# МУРАВЬИНЫЕ АЛГОРИТМЫ

**A**NT

**C**OLONY

**O**PTIMIZATI

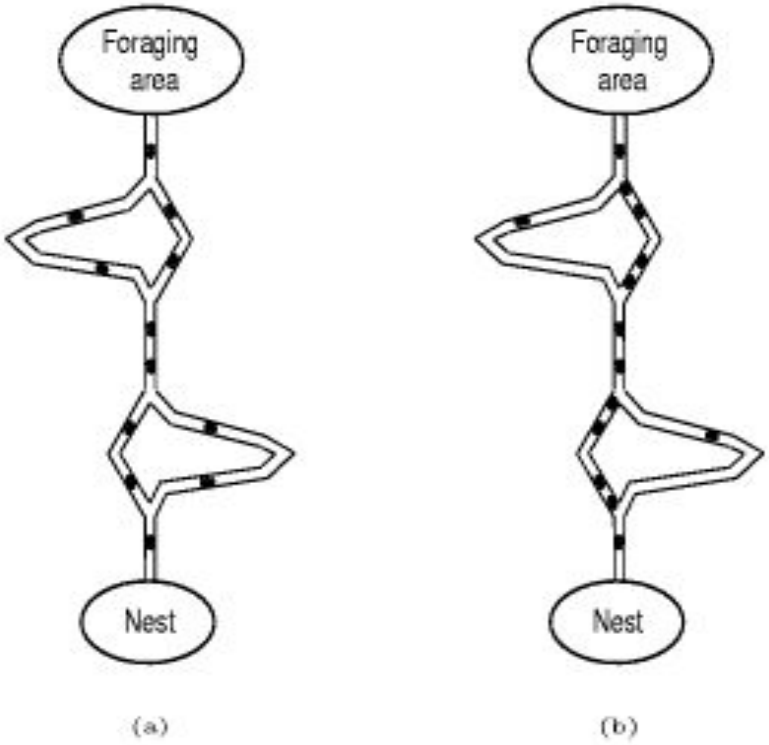
# САМООРГАНИЗАЦИЯ

Основу поведения муравьиной колонии составляет **самоорганизация.**

Самоорганизация является результатом взаимодействия следующих четырех компонентов:

- случайность;
- многократность;
- положительная обратная связь;
- отрицательная обратная связь.

# ДВИЖЕНИЕ МУРАВЬЁВ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ ФЕРОМОНА




При своём движении муравей метит путь феромоном, и эта информация используется другими муравьями для выбора пути.

# ОБОБЩЁННЫЙ АЛГОРИТМ

- **ПОКА (условия выхода не выполнены)**
    1. **Создание муравьёв**
    2. **Поиск решения**
    3. **Обновление феромонов**
    4. **Дополнительные действия {опционально}**

# ПОИСК РЕШЕНИЯ

Вероятность перехода из вершины $i$ в вершину $j$ в момент времени $t$

$$p_{ij}(t) = \frac{\tau_{ij}(t)^{\alpha}\left(\frac{1}{d_{ij}}\right)^{\beta}}{\sum_{j \in J_i} \tau_{ij}(t)^{\alpha}\left(\frac{1}{d_{ij}}\right)^{\beta}}, \qquad (1)$$

где $J_i$ – множество вершин, в которые разрешен переход из вершины $i$,

$\tau_{ij}(t)$ – уровень феромона на дуге $i$ - $j$ на шаге $t$,

$d_{ij}$ – расстояние между вершинами $i$ и $j$,

$\alpha, \beta$ – константные параметры.

# ОБНОВЛЕНИЕ ФЕРОМОНА

Уровень феромона:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \sum_{k \in M_{ij}} \frac{L_{\min}}{L_k} \qquad (2)$$

