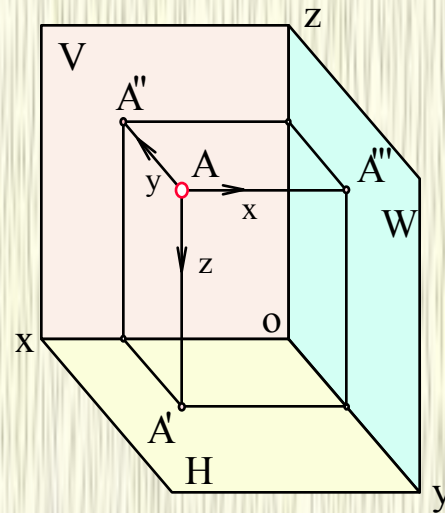


# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## Пересечение плоскостей

Слайд-фильм



2013

Г.

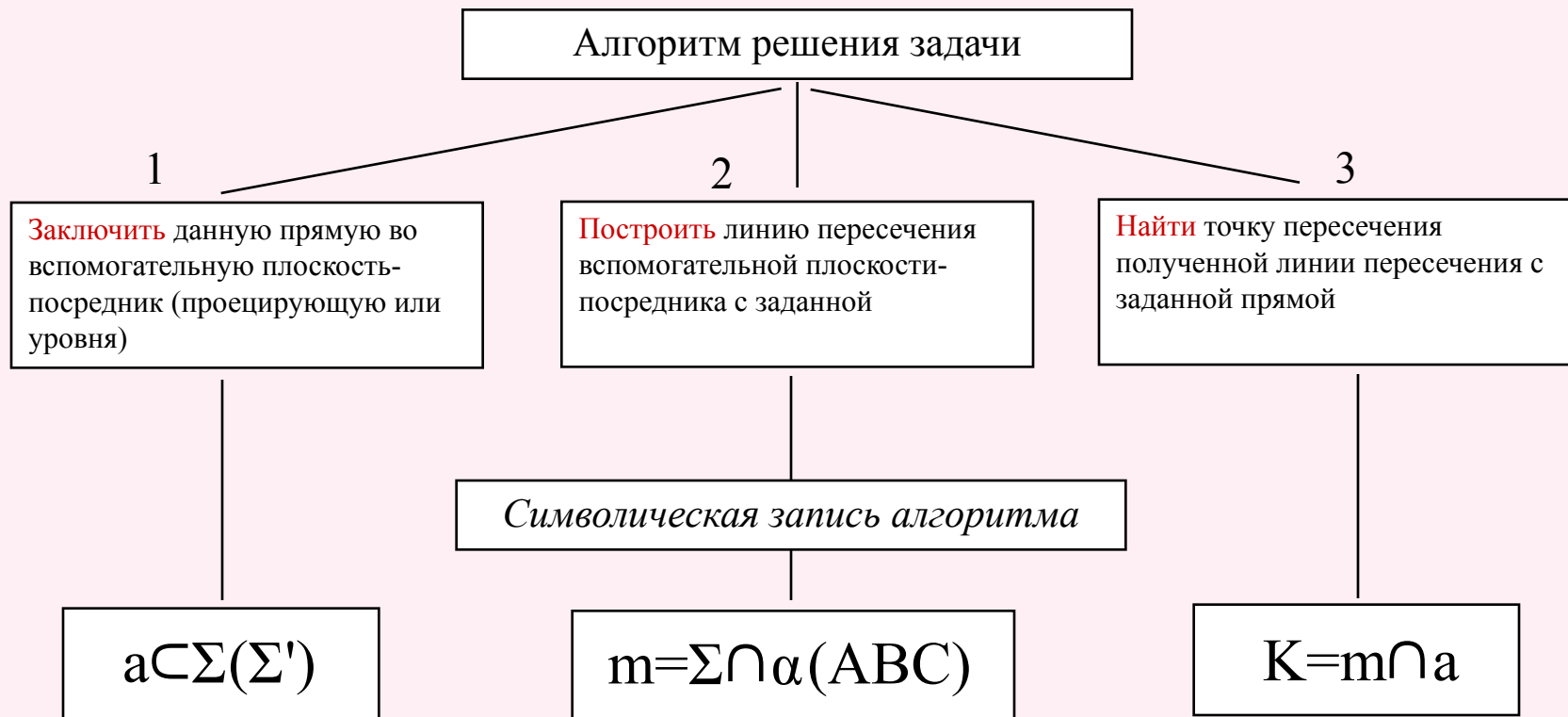
### 3.5.1. Прямая линия, пересекающая плоскость

**Поставлена задача:**

Определить точку **К** пересечения данной прямой **a** с плоскостью  $\alpha$ .

Определить видимость прямой.

Решение задачи выполняется в три этапа.

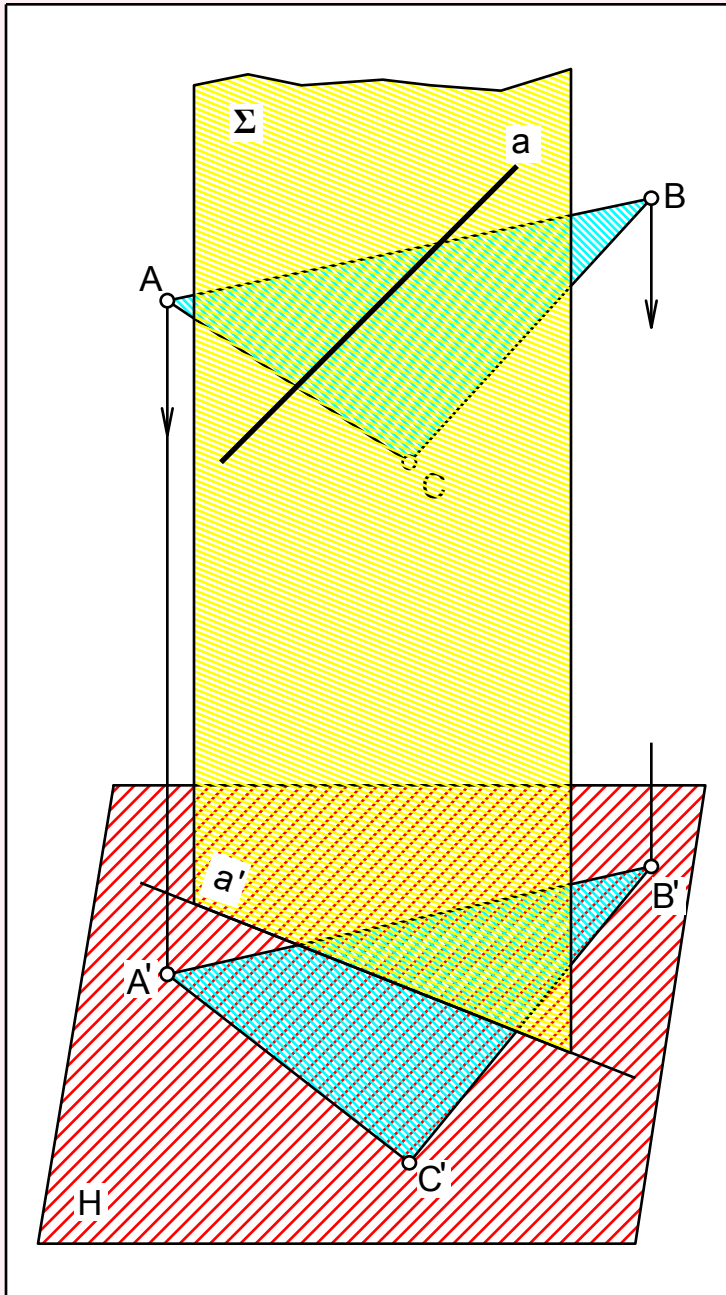


**Определить** видимость прямой **a** по правилу конкурирующих точек

Геометрические образы (пл.  $ABC$ , прямая  $a$ ) спроецированы на плоскость  $\Pi$ .

