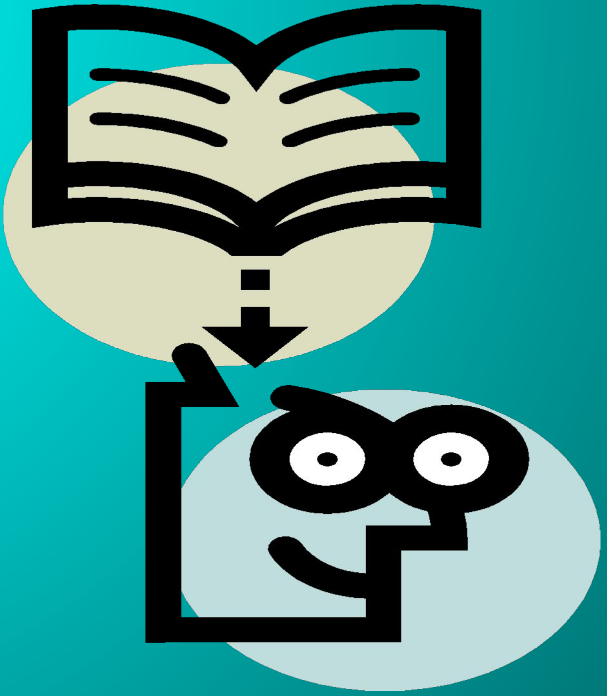
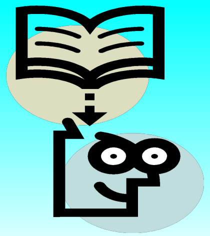
Модуль числа



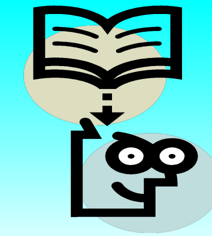
Автор Календарева Н.Е.

План



1. Определение модуля
2. Свойства модуля
3. Решение уравнений с модулем
4. Геометрический смысл модуля
5. Решение неравенств с модулем
6. График функции вида $y = a|x - b| + c$
7. Самостоятельная работа

Определение модуля



Модулем действительного числа *а* называется число, равное *а*, если *а* положительно или равно нулю, и минус *а*, если *а* отрицательно:

$$| a | = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0; \\ 0, \text{ если } a = 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

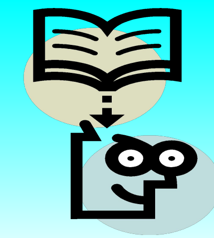
Примеры

$$| -3 | = -(-3) = 3;$$

$$| 7 - 1 | = | 6 | = 6;$$

$$\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Свойства модуля



Из определения модуля вытекает, что

$|\,a\,| \geq 0$.

1. $|\,a\,| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$;
2. $|\,-a\,| = |\,a\,|$;
3. $|\,a \cdot b| = |\,a\,| \cdot |\,b\,|$;
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, где $b \neq 0$;
5. $|\,a\,|^2 = a^2$.
6. $|\,k \cdot a\,| = k\,|\,a\,|$, где $k > 0$.

7. Из определения арифметического корня из неотрицательного числа имеем $\sqrt{a^2} = |a|$

где а – любое действительное число.

Примеры

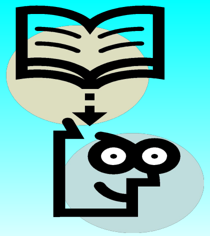
$$|-a| = |-1 \cdot a| = |-1| \cdot |a| = |a|;$$

$$|a-b| = |-(b-a)| = |b-a|;$$

| 2 – *x* | = | *x* – 2 |;

| 2 · *x* | = 2| *x* | .

Примеры



1. $|x - 2| = 0$

   Ответ: $x = 2$.

2. $|3 + x| = 0$

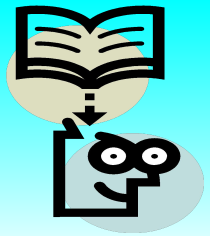
   Ответ: $x = -3$.

3. $|x| = 5$

   Ответ: $x_1 = 5$; $x_2 = -5$.

