; \\ -\, a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Примеры

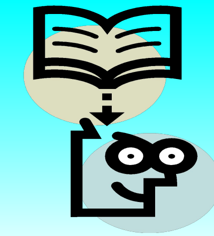


$$| -3 | = -(-3) = 3;$$

$$| 7 - 1 | = | 6 | = 6;$$

$$\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Свойства модуля



Из определения модуля вытекает, что $|a| \geq 0$.

1. $|a| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$;
2. $|-a| = |a|$;
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, где $b \neq 0$;
5. $|a|^2 = a^2$.
6. $|k \cdot a| = k\,|a|$, где $k > 0$.

7. Из определения арифметического корня из неотрицательного числа имеем $\sqrt{a^2} = |a|$

где а – любое действительное число.

Примеры

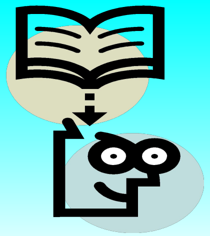
$|-a| = |-1 \cdot a| = |-1| \cdot |a| = |a|$;

$|a-b| = |-(b-a)| = |b-a|$;

$| 2 - x | = | x - 2 |$;

$| 2 \cdot x | = 2| x |$.

Примеры



1. $|x - 2| = 0$

   Ответ: $x = 2$.

2. $| 3 + x | = 0$

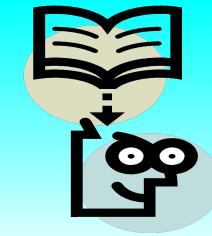
   Ответ: $x = -3$.

3. $| x | = 5$

   Ответ: $x_1 = 5$; $x_2 = -5$.

4. $| x - 3 | = - 3$

   Ответ: $\varnothing$



5. $1 / | x | = 0$

   Ответ: $\varnothing$

6. $| 1 - x | = 0$

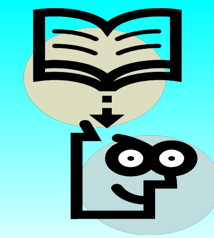
   Ответ: $x = 1$

7. $| x - 1| = 2$

   Ответ: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$.

8. $| x | \geq 0$

   Ответ: $\mathbf{R}$



9. $| x | > 0$

   Ответ: $x \neq 0$ или $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

10. $|1 - x | < 0$

   Ответ: $\varnothing$.

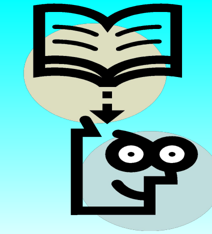
11. $| x - 2 | \leq 0$

   Ответ: $x = 2$.

12. $| x | \leq 0$

   Ответ: $x = 0$.

Уравнения с модулем



Решите уравнение $| x – 2 | = 2x + 1$.

Решение. Чтобы раскрыть модуль, разберемся, в какой части числовой оси выражение под знаком модуля неотрицательно, а в какой отрицательно.

$x – 2 < 0$ при $x \in (– \infty; 2)$ и

$x – 2 \geq 0$ при $x \in [2; + \infty)$.

Поэтому далее рассмотрим два случая.

$| x - 2 | = 2x + 1$

I сл. $\boldsymbol{x - 2 < 0}$.

Используя определение модуля, получим

$$| x - 2 | = -(x - 2) = 2 - x.$$

Подставим в исходное уравнение

$$2 - x = 2x + 1.$$

Так как есть еще неравенство, то получим систему

$$\begin{cases} x - 2 < 0; \\ 2 - x = 2x + 1. \end{cases}$$

$$x = 1/3.$$

Значение $x = 1/3$ подставим в первое неравенство: $1/3 - 2 < 0$, неравенство верно.

Сл-но, $x = 1/3$ – решение уравнения.