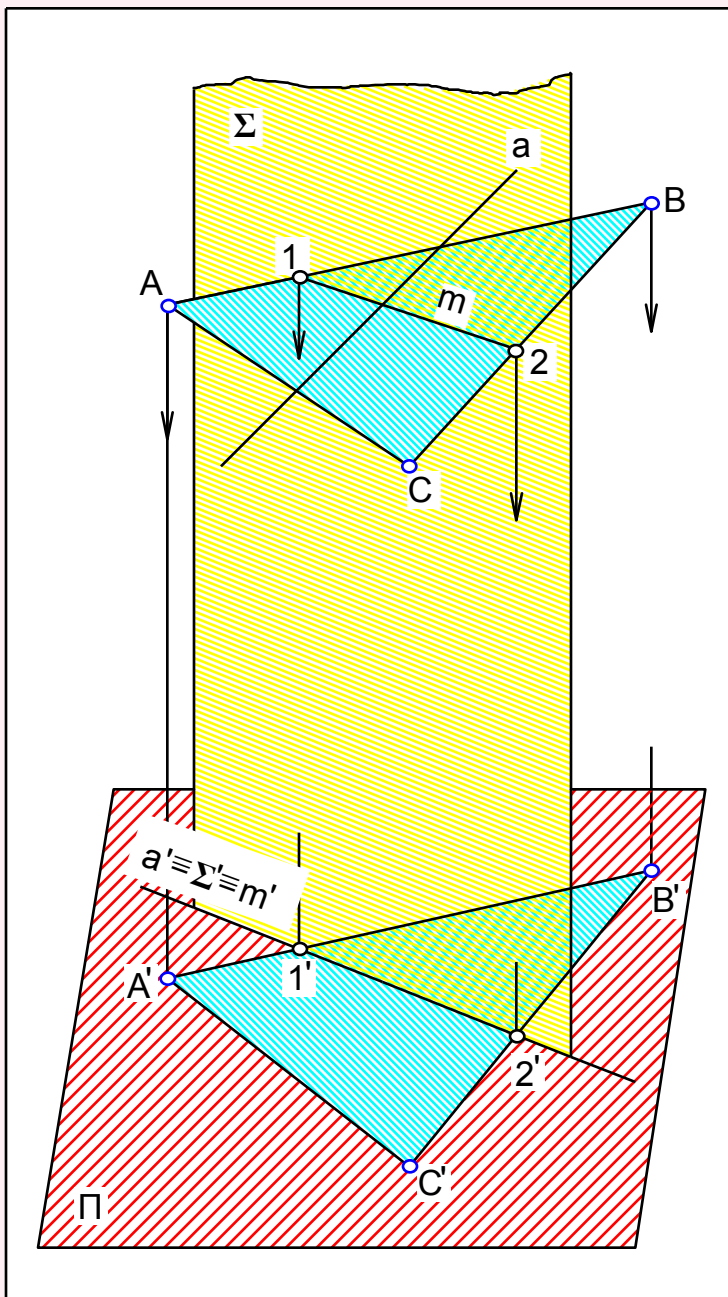
А теперь посмотрите как выполняются эти этапы алгоритма на пространственном рисунке и при проецировании всех элементов задачи на плоскости  $\Pi$ .

Выполняем 1-й этап алгоритма  $a \subset \Sigma(\Sigma')$



Выполняем 2-й этап  
алгоритма

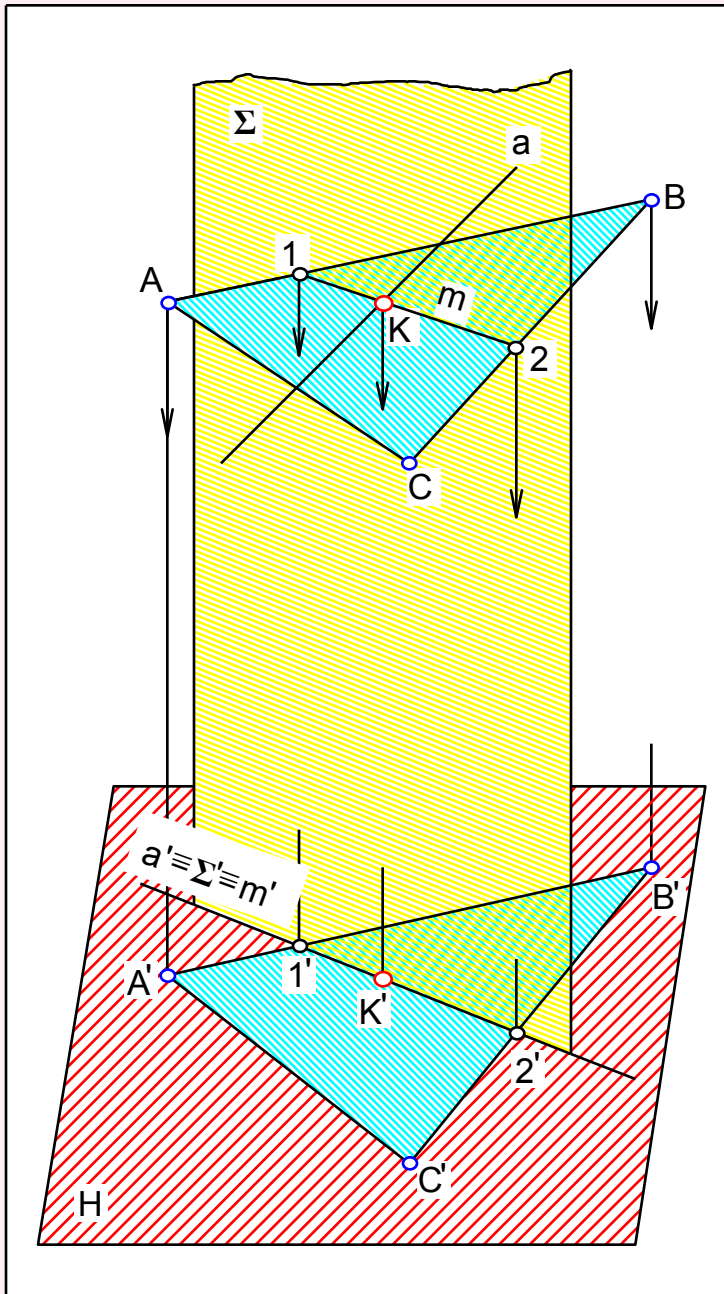
$$m = \Sigma \cap \alpha(ABC)$$



Выполняем 3-й этап алгоритма

$$K = m \cap a$$

Точка  $K$  - искомая точка пересечения данной прямой  $a$  с плоскостью  $ABC$ .



Рассмотрим применение данного алгоритма при решении задачи на построение точки  $K$  пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\alpha$ . Возможны три варианта условия данной задачи:

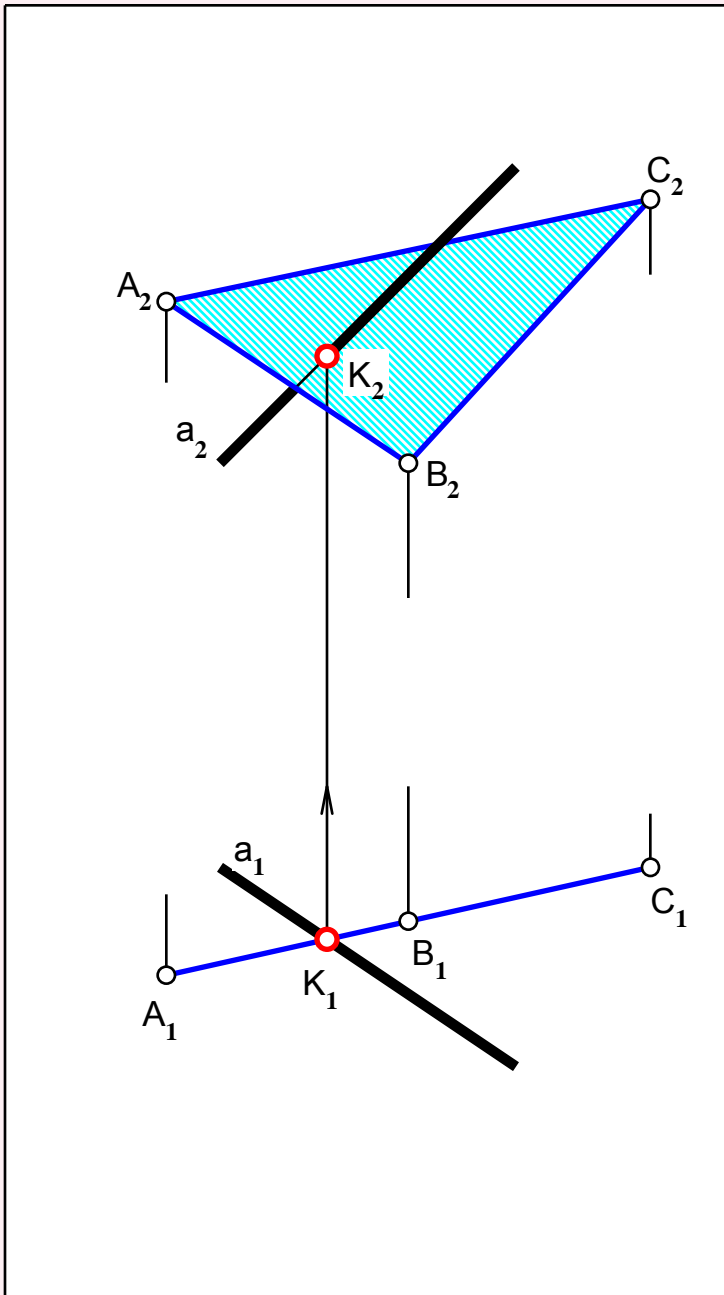
- прямая  $a$  - общего положения, плоскость  $\alpha$  - проецирующая (или уровня);
- прямая  $a$  - проецирующая, плоскость  $\alpha$  - общего положения;
- прямая  $a$  - общего положения, плоскость  $\alpha$  - общего положения.