4. $|x - 3| = -3$

   Ответ: $\varnothing$



5. $1/|x| = 0$

   Ответ: $\varnothing$

6. $|1 - x| = 0$

   Ответ: $x = 1$

7. $|x - 1| = 2$

   Ответ: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$.

8. $|x| \geq 0$

   Ответ: $\mathbf{R}$

9. $|x| > 0$

Ответ: $x \neq 0$ или $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

10. $|1 - x| < 0$

Ответ: $\varnothing$.

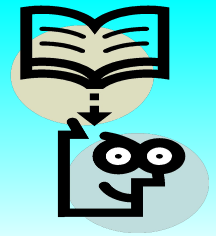
11. $|x - 2| \leq 0$

Ответ: $x = 2$.

12. $|x| \leq 0$

Ответ: $x = 0$.

Уравнения с модулем



Решите уравнение $| x – 2 | = 2x + 1$.

Решение. Чтобы раскрыть модуль, разберемся, в какой части числовой оси выражение под знаком модуля неотрицательно, а в какой отрицательно.

$x – 2 < 0$ при $x \in (– \infty; 2)$ и

$x – 2 \geq 0$ при $x \in [2; + \infty)$.

Поэтому далее рассмотрим два случая.

$| x - 2 | = 2x + 1$

I сл. $\boldsymbol{x - 2 < 0}$.

Используя определение модуля, получим

$$| x - 2 | = -(x - 2) = 2 - x.$$

Подставим в исходное уравнение

$$2 - x = 2x + 1.$$

Так как есть еще неравенство, то получим систему

$$\begin{cases} x - 2 < 0; \\ 2 - x = 2x + 1. \end{cases}$$

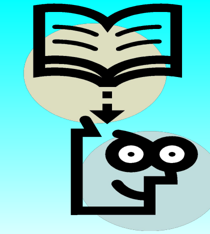
$$x = 1/3.$$

Значение x = 1/3 подставим в первое неравенство: $1/3 - 2 < 0$, неравенство верно.

Сл-но, x = 1/3 – решение уравнения.

II сл. $x - 2 \geq 0$. Поступаем аналогично. Имеем систему

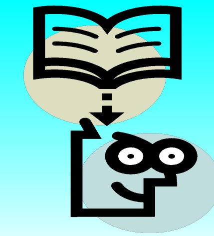
$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x - 2 = 2x + 1. \end{cases}$$



Из уравнения найдем $x = -3$. Подставим в неравенство, получим: $-3 - 2 \geq 0$. Неравенство неверно, поэтому во втором случае система, а следовательно, и исходное уравнение не имеют решения.

Ответ: $x = 1/3$.

Уравнения с модулем



Решите уравнение $|x - 1| = |x + 3|$.

Решение. Используем нестандартный метод решения – возведение в квадрат

$$(x - 1)^2 = (x + 3)^2,$$

у которого такие же корни, как и у исходного.

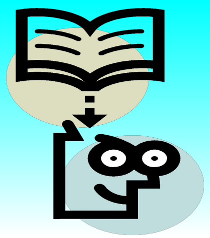
Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь

$$8x + 8 = 0,$$

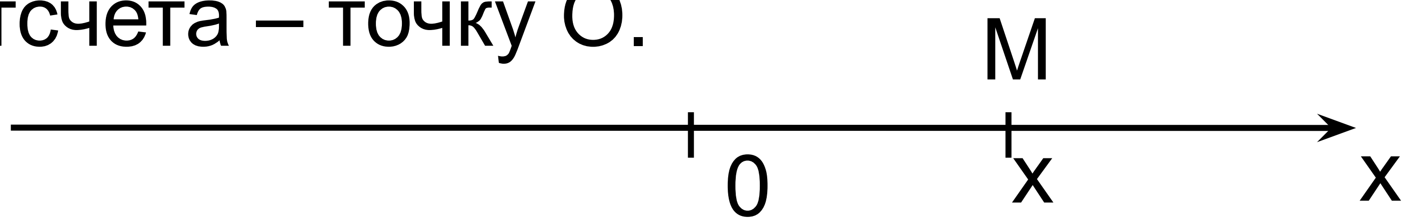
откуда находим $x = -1$.

Ответ: – 1 .

