Мультипликативная модель

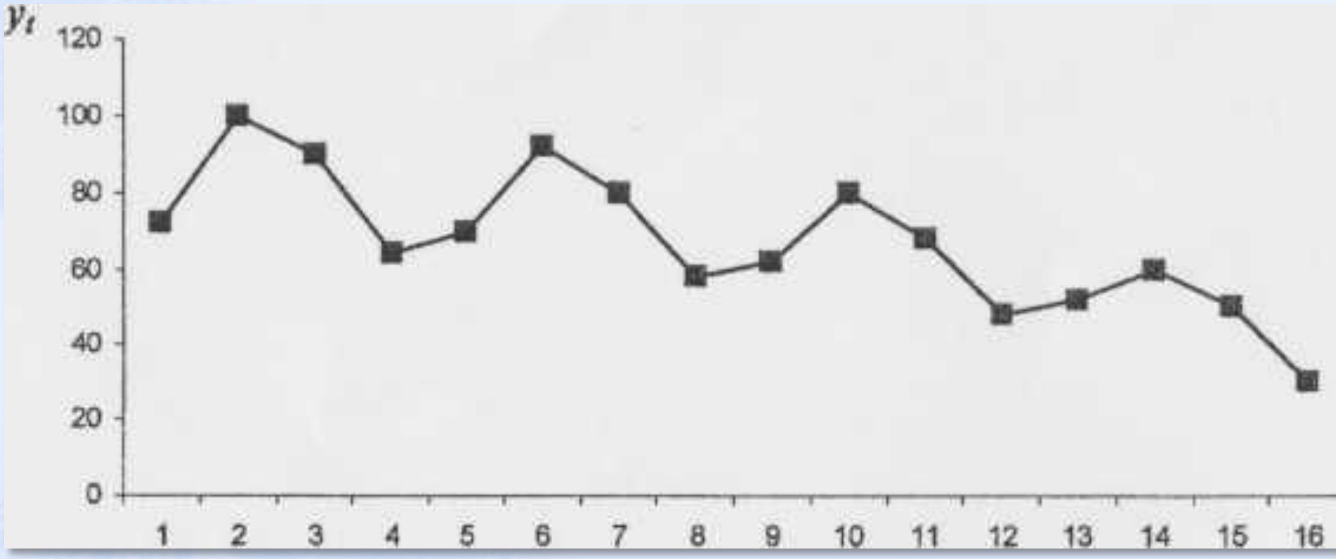
Мультипликативная модель

- Рассмотрим новый временной ряд — поквартальные данные о прибыли компании за последние 4 года (таблица 1):

Таблица 1

Год	Квартал			
	I	**II**	**Ш**	**IV**
1	**72**	**100**	**90**	**64**
2	**70**	**92**	**80**	**58**
3	**62**	**80**	**68**	**48**
4	**52**	**60**	**50**	**30**

- Построим график этого временного ряда



- График свидетельствует о наличии убывающей тенденции (тренда) и сезонных колебаний с периодом 4 (прибыль выше весной-летом и ниже осенью-зимой).

- Амплитуда сезонных колебаний не постоянна - она уменьшается с ростом /, поэтому мультипликативная модель будет более адекватна. Итак, строим модель вида:

$$Y= T*S*E$$

где *T*- трендовая, *S* -сезонная,
E - случайная компоненты.

Задача - определить эти компоненты. Шаги построения:

- **Шаг 1. Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней.** Методика полностью совпадает с методикой шага 1 для аддитивной модели (п. 4.4, шаг 1). Полученные данные внесем ***в столбцы 3-5*** таблицы 2.

Таблица 2

t	y_t	Итого за 4 квартала	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	2	3	4	5	6
1	72	-	-	-	-
2	100			-	-
3	90	326	81,5		
4	64	324	81	81,25	1,108
5	70	316	79	80	0,8
6	92	306	76,5	77,75	0,9
7	80	300	75	75,75	1,215
8	58	292	73	74	1,081
9	62	280	70	71,5	0,811
10	80	268	67	68,5	0,905
11	68	258	64,5	65,75	1,217
12	48	248	62	63,25	1,075
13	52	228	57	59,5	0,807
14	60	210	52,5	54,75	0,95
15	50	192	48	50,25	1,194
16	30	-	-	-	-

- **Шаг 2. Рассчитаем *оценки сезонной компоненты* как частное от деления фактических уровней ряда (y_t) на центрированные скользящие средние (y_3/u_1, y_4/u_2,..., y_{14}/u_{12}** где *Ui* - значения столбца 5), получим столбец 6.