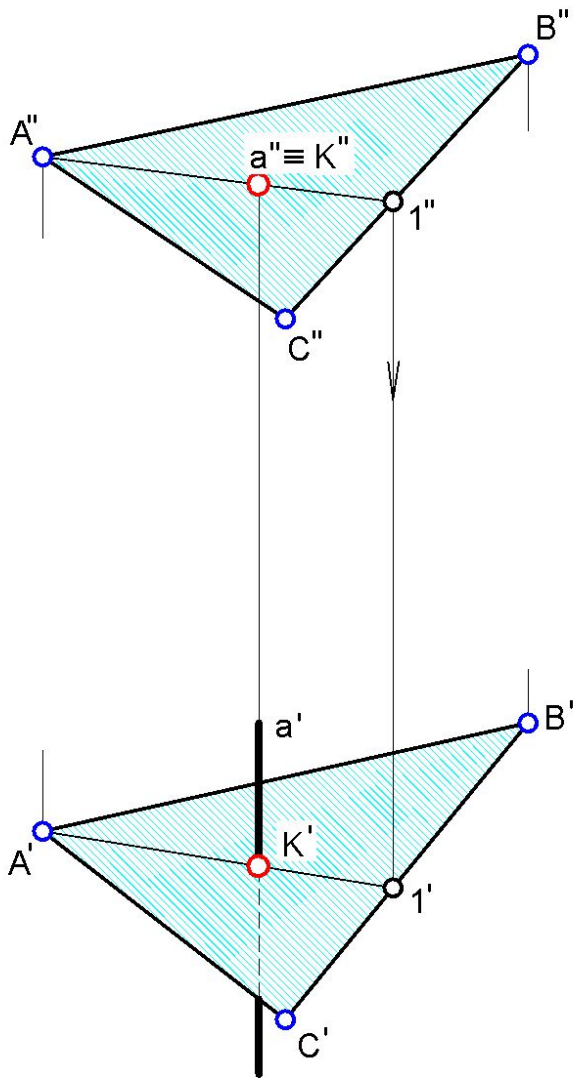
Решение первых двух задач можно выполнить, не применяя алгоритма, так как один из заданных образов частного положения.

В первом случае плоскость  $\alpha$  (ABC) - *горизонтально проецирующая*.

Поэтому горизонтальная проекция  $K_1$  искомой точки  $K$  определяется как точка пересечения линейной проекции  $A'B'C'$  плоскости  $\alpha$  с горизонтальной проекцией  $a_1$  данной прямой  $a$ .

Фронтальная проекция  $K_2$  точки  $K$  строится из условия принадлежности точки  $K$  прямой  $a$ .





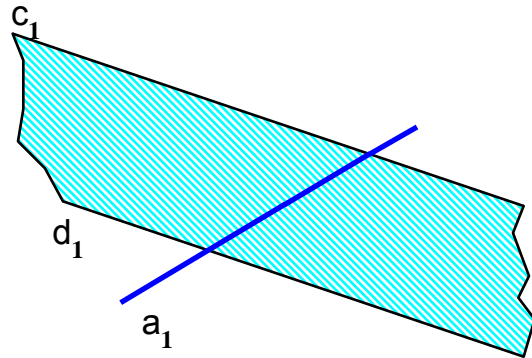
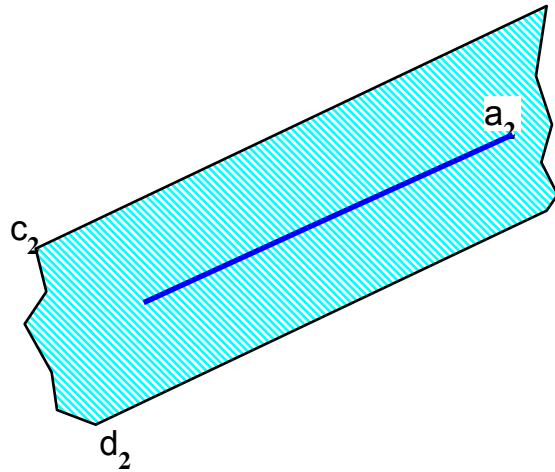
Во втором случае прямая  $a$  - *фронтально-проецирующая*.

Поэтому фронтальные проекции любой ее точки, а также и искомой  $K$  пересечения  $a$  с плоскостью  $\alpha$  ( $ABC$ ), совпадает с ее вырожденной проекцией  $a'' \equiv K''$ .

Построение горизонтальной проекции  $K'$  точки  $K$  выполняется из условия принадлежности точки  $K$  плоскости  $\alpha$ : точка  $K$  принадлежит плоскости  $\alpha$ , так как она принадлежит ее прямой  $A1$  ( $K'$  находится как точка пересечения прямой  $A'1'$  с прямой  $a'$ ).

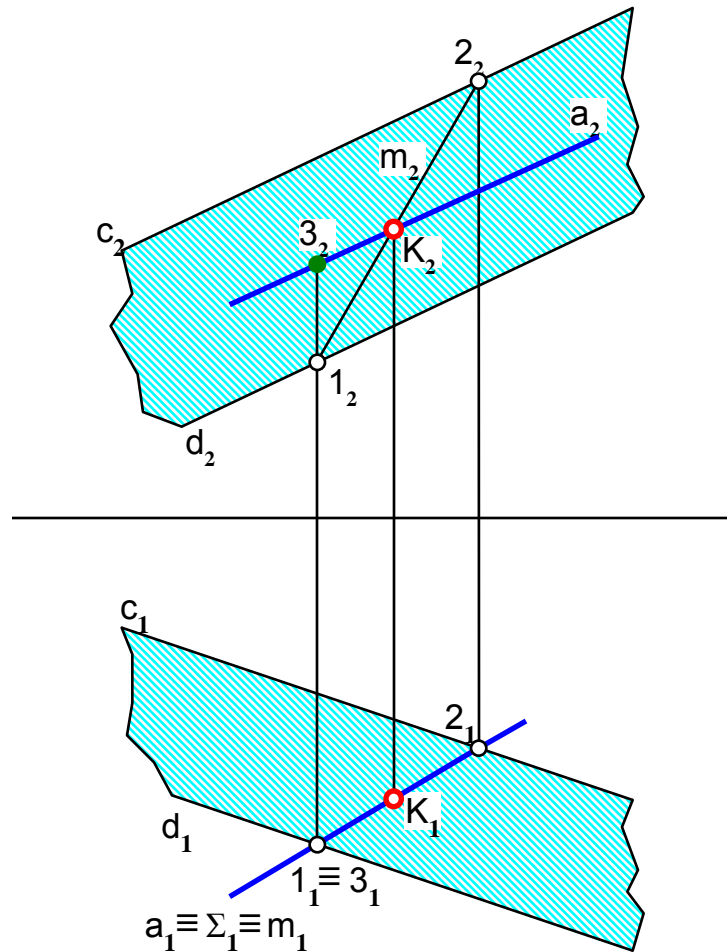
Видимость прямой  $a$  в этих задачах решается просто - с помощью реконструкции данных образов (по наглядности).





В третьем, общем, случае построение искомой точки  $K$  пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\alpha$  ( $c//d$ ) выполнено по описанному алгоритму.