Геометрический смысл модуля

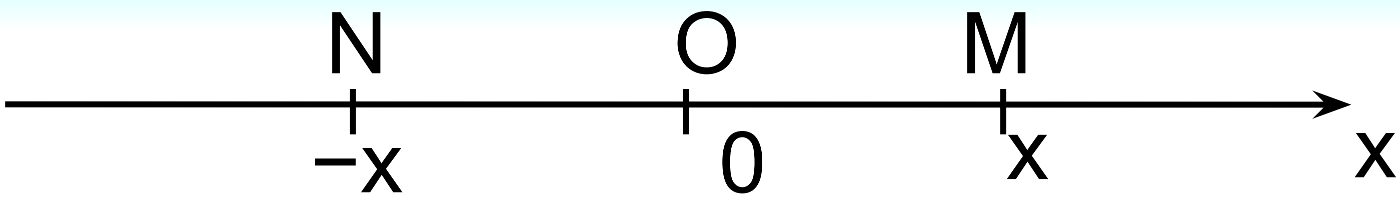


Отметим на координатной прямой начало отсчета – точку О.



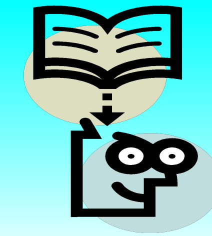
Возьмем произвольное число x и отметим его на координатной прямой.

При $x > 0$ число x изображается на прямой точкой М так, что длина отрезка ОМ равна x: $|OM| = x$. Поэтому модуль $|x| = |OM|$.



Число –x изображается точкой N, симметричной точке M относительно точки O, и тогда $|-x| = |ON| = |OM|$.

Уравнение | x | = a

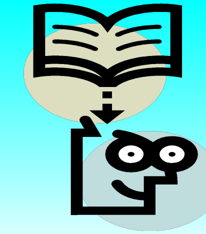


Модуль x с геометрической точки зрения есть расстояние от начала отсчета до точки x.

Тогда уравнение | x | = a имеет два решения: $x_1 = a$ и $x_2 = -a$.

При $a = 0$ уравнение | x | = 0 имеет единственное решение: $x = 0$.

При $a < 0$ уравнение не имеет решений.



Отметим на координатной прямой две точки $A(x_1)$ с координатой x_1 и $B(x_2)$ с координатой x_2.

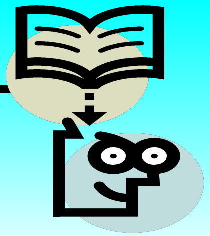
Расстояние между двумя точками, расположенными на координатной прямой, вычисляется по формуле

$$|AB| = |x_1 - x_2|$$

при любом расположении точек A и B.

$|x|$ – это расстояние от точки x до 0.

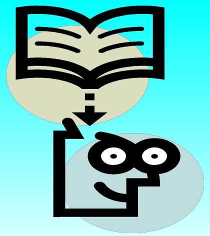
Решение уравнения с использова-нием геометрического смысла



Решите уравнение | x – 2 | = 1.

Ответ: 1, 3.

Алгебраический способ



Решите уравнение $| x + 3 | = 2$.

Решение. $x + 3 = \pm 2$, т.е.

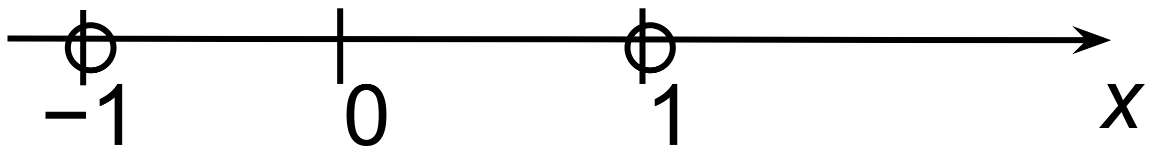
$x + 3 = 2$ или $x + 3 = -2$,

т.е. $x = -1$ или $x = -5$.

Ответ: $-1, -5$.

