16.7. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

При нахождении наибольшего и наименьшего значения функции нескольких переменных, непрерывной на некотором множестве, следует иметь в виду, что эти значения достигаются функцией или в точках экстремума или на границе множества.

ПРИМЕР.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}$$

на круге с радиусом, равным 1, с центром в начале координат.

Решение.

1

Найдем частные производные.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$$

2

Найдем критические точки.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y}{(1+y^2)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Одна критическая точка (0,0).

3

Найдем критические точки на границе области.

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - x^2$$

$$z = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+1-x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2-x^2} =$$

$$= \frac{2 - x^2 + 1 + x^2}{(1+x^2)(2-x^2)} = \frac{3}{2+2x^2 - x^2 - x^4} = \frac{3}{2+x^2-x^4}$$

$$z' = \frac{4x^3 - 2x}{(2 + x^2 - x^4)^2} = \frac{2x \cdot (2x^2 - 1)}{(2 + x^2 - x^4)^2} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

- критические точки на границе области.

$$\left[\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}\right. \quad \left[\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}\right. \quad \left[\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}\right. \quad \left[\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}\right.$$

4

Найдем значения функции в критических точках.

$$z(0,0)=2 \qquad z\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{3} \qquad z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{3}$$

$$z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{3} \qquad z\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{3}$$

$$z(-1,0)=\frac{3}{2} \qquad z(1,0)=\frac{3}{2}$$

$$z_{наиб} = (0,0) = 2$$

$$z_{наим} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3}$$