- 1) прямую  $a$  заключают во вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость-посредник  $\Sigma(\Sigma_1)$ ;
- 2) строят прямую  $m$  пересечения плоскостей  $\alpha$  ( $c//d$ ) и  $\Sigma(\Sigma_1)$ . На чертеже это отразится записью  $(a_1 \equiv \Sigma_1 \equiv m_1)$ . Фронтальную проекцию  $m_2$  строят из условия ее принадлежности данной плоскости  $\alpha$  ( $m$  и  $\alpha$  имеют общие точки 1 и 2);
- 3) находят точку  $K_2$ , как результат пересечения  $a_2$  с  $m_2$ , а  $K_1$  строят по принадлежности прямой  $m_1$ . Точка  $K(K_2, K_1)$  - искомая точка пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\alpha$  ( $c//d$ ).



Задачу заканчивают определением видимости прямой по правилу конкурирующих точек. Так, на плоскости  $\Pi$  видимость определена с помощью горизонтально конкурирующих точек  $1$  и  $3(1_1 \equiv 3_1)$ , где точка  $1$  принадлежит плоскости  $\alpha$  а точка  $3$  - прямой  $a$ . Точка  $3$  расположена над точкой  $1$ , поэтому точка  $3$  и прямая  $a$  в этом участке на плоскости  $\Pi_1$  будет видима.

На фронтальной плоскости видимость может быть определена или с помощью пары фронтально-конкурирующих точек, или по реконструкции данных образов (при восходящей плоскости видимость одинаковая на плоскостях  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ).

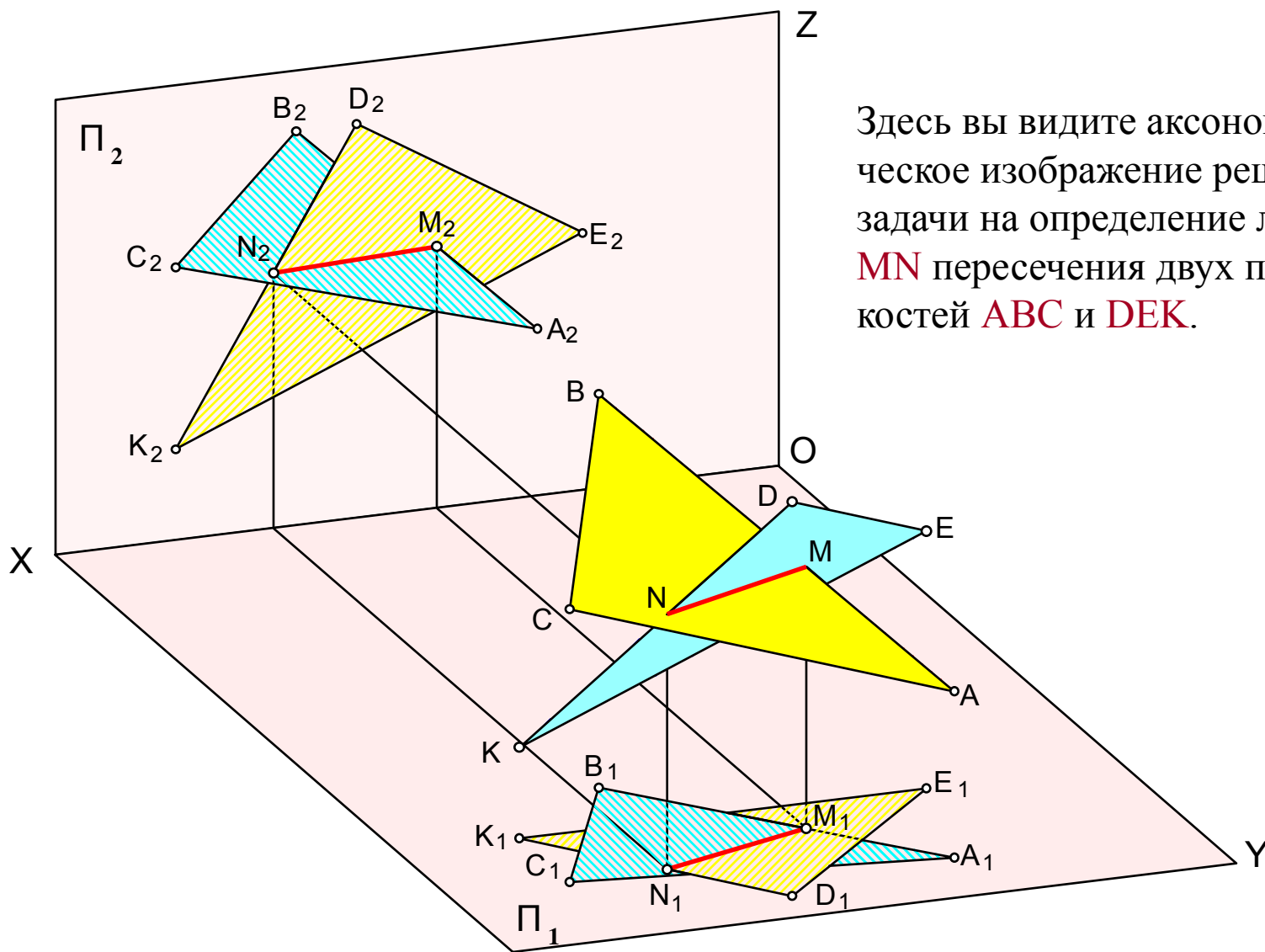
Данная задача после определения видимости прямой  $a$  имеет вид данного рисунка.

## Определение линии пересечения двух плоскостей общего положения

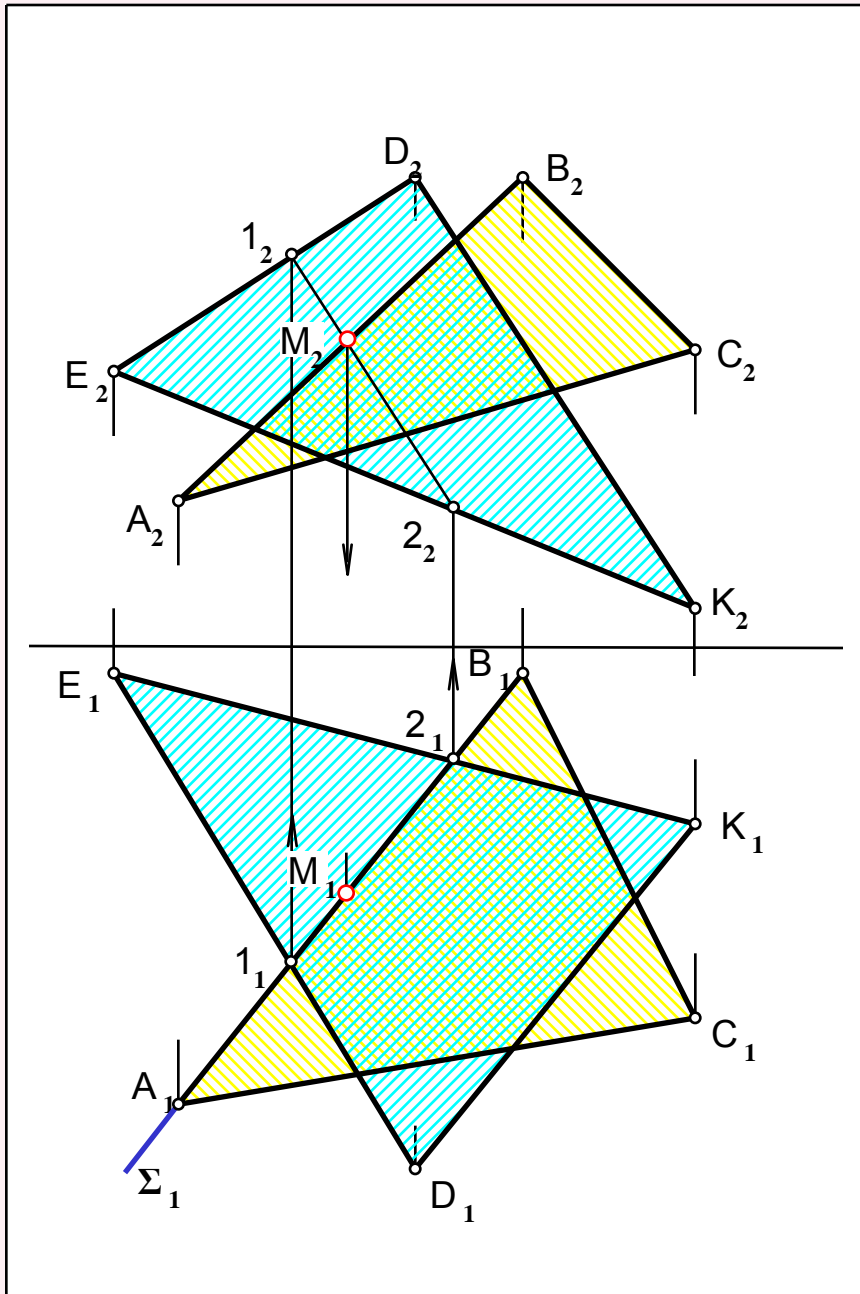
Для определения точек линии пересечения обе заданные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекают двумя вспомогательными (параллельными между собой) плоскостями-посредник. Некоторое упрощение можно достичь, если вспомогательные плоскости проводить через прямые, задающие плоскость.