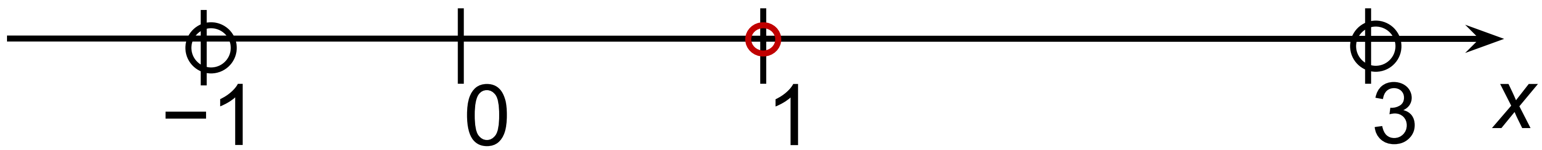
Решение неравенств с использованием геометрического смысла

Решите неравенство $|x| < 1$.



Ответ: $(-1;1)$.

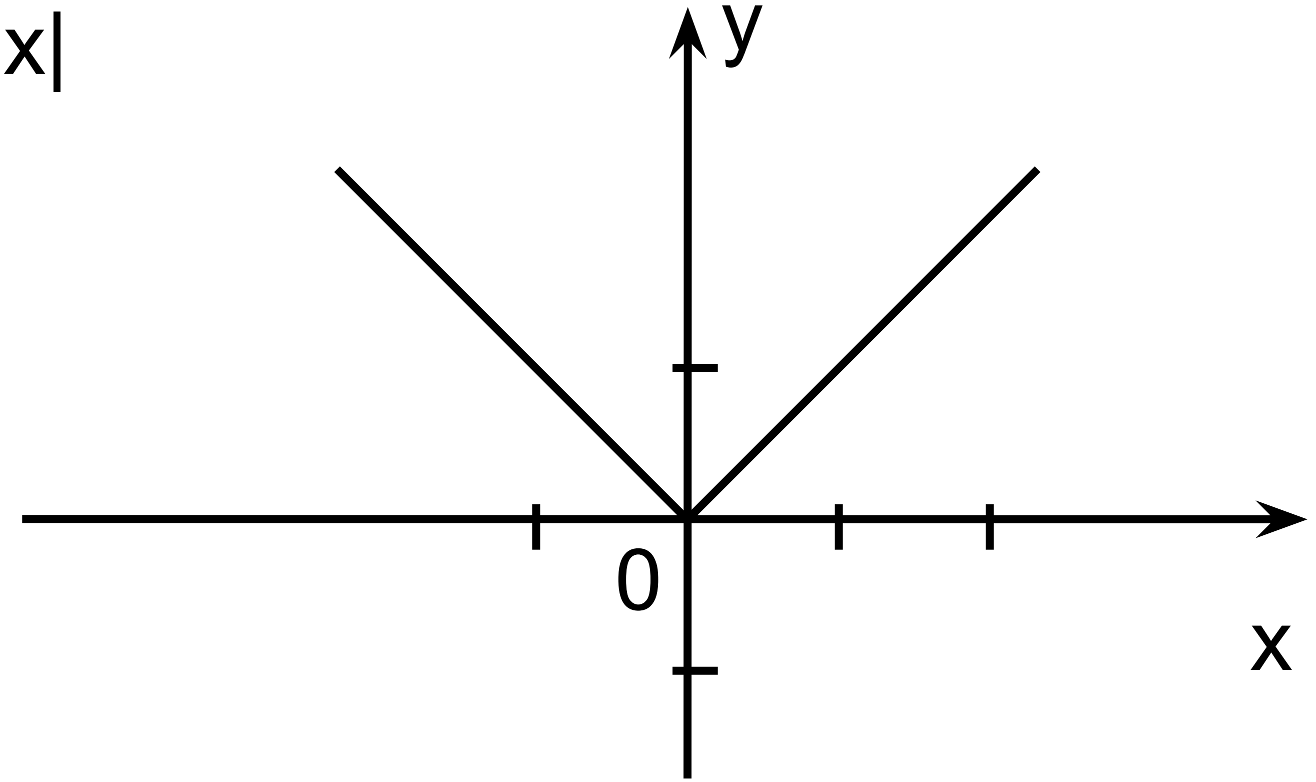
Решите неравенство $|x - 1| < 2$.



