Модуль действительного числа

Цели и задачи урока

- Ввести определение модуля действительного числа, рассмотреть свойства и разъяснить геометрический смысл модуля;
- Ввести функцию $y = |x|$, показать правила построения ее графика;
- Научить разными способами решать уравнения, содержащие модуль;
- Развивать интерес к математике, самостоятельность, логическое мышление, математическую речь, прививать аккуратность и трудолюбие.

Определение.

Модулем неотрицательного действительного числа х называют само это число: $|x| = x$;

модулем отрицательного действительного числа х называют противоположное число: $|x| = -x$.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например:

|8|=8; |-8|=-(-8)=8; $|\sqrt{5} - 3| = -(\sqrt{5} - 3) = 3 - \sqrt{5}$ (т.к. $\sqrt{5} - 3 < 0$)

Свойства модуля

1. $|a| \geq 0$.

2. $|ab| = |a||b|$.

3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, где $b \neq 0$.

4. $|a|^2 = a^2$.

5. $|a| = |-a|$.

Геометрический смысл модуля

Числовая прямая **служит хорошим примером множества действительных чисел. Давайте** отметим на числовой прямой две точки a и b и постараемся найти расстояние ρ(a;b) между этими точками. Очевидно что это расстояние равно b-a, если b>a

Если поменять местами, то есть a>b, расстояние будет равно a-b.

Если a=b то расстояние равно нулю, так как получается точка.
Все три случая мы можем описать единообразно:

$$\rho(a;b)=|a-b|$$

Пример. Решите уравнение:

- а) |x-3|=6 б) |x+5|=3 в) |x|=2.8 г)

Решение.

а) Нам нужно найти на координатной прямой такие точки, которые удалены от точки 3 на расстояние равное 6. $\rho(x;3)=6$

Такие точки 9 и -3. (Прибавили и отняли шестерку от тройки.)

Ответ: x=9 и x=-3

- **б)** |x+5|=3, перепишем уравнение в виде |x-(-5)|=3. $\rho(x;-5)=3$

Найдем расстояние от точки -5 удаленное на 3. Такое расстояние, получается, от двух точек: x=2 и x=-8

Ответ: x=2 и x=-8.

- **в)** |x|=2.8, можно представить в виде |x-0|=2.8 или

Очевидно, что x=-2.8 или x=2.8 $\rho(x;0)=2.8$

Ответ: x=-2.8 и x=2.8.

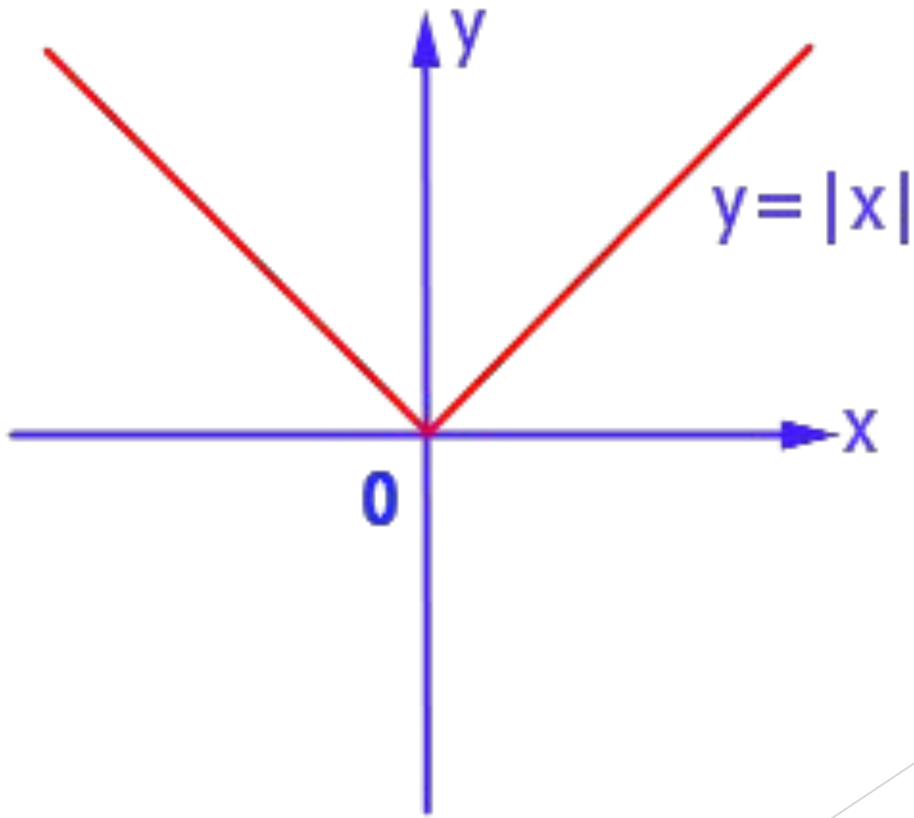
- **г)** $|x-\sqrt{3}|=2$ эквивалентно $\rho(x;\sqrt{3})=2$
- Очевидно, что $x=\sqrt{3}-2$ или $x=\sqrt{3}+2$

Задание 1.

Построить график и перечислить свойства функции $y = |x|$.

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Функция $y = |x|$



1. Область определения – $(-\infty; +\infty)$.
2. $у = 0$ при $х = 0$; $y > 0$ при $x < 0$ и $x > 0$.
3. Функция непрерывная.
4. $у_{наим} = 0$ при $х = 0$, $у_{наиб}$ не существует.
5. Функция ограничена снизу, не ограничена сверху.
6. Функция убывает на луче $(-\infty; 0]$ и

   возрастает на луче $[0; +\infty)$.
7. Область значений функции – луч $[0; +\infty)$.