Рассмотрим пример. Плоскость  $\alpha$  задана (**ABC**), плоскость  $\beta$  задана (**DEK**). Точки **M** и **N**, определяющие искомую линию пересечения двух данных плоскостей найдем как точки пересечения каких-либо двух сторон (как две прямые) треугольника **ABC** с плоскостью другого треугольника **DEK**, т.е. дважды решим позиционную задачу на определение точки пересечения прямой с плоскостью по рассмотренному алгоритму.

Выбор сторон треугольников произволен, так как только построением можно точно определить, какая действительно сторона и какого треугольника пересечет плоскость другого. Выбор плоскости-посредник также произволен, так как прямую общего положения, какими являются все стороны треугольников **ABC** и **DEK**, можно заключить в горизонтально проецирующую или во фронтально проецирующую плоскости.



Здесь вы видите аксонометрическое изображение решения задачи на определение линии  $MN$  пересечения двух плоскостей  $ABC$  и  $DEK$ .



### 1-й этап решения

Для построения точки **М** использована горизонтально проецирующая плоскость - посредник  $\Sigma$  ( $\Sigma_1$ ), в которую заключена сторона  $AB \triangle ABC$  ( $AB \subset \alpha$ ).

**1. Обозначаем горизонтально проецирующую плоскость -  $\Sigma$**

### 2-й этап решения

Строим линию пересечения (на чертеже она задана точками **1** и **2**) плоскости-посредника  $\Sigma$  ( $\Sigma_1$ ) и плоскости **DEK**.

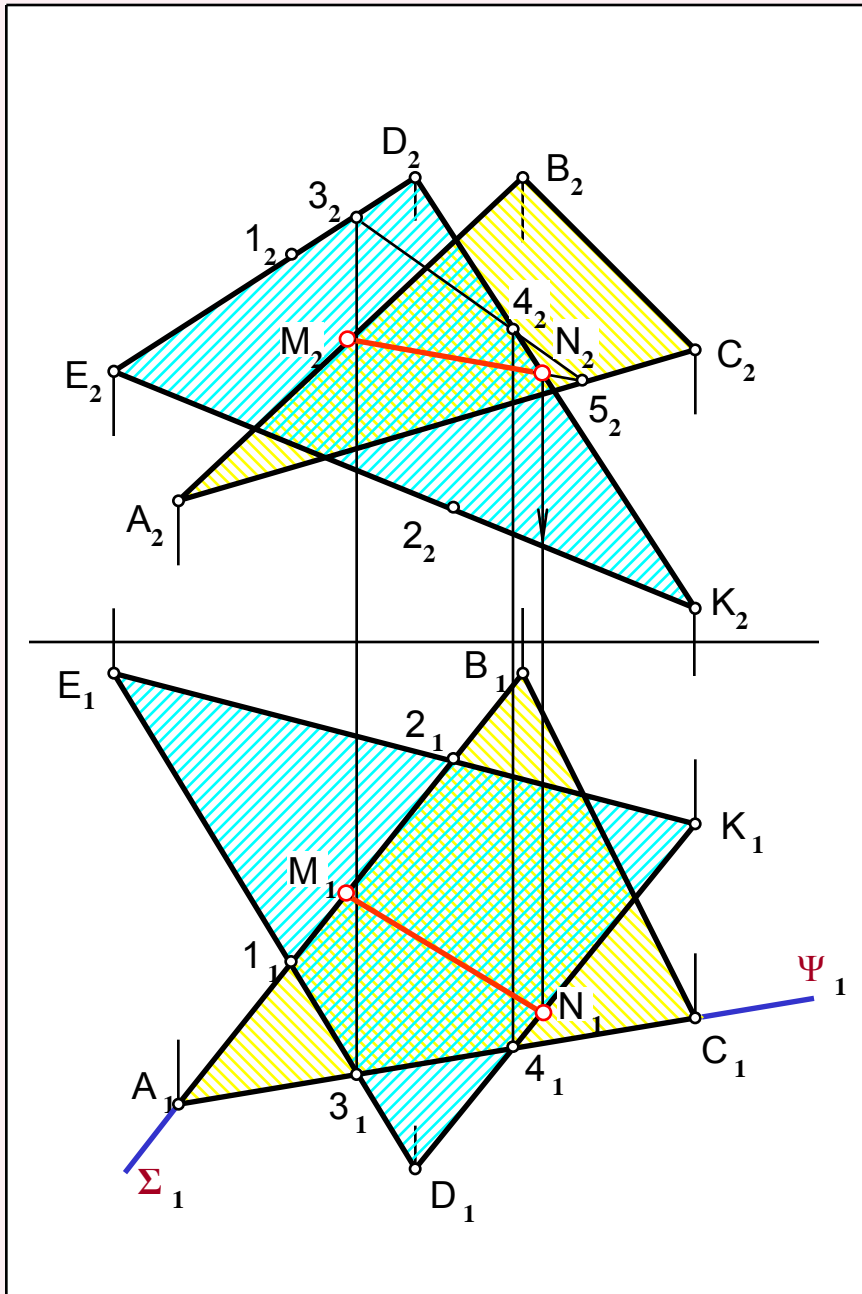
**2. Ставим точки пересечения на плоскости  $\Pi_1$  -  $1_1$  и  $2_1$  и переносим их на  $\Pi_2$  на одноименные стороны треугольника-  $1_2$  и  $2_2$ . Соединяем точки  $1_2$  и  $2_2$  тонкой линией.**

### 3-й этап решения

Находим точку **М** пересечения прямой **1 - 2** с прямой **AB**.

**3. Пересечение проекций прямых  $1_2 2_2$  и  $A_2 B_2$  обозначаем  $M_2$  и переносим её на горизонтальную проекцию прямой  $A_1 B_1$  -  $M_1$**

**Найдена одна точка **М** искомой линии пересечения.**

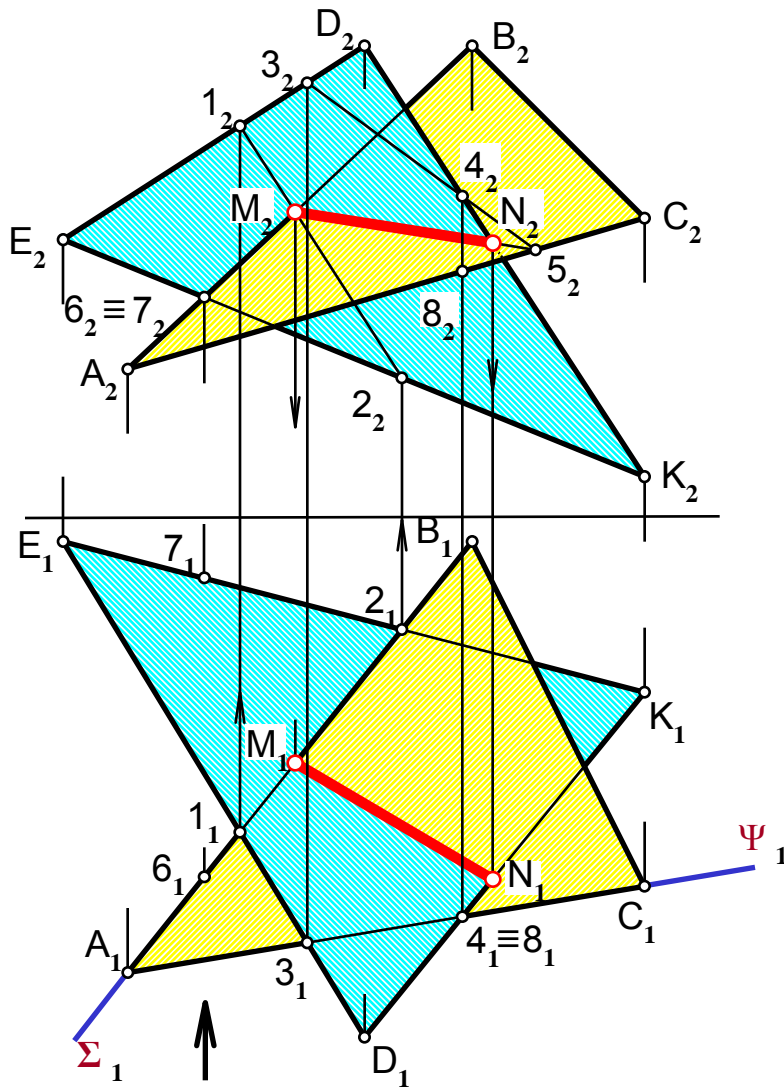


Для построения точки  $N$  использована горизонтально проецирующая плоскость  $\Psi$  ( $\Psi_1$ ), в которую заключена сторона  $AC$   $\triangle ABC$ .