Ответ: $(-1; 3)$.

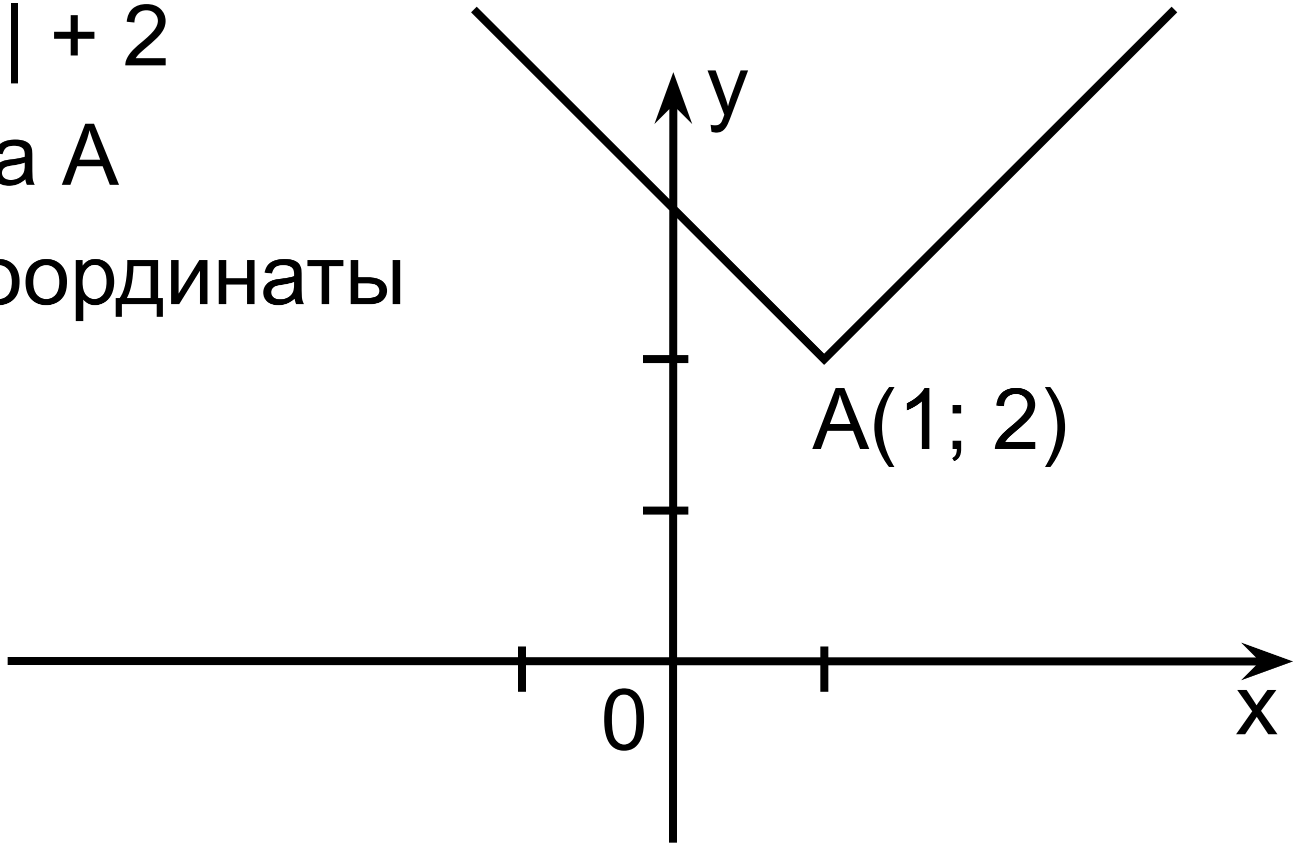
График модуля

$y = |x|$