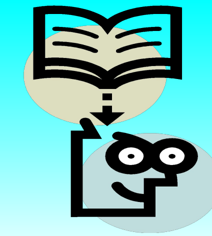
II сл. $x - 2 \geq 0$. Поступаем аналогично. Имеем систему

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x - 2 = 2x + 1. \end{cases}$$

Из уравнения найдем $x = -3$. Подставим в неравенство, получим: $-3 - 2 \geq 0$. Неравенство неверно, поэтому во втором случае система, а следовательно, и исходное уравнение не имеют решения.

Ответ: $x = 1/3$.

Уравнения с модулем



Решите уравнение $|\, x - 1 \,| = |\, x + 3 \,|$.

Решение. Используем нестандартный метод решения – возведение в квадрат

$$(x - 1)^2 = (x + 3)^2,$$

у которого такие же корни, как и у исходного.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь

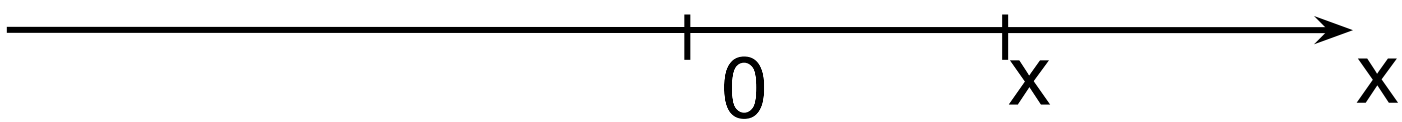
$$8x + 8 = 0,$$

откуда находим $x = -1$.

Ответ: – 1 .

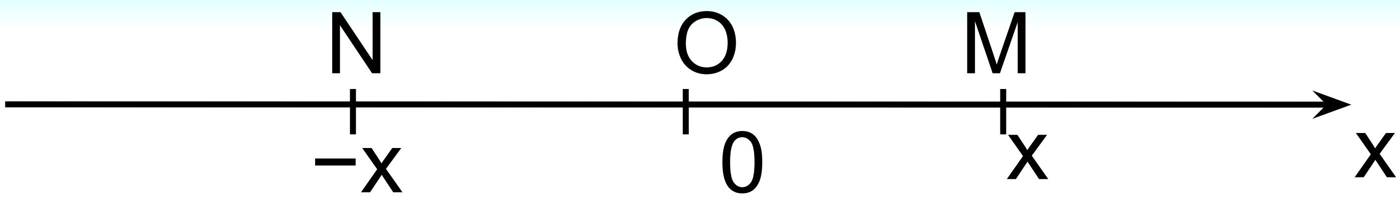
Геометрический смысл модуля

Отметим на координатной прямой начало отсчета – точку О.



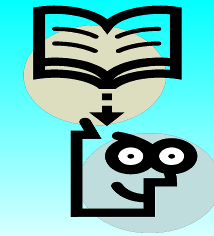
Возьмем произвольное число x и отметим его на координатной прямой.

При x > 0 число x изображается на прямой точкой M так, что длина отрезка OM равна x: |OM| = x. Поэтому модуль |x| = |OM|.



Число –x изображается точкой N, симметричной точке M относительно точки O, и тогда $|-x| = |ON| = |OM|$.

Уравнение | x | = a

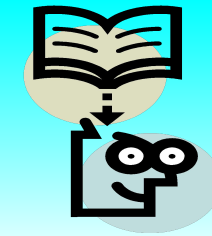


Модуль x с геометрической точки зрения есть расстояние от начала отсчета до точки x.

Тогда уравнение $|x| = a$ имеет два решения: $x_1 = a$ и $x_2 = -a$.

При $a = 0$ уравнение $|x| = 0$ имеет единственное решение: $x = 0$.

При $a < 0$ уравнение не имеет решений.



Отметим на координатной прямой две точки A(x_1) с координатой x_1 и B(x_2) с координатой x_2.