Построение аналогично предыдущим.

1. Обозначаем горизонтально проецирующую плоскость  $\Psi_1$ .
  2. Ставим точки пересечения  $3_1$  и  $4_1$ .
  3. Переносим точки  $3_1$  и  $4_1$  на фронтальную проекцию на одноименные стороны треугольника -  $3_2$  и  $4_2$ .
  3. Пересечение проекций прямых  $3_2 4_2$  и  $D_2 K_2$  обозначаем  $N_2$  и переносим её на горизонтальную проекцию прямой  $D_1 K_1$  -  $N_1$ .
- Обращаем внимание, что фактически видимым стало пересечение  $\triangle ABC$  прямой  $DK$ , а не  $AC$ ! Если повторить решение заключив в проецирующую плоскость  $DK$ , то ответ будет таким же.

Направление взгляда  
для определения  
видимости на  $\Pi_1$



## Определение видимости

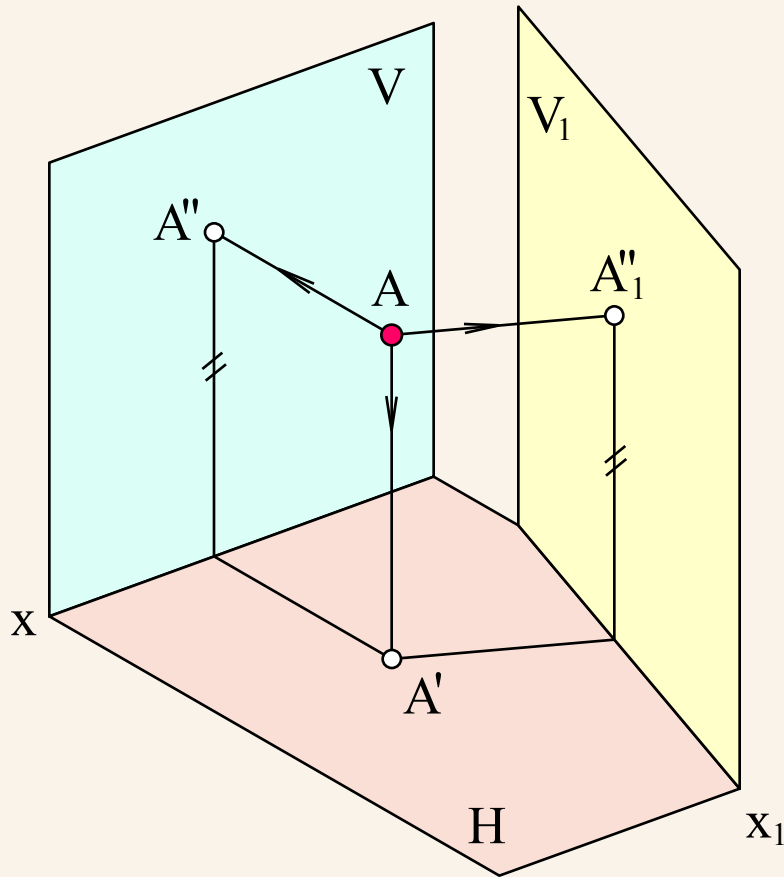
Определение видимости на плоскости  $\Pi_1$  выполнено с помощью горизонтально конкурирующих точек. Смотрим на горизонтальную проекцию скрещивающихся прямых  $AC$  и  $DK$ . На прямой  $AC$  есть точка 4, на проекции прямой  $DK$  ставим точку 8 ( $4_1 \equiv 8_1$ ).

Точка 4 расположена над точкой 8 ( $4_2$  и  $8_2$ ), поэтому на плоскости  $\Pi_1$  часть треугольника  $DEK$ , расположенная в сторону точки 4, закрывает собой часть треугольника  $ABC$ , расположенную от линии пересечения в сторону точки 8.

С помощью пары фронтально конкурирующих точек 6 и 7 ( $6_2 \equiv 7_2$ ) определена видимость на плоскости  $\Pi_2$ .

Невидимые линии проводим тонкой штриховой линией, а видимые толстой основной.

## 4.1. Способ замены плоскостей проекций

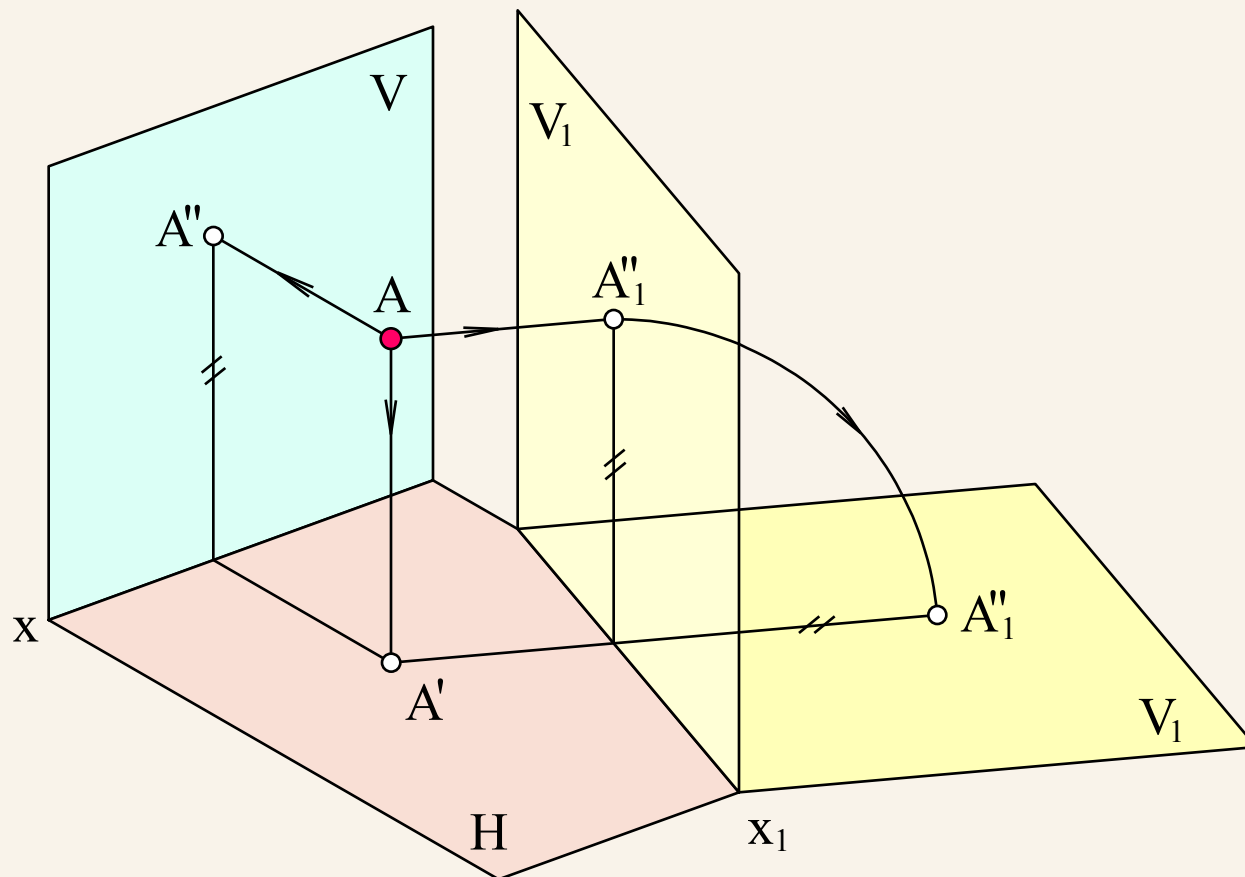


Этот способ состоит в том, что заданная фигура неподвижна, а одна из основных плоскостей  $V$  или  $H$  заменяется новой дополнительной плоскостью  $V_1$  или  $H_1$ , расположенной параллельно или перпендикулярно заданной геометрической фигуре. Точка  $A$  задана в системе  $V/H$ . Плоскость  $V$  замерена новой плоскостью  $V_1$  перпендикулярной  $H$ . Плоскость  $H$  является общей в системе  $V/H$  и  $H/V_1$ , то координата  $z_A$  остается неизменной. Следовательно, расстояние от новой фронтальной проекции до новой оси  $x_1$  равно расстоянию от заменяемой проекции до оси  $x$ .