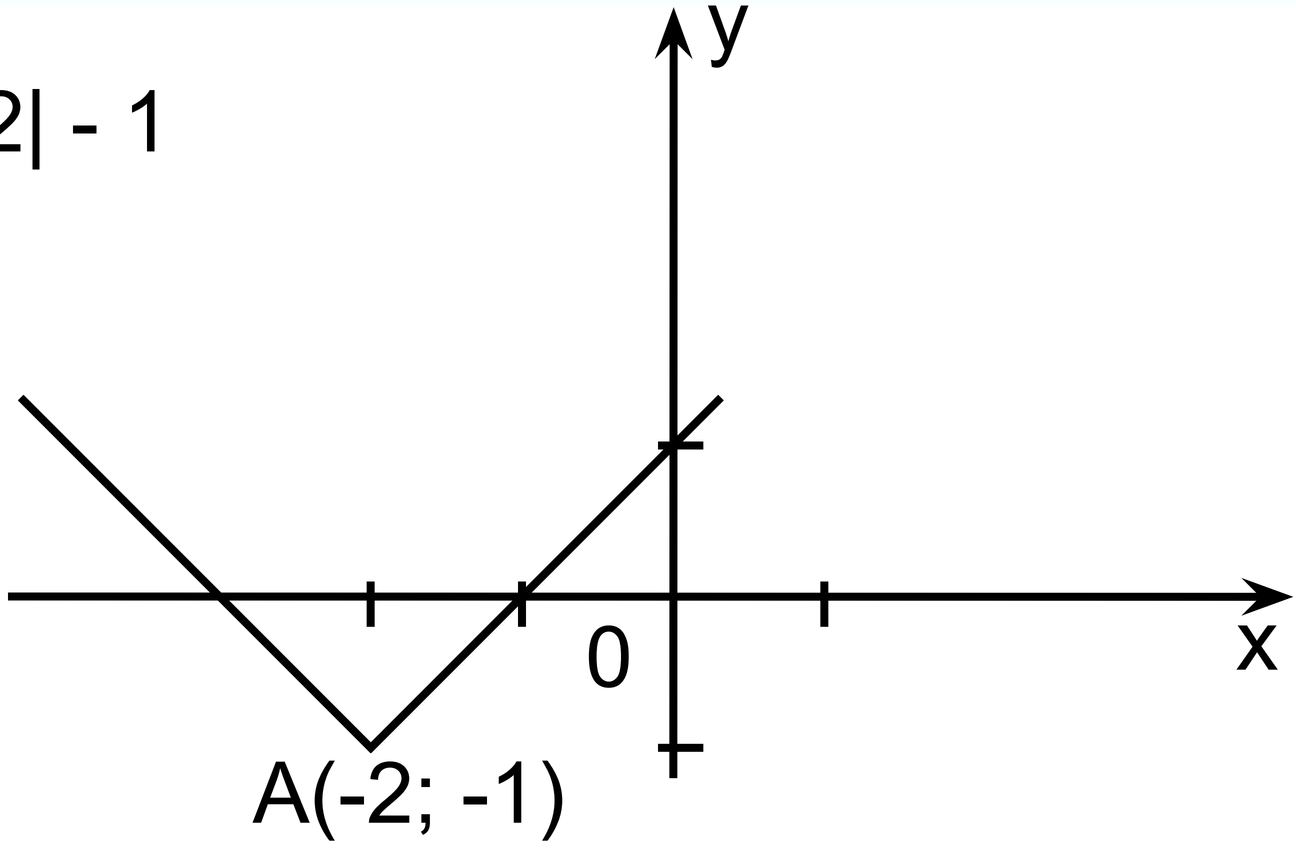


$y = |x - 1| + 2$

Вершина А имеет координаты (1; 2)