Расстояние между двумя точками, расположенными на координатной прямой, вычисляется по формуле

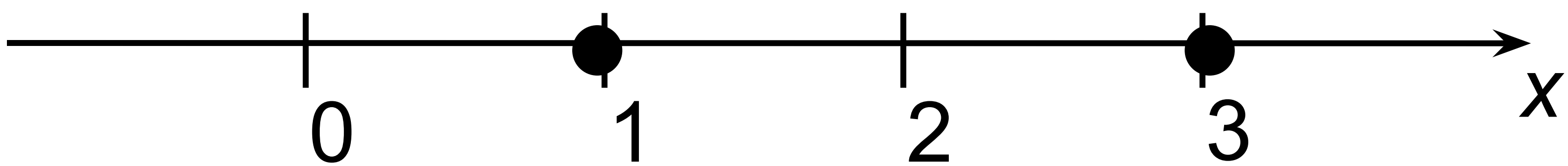
$$|AB| = |x_1 - x_2|$$

при любом расположении точек A и B.

$|x|$ – это расстояние от точки x до 0.

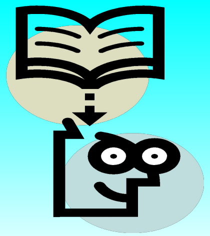
Решение уравнения с использова-нием геометрического смысла

Решите уравнение | x – 2 | = 1.



Ответ: 1, 3.

Алгебраический способ



Решите уравнение $| x + 3 | = 2$.

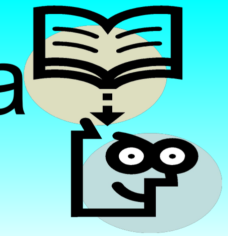
Решение. $x + 3 = \pm 2$, т.е.

$x + 3 = 2$ или $x + 3 = -2$,

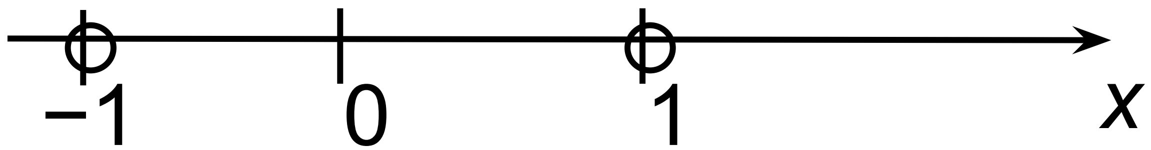
т.е. $x = -1$ или $x = -5$.

Ответ: $-1, -5$.

Решение неравенств с использованием геометрического смысла

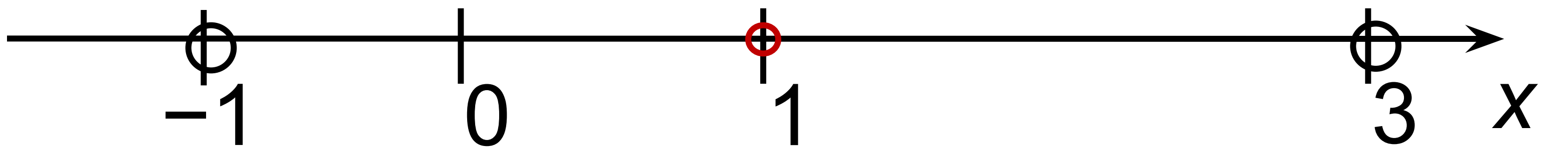


Решите неравенство $|x| < 1$.



Ответ: $(-1;1)$.