Для получения плоского чертежа точки  $A$  плоскость  $V_1$  вращают вокруг оси  $x_1$  до совмещения с плоскостью  $H$ .

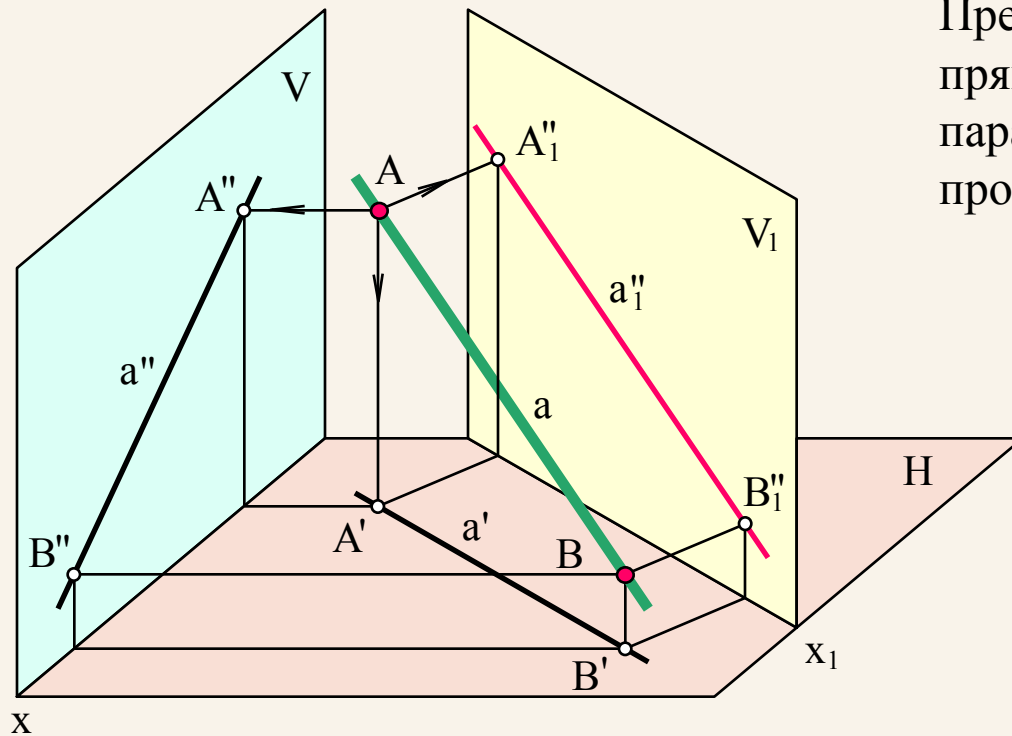
Новая фронтальная проекция  $A_1''$  точки  $A$  окажется на общем перпендикуляре к новой оси  $x_1$  с оставшейся без изменения ее проекции  $A'$ .



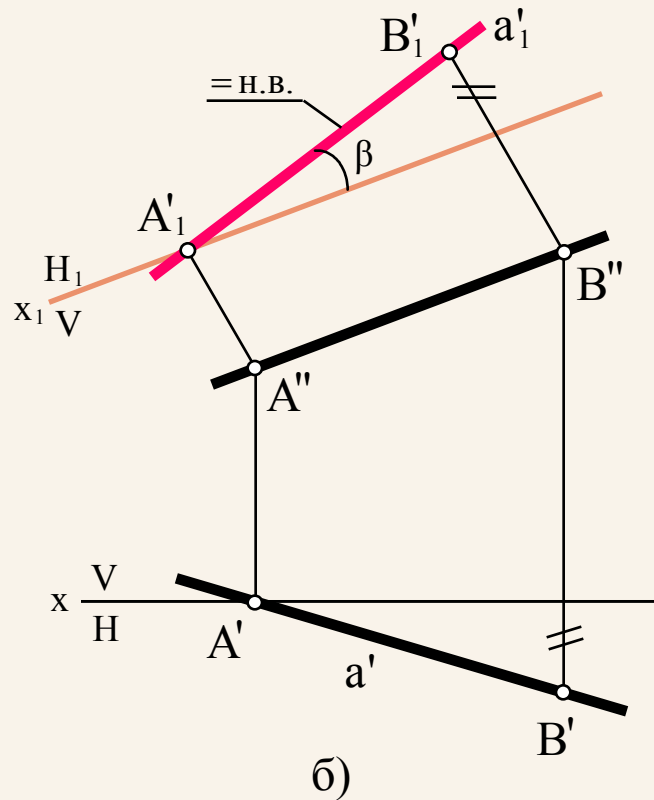
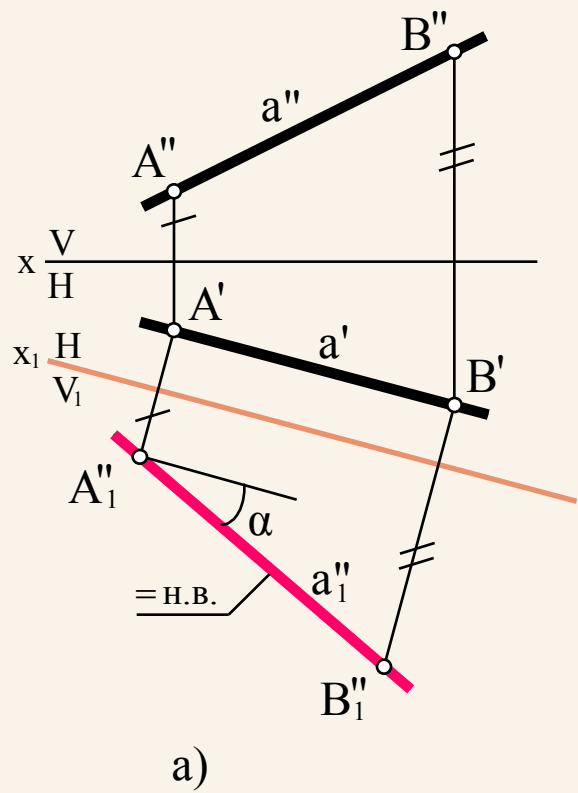
## Решение четырех основных задач способом замены плоскостей проекций

### Задача 1.

Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения оказалась параллельной одной из плоскостей проекций