где $\rho$ – интенсивность испарения,

$M_{ij}$ – множество муравьёв, прошедших по дуге $(i, j)$,

$L_k$ – длина маршрута $k$ –го муравья,

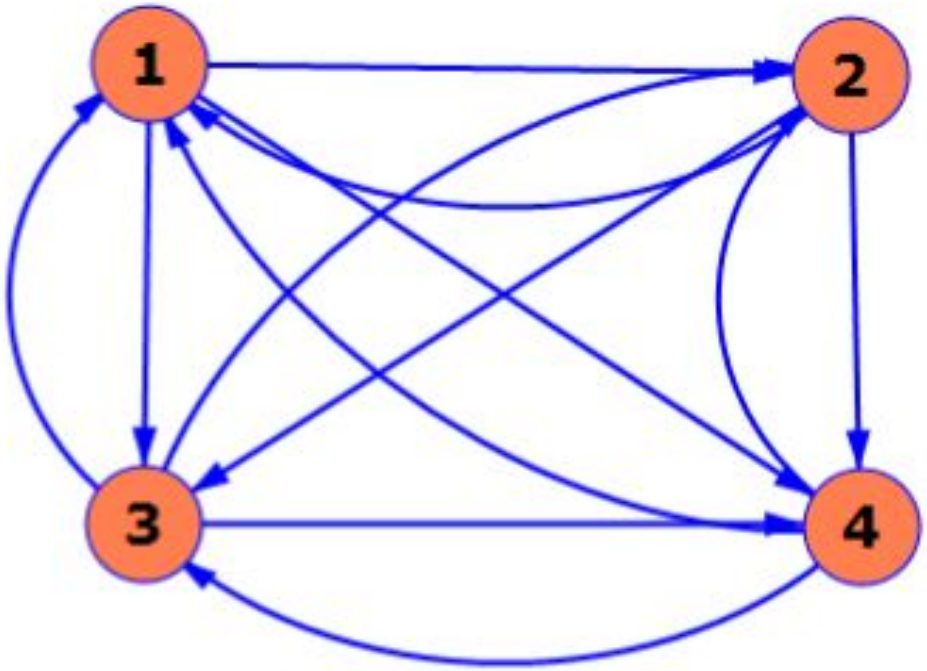
$L_{\min}$ – предполагаемая **идеальное значение ЦФ (в задаче на минимум)**,

$\frac{L_{\min}}{L_k}$ – феромон, откладываемый $k$ -ым муравьём на ребре $(i, j)$.

# ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРИ ПОМОЩИ МУРАВЬИНЫХ АЛГОРИТМОВ

1. Представить задачу в виде набора компонент (вершин) и переходов (ребер) или набором взвешенных графов, на которых муравьи могут строить решения.
2. Определить эвристику поведения муравья при построении решения (определение вероятностей переходов – (1)).
3. Определить значение следа феромона (соотношение (2)).
4. Определить процедуру эффективного локального поиска (если возможно).
5. Подобрать параметры ACO–алгоритма $(\alpha, \beta, \rho, L_{\min})$

# ПРИМЕНЕНИЕ *ACO* ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА



# СОЗДАНИЕ МУРАВЬЕВ

- ✔ Общее количество муравьёв равно количеству городов;
- ✔ каждый муравей начинает маршрут из своего города;
- ✔ изначально количества феромона на рёбрах принимается равным небольшому положительному числу.

# ПОИСК РЕШЕНИЯ

**$J_{ik}$ – список городов, которые необходимо посетить муравью $k$, находящемуся в городе $i$.**

Вероятность перехода $k$–го муравья из города $i$ в город $j$:

$$p_{ij}(t) = \frac{\tau_{ij}(t)^{\alpha}\left(\eta_{ij}\right)^{\beta}}{\sum_{j \in J_i} \tau_{ij}(t)^{\alpha}\left(\eta_{ij}\right)^{\beta}} \quad , \quad j \in J_{ik} \quad , \qquad (1')$$

$$p_{ij}(t) = 0 \quad , \quad j \notin J_{ik} \quad ,$$

# ОБНОВЛЕНИЕ ФЕРОМОНА

Пусть

$T_k(t)$ – цикл, пройденный муравьём $k$ к моменту времени $t$,

$L_k(t)$, – длина этого цикла,

$L_{\min}$ – параметр, имеющий значение порядка длины оптимального цикла.