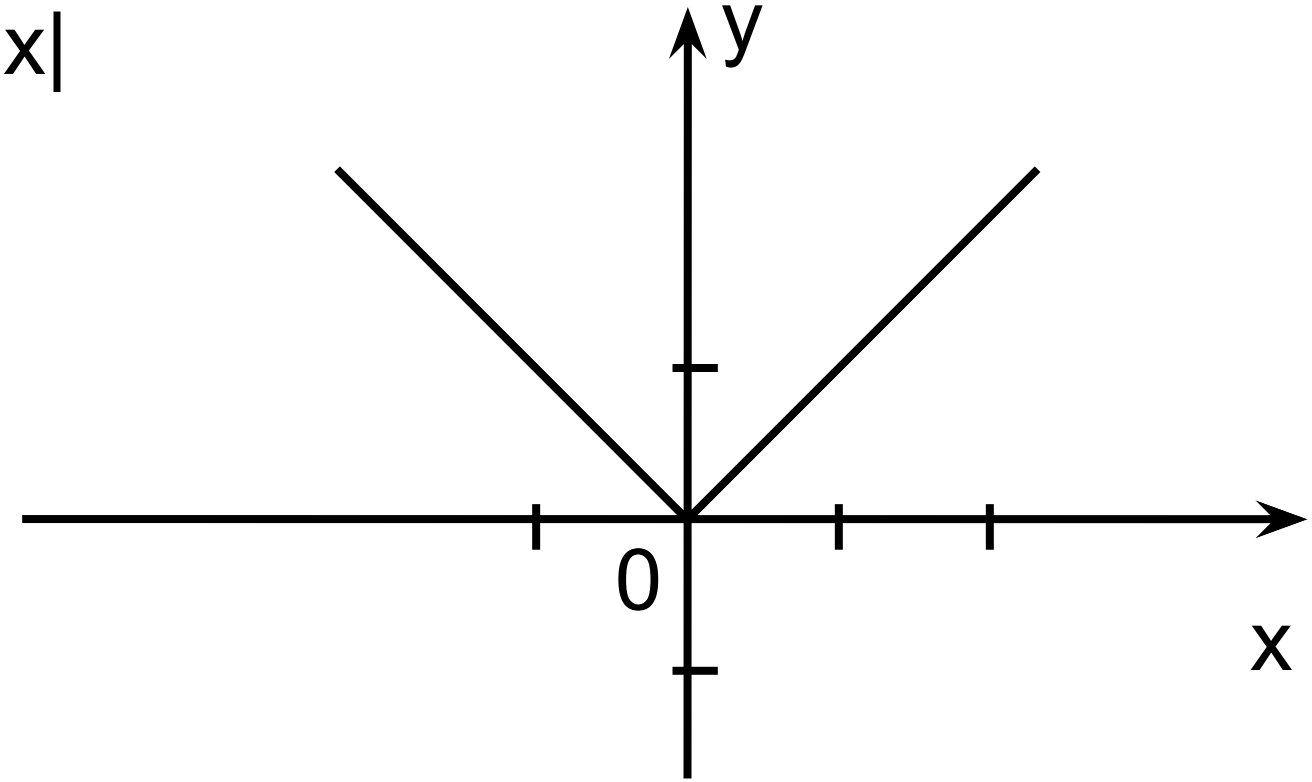
Решите неравенство $|x - 1| < 2$.



Ответ: $(-1; 3)$.