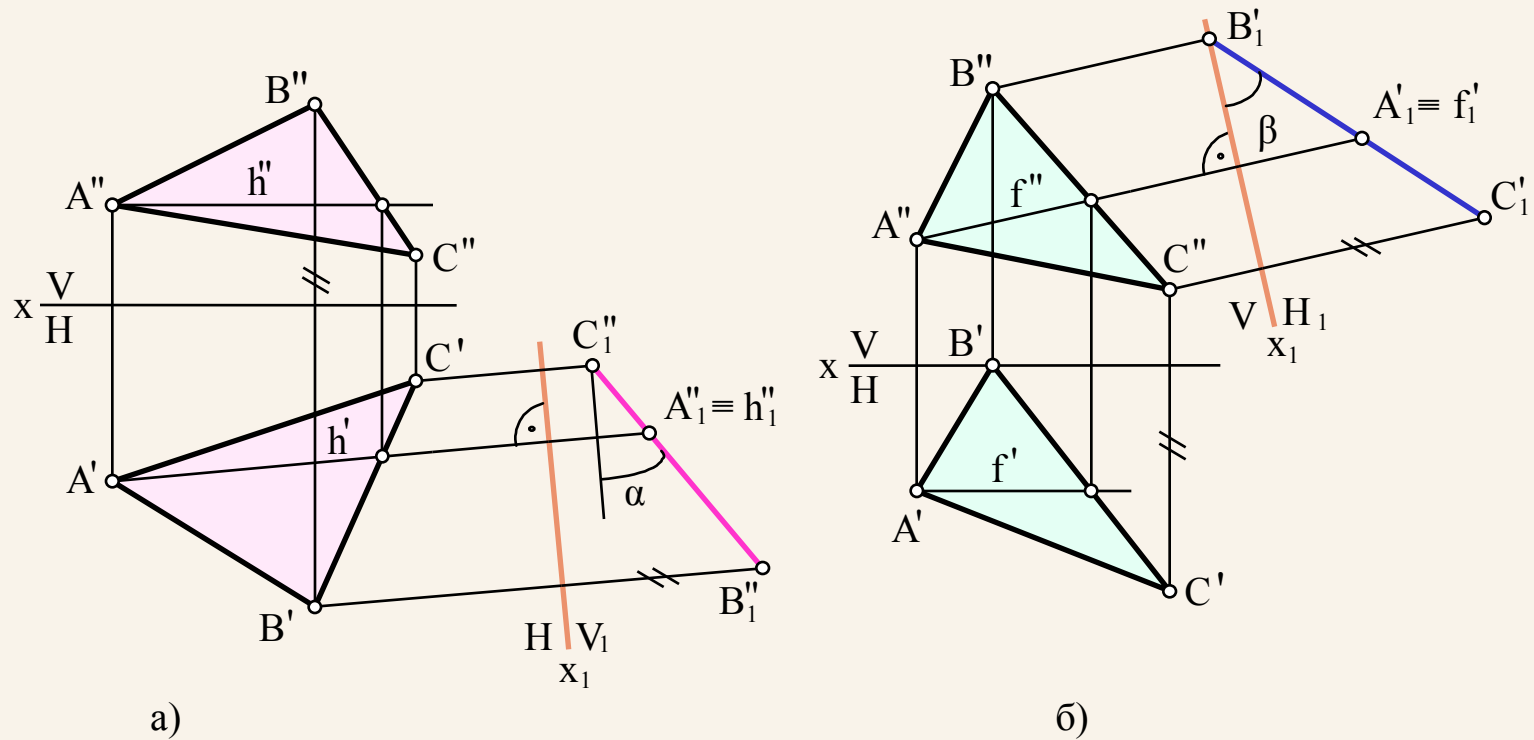


Новую проекцию прямой, отвечающую поставленной задаче, можно построить на новой плоскости проекций  $V_1$ , расположив ее параллельно самой прямой и перпендикулярно плоскости  $H$ , т.е. от системы плоскостей  $V/H$  с осью проекций  $x$  следует перейти к системе  $H/V_1$  с новой осью  $x_1$ .



На плоском чертеже новая ось  $x_1$  проведена параллельно  $a'$ , новые линии связи  $A'A_1''$  и  $B'B_1''$  проведены перпендикулярно оси  $x_1$ . Новые фронтальные проекции  $A_1''$  и  $B_1''$  точек  $A$  и  $B$  получают, измерив от оси  $x$  на поле  $V$  координаты высот  $z_A$  и  $z_B$ , отложив их от оси  $x_1$  на новое поле  $V_1$ . Новая проекция  $a_1''$  дает натуральную величину отрезка  $AB$  и угол  $\alpha$  наклона его к плоскости  $H$ . Угол наклона прямой  $a$  к плоскости  $V$  можно определить, построив изображение прямой на другой дополнительной плоскости  $H_1 \perp V$ , где  $H_1 // a$ .

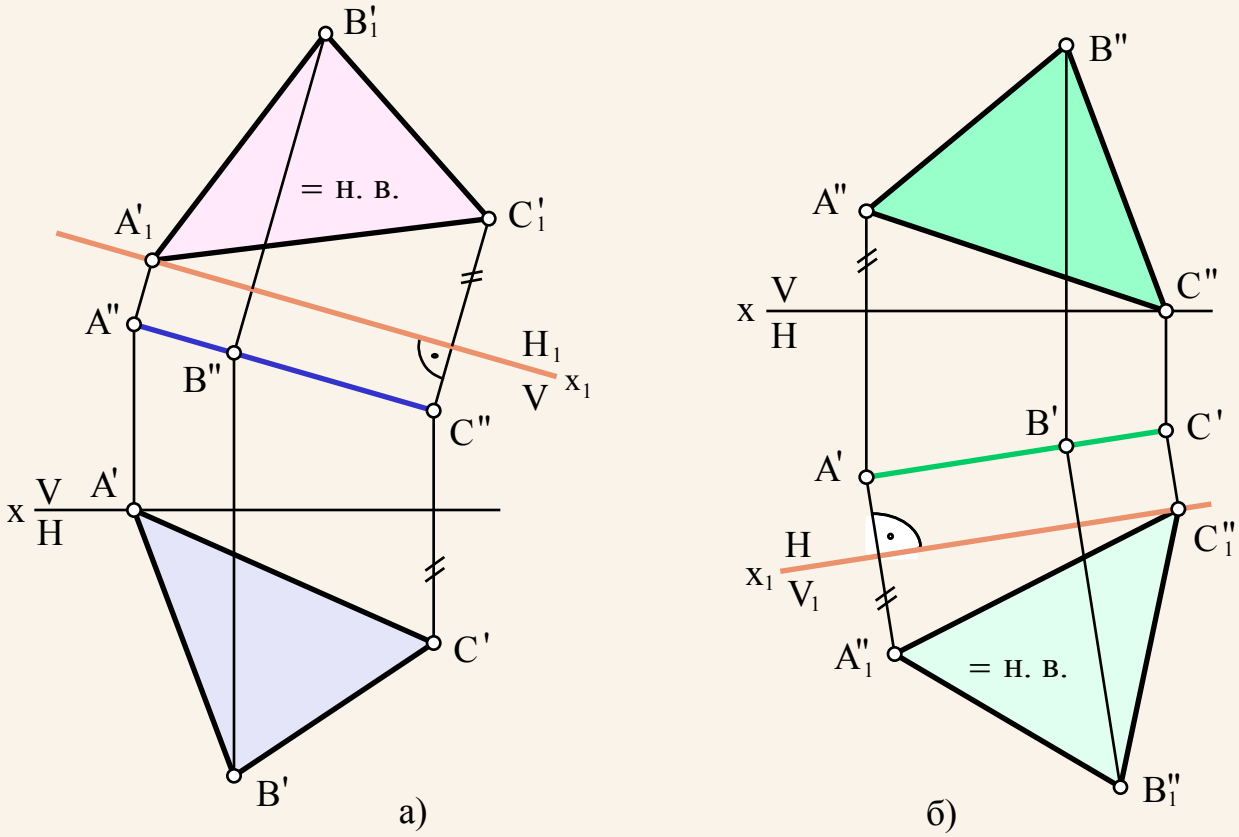
**Задача 3.** Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения в новой системе плоскостей проекций стала проецирующей.



Для этого в плоскости  $ABC$  проведена горизонталь  $h$ . Новая плоскость проекций  $V_1$  расположена перпендикулярно  $H$ . Горизонталь на поле  $V_1$  изобразится точкой, а вся плоскость прямой линией  $C_1''A_1''B_1''$  с углом  $\alpha$ , который определяет угол наклона плоскости  $ABC$  к плоскости  $H$  (рис.а).

Построив изображение плоскости в системе  $V/H_1$ , где  $H_1$  расположена перпендикулярно фронтали  $f$  (рис. б) плоскости, можно определить угол  $\beta$  наклона  $ABC$  к плоскости  $V$ .

**Задача 4.** Преобразовать чертеж так, чтобы проецирующая плоскость в новой системе плоскостей проекций заняла положение плоскости уровня.



Решение этой задачи позволяет определять натуральные величины плоских фигур и углов.

Новую плоскость проекций нужно расположить параллельно заданной плоскости. Если исходное положение плоскости было фронтально проецирующим (рис. а), то новое изображение строят в системе  $V/H_1$ , а если горизонтально проецирующем (рис. б), то в системе  $H/V_1$ .

Новая ось проекций  $x_1$  будет параллельна линейной проекции заданной плоскости.