- Теперь на основе этих оценок рассчитаем *значения сезонной компоненты S*. Для этого найдем *средние* за каждый квартал (по всем годам) оценки сезонной компоненты S_i. (таблица 3).

Таблица 3

Показатель	Год	Номер квартала, /			
		I	II	III	IV
	1	-	-	1,108	0,8
	2	0,9	1,215	1,081	0,817
	3	0,905	1,217	1,075	0,807
	4	0,95	1,194	-	-
Сумма за Z-тый кавртал		2,755	3,626	3,264	2,424
Средняя оценка сезонной компоненты для i-го квартала, S_t (=∑/3)		0,918	1,209	1,088	0,808
Скорректированная сезонная компонента, S_i		0,913	1,202	1,082	0,803

- Взаимопогашаемость сезонных воздействий в мультипликативной модели выражается в том, что *сумма значений сезонной компонеты по всем кварталам должна быть равна числу периодов в цикле*, здесь 4, так как в примере число периодов одного цикла (год) равно четырем кварталам.

Шаг 3. Разделим каждый уровень исходного ряда на соответствующие значения сезонной компоненты.

Получим

T*E = Y/S (столбец 4 таблицы 4): S_i

Шаг 4. Определим трендовую компоненту T в модели.

Для этого рассчитаем параметры парной линейной регрессии y - a + $Ьx$, в котором роль у играет $T*E$, а роль x - время t (например, используя программу «Регрессия» в Excel).
Получим:

a = 90,585150 b = -2,773250

- Стандартная ошибка коэффициента регрессии
  $S*$ = 0,225556 R^2 = 0,915239 n= 16
- Число степеней свободы n-2 =14.
- В результате получен линейный тренд (прямая) вида:
- T=90,59-2,773 •t
- Значение R^2 показывает, что полученная прямая хорошо аппроксимирует зависимость $T*E$ от t.
- Подставим имеющиеся значения t (t = 1, ..., 16) в это уравнение, получим значения T для каждого момента времени, внесем их в таблицу 4 **(столбец 5).**

Шаг 5. Найдем значения уровней ряда y_t, вычисленные по мультипликативной модели,

- т.е. посчитаем произведение *T-S,* умножая каждое значение тренда *T* на соответствующее значение сезонной компоненты *S,* по кварталам.

- Полученные значения внесем в **столбец 6** таблицы **4.**

Шаг 6. Рассчитаем случайную компоненту модели - ошибку *E*.

? В мультипликативной модели
  $E = Y/(T*S)$.
  Разделив значения y_t на
? соответствующие значения ряда $T*S$, получим значения $\boldsymbol{E_i}$ - **столбец** 7.
? Для того, чтобы можно было сравнить мультипликативную модель с другими моделями временного ряда, можно использовать сумму квадратов абсолютных ошибок.
?

- *Абсолютные ошибки* в мультипликативной модели
- определяются по формуле: $E = y_t - (T*S)$. Вычислим их и занесем в **столбец 8.**
- Посчитаем квадраты ошибок **(столбец 9)** и их сумму $\sum E^2$ =207,24.
- Рассчитаем также сумму квадратов отклонений уровней ряда от его среднего значения:

  $\sum(y_t - y_t)^2$ =5023.
- Вычислим долю ошибки 207,24 / 5023 = 0,04. В процентном формате - это 4%. Оставшаяся часть - 96% - *доля дисперсии уровней временного ряда*, объясненная мультипликативной моделью.

Вывод:

- Полученная мультипликативная модель
  Y = T*S*E,
  в которой тренд T **=** 90,59 - 2,773*t , сезонная компонента S составляет по кварталам:
  I квартал: $S1$ = 0,913; II квартал: S_2 = 1,202; III квартал: S_3 = 1,082; IV квартал: S_4 = 0,803,

  объясняет 96% общей вариации уровней временного ряда прибыли компании за последние 16 кварталов.