График модуля

y = |x|

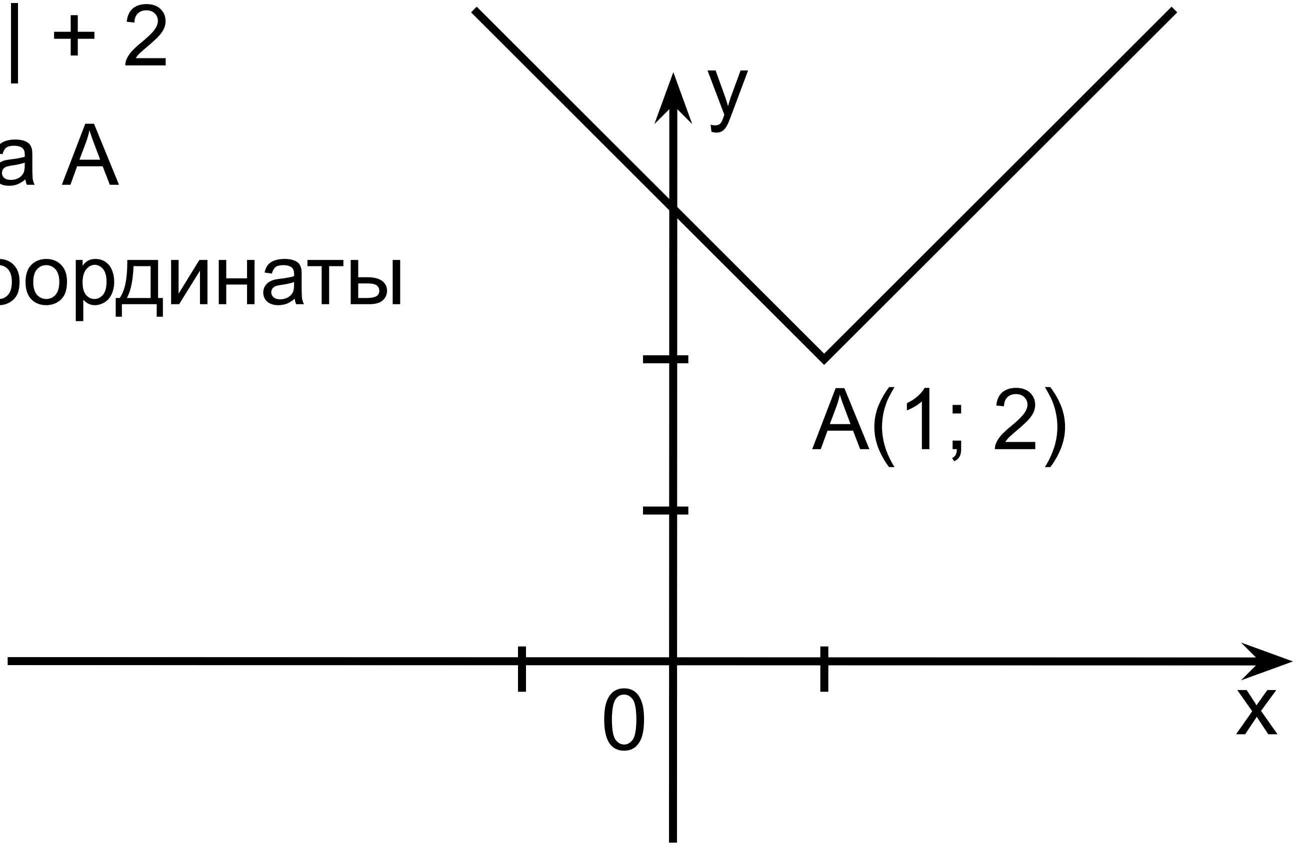


$y = |x - 1| + 2$