Тогда на ребре $(i, j)$ $k$-й муравей количество откладывает такое количество феромона:

$$\Delta\tau_{ij,k} = \begin{cases} \dfrac{L_{\min}}{L_k}, & (i,j) \in T_k(t) \\ 0, & (i,j) \notin T_k(t) \end{cases}$$

# ОБНОВЛЕНИЕ ФЕРОМОНА

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t),$$

$$\Delta\tau_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{M} \Delta\tau_{ij,k}(t), \qquad (2')$$

где $M$ – количество муравьёв в колонии

# МОДИФИКАЦИИ АЛГОРИТМОВ ACO

***Муравьиная система с элитными муравьями Elitist Ant System***

**Суть: искусственное увеличение уровня феромонов на самых удачных маршрутах**.

1. На каждой итерации алгоритма определяется элитный муравей (ему соответствует $T^*$ – наилучший текущий цикл длиной $L^*$ )
2. Рёбра наилучшего текущего цикла $T^*$ получат дополнительное количество феромона $\Delta\tau = \frac{L_{\min}}{L^*}$.
3. Если же в колонии есть $l$ элитных муравьёв, то аналогично, рёбра соответствующих им наилучших $l$ циклов получают дополнительное количество феромона.

# МОДИФИКАЦИИ АЛГОРИТМОВ ACO

***Модифицированная муравьиная система Ant Colony System***

Три основных изменения:

- уровень феромонов на ребрах обновляется не только в конце очередной итерации, но и **при каждом переходе муравьев из узла в узел**.
- в конце итерации уровень феромонов повышается только на кратчайшем из найденных путей.
- алгоритм использует измененное правило перехода: либо, с определенной долей вероятности, муравей безусловно выбирает лучшее – в соответствие с длиной и уровнем феромонов – ребро, либо производит выбор так же, как и в классическом алгоритме.

# МОДИФИКАЦИИ АЛГОРИТМОВ ACO

***Муравьиная система Max-min Max-min Ant System***

Суть: ограничение на максимальную и минимальную концентрацию феромонов на ребрах  эффективная защита от преждевременной сходимости к субоптимальным решениям.

# МОДИФИКАЦИИ АЛГОРИТМОВ ACO

***Муравьиная система с ранжированием AS-rank***

Суть: **в конце каждой итерации муравьи ранжируются в соответствие с длинами пройденных ими путей. Количество феромонов, оставляемого муравьем на ребрах, таким образом, назначается пропорционально его позиции.**

# ПРИМЕР

Матрица расстояний D:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ∞ | 15 | 9 | 3 | 6 |
| 15 | ∞ | 8 | 4 | 5 |
| 9 | 8 | ∞ | 14 | 12 |
| 3 | 4 | 14 | ∞ | 6 |
| 6 | 5 | 12 | 6 | ∞ |

Стартовый город 1

Феромон(начальный) = 0,1

$\alpha = 0,6$; $\beta = 0,65$; $\rho = 0,3$

Последовательность случайных чисел : 0,08 0,53 0,95 0,96 0,49 0,04

# ИТЕРАЦИЯ 1

Вероятности переходов : 0,142 (2) 0,198 (3) 0,404 (4) 0,256 (5)

| 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| 0,142 | 0,198 | 0,404 | 0,257 |
| 0,142 | 0,340 | 0,744 | 1 |

# ИТЕРАЦИЯ 1

Вероятности переходов : 0,142 (2) 0,198 (3) 0,404 (4) 0,256 (5)

| 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| 0,142 | 0,198 | 0,404 | 0,257 |
| 0,142 | 0,340 | 0,744 | 1 |

Случайное число 0,08, переход в вершину 2

# ИТЕРАЦИЯ 1

Вероятности переходов : 0,255 (3) 0,400 (4) 0,346 (5)

Случайное число 0,53, переход в вершину 4

Вероятности переходов : 0,366 (3) 0,634 (5)

Случайное число 0,95, переход в вершину 5

переход в вершину 3

**Полученный путь : 1-2-4-5-3-1. Стоимость : 46**

# ИТЕРАЦИЯ 1

«Идеальный» путь (жадным алгоритмом) : 1-4-2-5-3-1. Стоимость : 33

На дугах пути муравей откладывает феромона в количестве 33/46

Матрица феромонов F

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,68 | 0,07 | 0,07 | 0,07 |
| 0,07 | 0 | 0,07 | 0,68 | 0,07 |
| 0,68 | 0,07 | 0 | 0,07 | 0,07 |
| 0,07 | 0,07 | 0,07 | 0 | 0,68 |
| 0,07 | 0,07 | 0,68 | 0,07 | 0 |