Задание 2

Решить уравнение $|x-1| = 4$

1 способ (аналитический)

По определению модуля:

$x - 1 = 4,$ $\qquad$ $-(x - 1) = 4,$

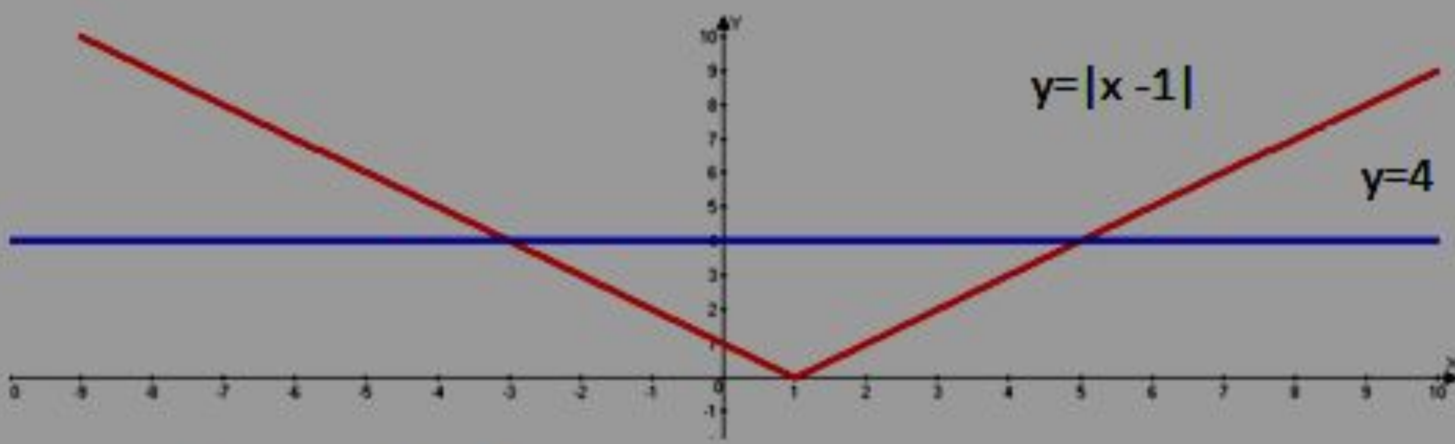
$x = 5.$ $\qquad$ $x - 1 = -4,$

$x = -3.$

Ответ: -3; 5.

2 способ (графический)

Построим на одной координатной плоскости графики функций $y = |x - 1|$ и $y = 4$. Абсциссы точек пересечения графиков будут решениями уравнения.



Ответ: -3; 5.

3 способ

Переведем аналитическую модель $|x-1|=4$ на геометрический язык: нужно найти на числовой прямой такие точки, которые удалены от точки 1 на расстояние, равное 4.

$1 + 4 = 5$

$1 + (-4) = -3.$

Ответ: -3; 5.

Модуль действительного числа.

Тождество $\sqrt{a^2} = |a|$

Рассмотрим выражение , если а>0, то мы знаем что . $\sqrt{a^2} = a$

Но как быть, в случае если а<0? Ведь не может быть , $\sqrt{a^2} = a$ таком случае корень равен отрицательному числу.

Давайте рассмотрим –а.

1. Если а<0 то –а>0.
2. $(-a)^2 = a^2$

Давайте обобщим: $$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$$

По определению модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

То есть $\sqrt{a^2} = |a|$

Модуль действительного числа.

Пример. Упростить выражение $\sqrt{(a-2)^2}$

а) $a-2\geq 0$ **б)** $a-2<0$

Решение. Справедливо тождество:

$$\sqrt{(a-2)^2} = |a-2|$$

а) Если $a-2\geq 0$, то $|a-2|=a-2$. Таким образом получаем

$$\sqrt{(a-2)^2} = a-2$$

б) Если $a-2<0$, то $|a-2|=-(a-2)=2-a$. Таким образом получаем

$$\sqrt{(a-2)^2} = 2-a$$

Модуль действительного числа.

Пример. Вычислить

$$\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$$

Решение. Мы знаем что:

$$\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}=|\sqrt{5}-3|$$

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=|\sqrt{5}-2|$$

Осталось раскрыть модули
Рассмотрим первое выражение:

$$\sqrt{5}-3<\sqrt{9}-3=3-3=0$$

$$\sqrt{5}-3<0$$

Рассмотрим второе выражение:

$$\sqrt{5}-2>\sqrt{4}-2=2-2=0$$

$$\sqrt{5}-2>0$$

Используя определение раскроем знаки модулей:

$$|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5}$$

$$|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$$

В итоге получили:

$$\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=3-\sqrt{5}+\sqrt{5}-2=1$$

Ответ: 1.

Закрепление нового материала.

- № 16.2, №16.3, №16.4, №16.12, №16.16 (а, г), №16.19

Задачи для самостоятельного решения

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решите уравнение:

а) |x-10|=3 б) |x+2|=1 в) |x|=2.8 г) $|x-\sqrt{5}|=1$

2. Решить уравнение:

а) |3x-9|=33 **б)**|8-4x|=16 **в)**|x+7|=-3

3. Упростить выражение $\sqrt{(2a-6)^2}$

если **а)** a-3≥0 **б)** a-3<0

4. Вычислите

$$\sqrt{(\sqrt{7}-4)^2}+\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}$$

Домашнее задание: прочитать материал §16, №16.6 16.11, 16.22