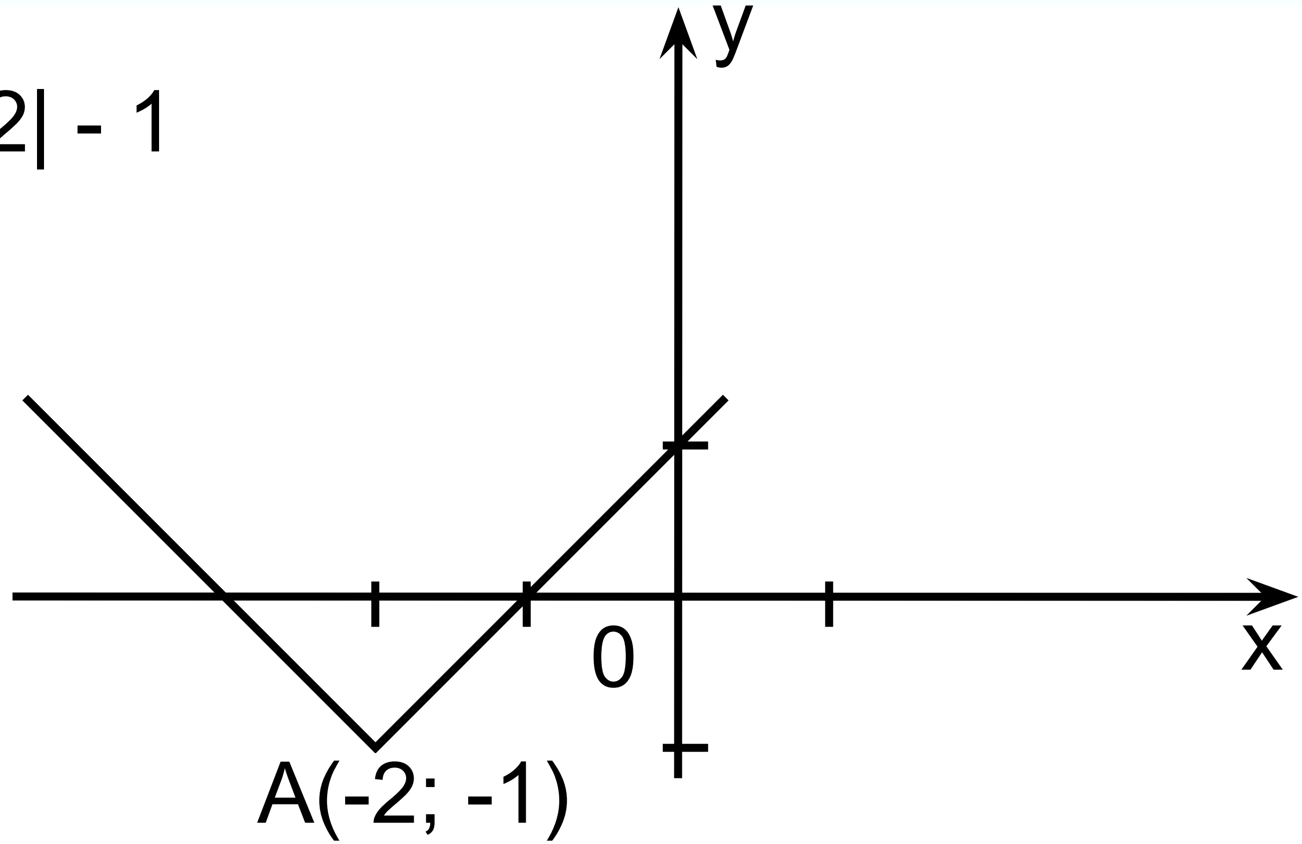
Вершина А

имеет координаты

(1; 2)