$y = |x + 2| - 1$



$y = -|x + 1|$

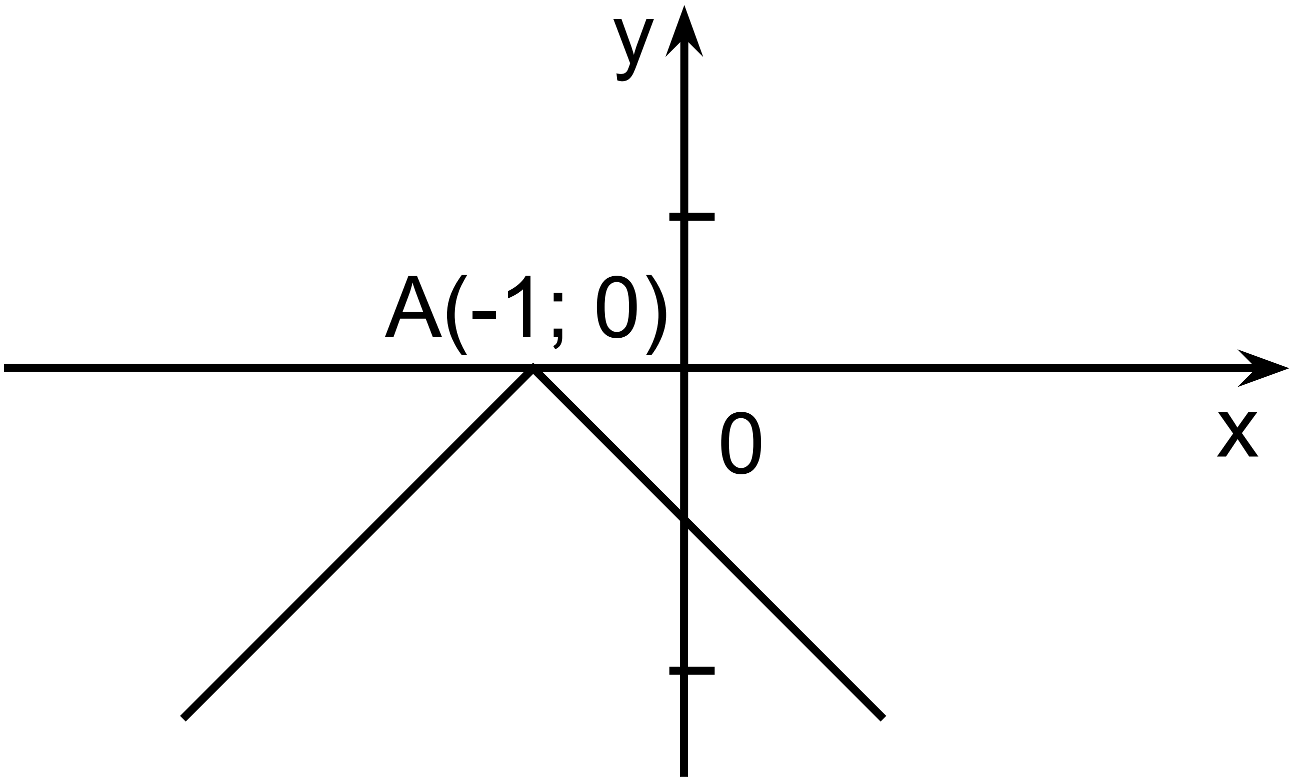
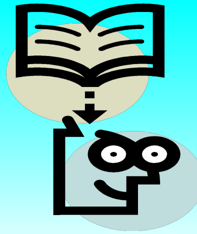


График функции вида $y = a|x - b| + c$



При $a > 0$ ветви графика направлены вверх;

при $a < 0$ ветви графика направлены вниз.

Вершина модуля имеет координаты $(b; c)$.

Число c – смещение графика вдоль оси y, т.е. при положительном c перемещаем график параллельным переносом вверх, при отрицательном – вниз.

Число а отвечает за сжатие к оси Оу:

$a > 1$ « усы» прижимаются к оси Оу,

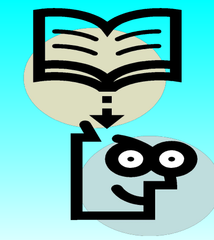
при $0 < a < 1$ «усы» прижимаются к оси Ох.

Домашнее задание

1. Прочитать раздел 5
2. Решить на стр. 57 номера 4.6 – 4.8,

на стр. 68 номера 5.1, 5.2 и 5.4.

Самостоятельная работа



1 вариант

1. $| x + 1 | < 0$
2. $| x | > 0$
3. $| x | \leq 2$
4. $| x | > 1$
5. $1 < | x | < 2$
6. $| x – 1 | < 3$

2 вариант

1. $| x - 1 | < 0$
2. $| x | \leq 0$
3. $| x | > 3$
4. $| x | \leq 1$
5. $2 < | x | < 3$
6. $| x – 2 | < 1$