$y = |x + 2| - 1$



$y = -|x + 1|$

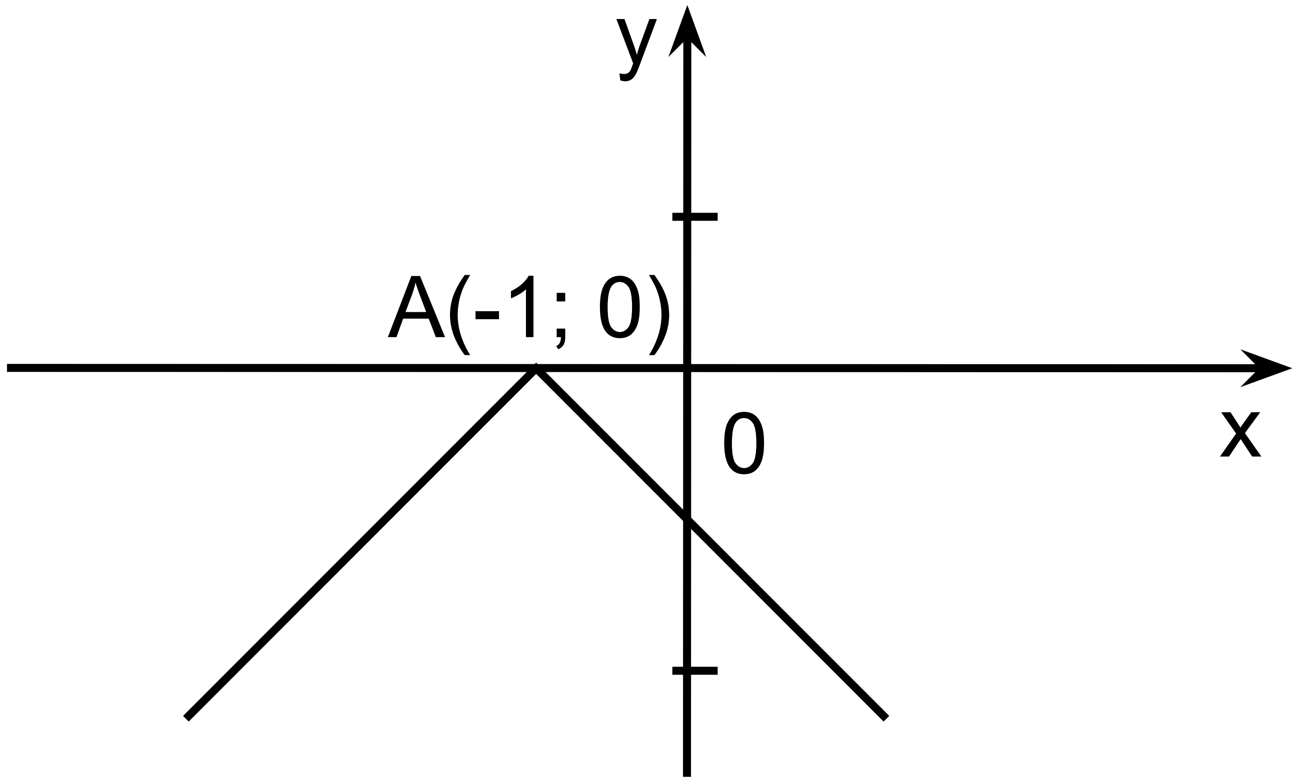
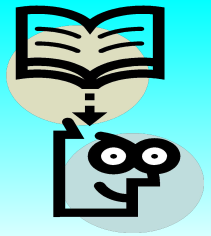


График функции вида $y = a|x - b| + c$

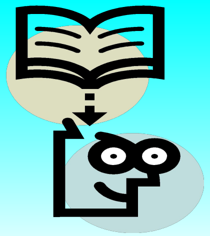


При $a > 0$ ветви графика направлены вверх;

при $a < 0$ ветви графика направлены вниз.

Вершина модуля имеет координаты $(b; c)$.

Число c – смещение графика вдоль оси y, т.е. при положительном c перемещаем график параллельным переносом вверх, при отрицательном – вниз.



Число а отвечает за сжатие к оси Оу:

$a > 1$ « усы» прижимаются к оси Оу,

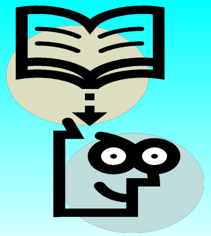
при $0 < a < 1$ «усы» прижимаются к оси Ох.

Домашнее задание

1. Прочитать раздел 5
2. Решить на стр. 57 номера 4.6 – 4.8,

на стр. 68 номера 5.1, 5.2 и 5.4.

Самостоятельная работа



1 вариант

1. $|x + 1| < 0$
2. $|x| > 0$
3. $|x| \le 2$
4. $|x| > 1$
5. $1 < |x| < 2$
6. $|x – 1| < 3$

2 вариант

1. $|x - 1| < 0$
2. $|x| \le 0$
3. $|x| > 3$
4. $|x| \le 1$
5. $2 < |x| < 3$
6. $|x – 2| < 1$