НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФНП

МИРЗОЯН Х.Д

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Пусть функция $z = f\,(x;y)$ определена в некоторой области D и точка $M_0(x_0,y_0) \in D$.

Точка M_0 называется точкой **максимума** функции $z = f\,(x;y)$, если для любой точки $M(x,y)$, принадлежащей δ - окрестности точки M_0 и такой, что $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$.

Точка $M0$ называется точкой **минимума** функции $z = f\,(x;y)$, если для любой точки $M(x,y)$, принадлежащей δ - окрестности точки $M0$ и такой, что $M \neq M0$ выполняется неравенство $f(M) > f(M0)$.

Следовательно, в точке максимума функция $z = f(x;y)$ принимает значение наибольшее, а в точке минимума – наименьшее по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках. Максимум и минимум функции называются ее **экстремумами** и обозначают $\max f(x,y)$ и $\min f(x,y)$.

ТЕОРЕМА(НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА).

Если дифференцируемая функция $z = f(x;y)$ имеет в точке M0(x0;y0) экстремум, то обе первые частные производные в этой точке равны нулю.

Доказательство.

Пусть в точке $M_0(x_0;y_0)$ функция $z = f(x;y)$ имеет экстремум.

Положим $y = y_0$ и рассмотрим функцию одного переменного x:

$$f(x,y_0) = \varphi(x).$$

Очевидно, что точка $x = x_0$ является точкой экстремума для функции φ(x) и поэтому производная от нее в точке x_0 (если производная существует) должна обращаться в нуль: $\varphi'(x_0) = f'_x(x_0,y_0)=0$.

Аналогично, положив $x=x_0$, и рассматривая функцию одного переменного y: $f(x_0,y) = \psi(y)$, получим, что в точке экстремума $\psi'(y_0) = f'_y(x_0,y_0)=0$ (согласно необходимому условию функции одной переменной).

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Точки, в которых выполняются необходимые условия экстремума называются **критическими** или **стационарными**.

В критических точках (также как и для функции одной переменной) функция двух переменных $z = f(x;y)$ может иметь экстремум, а может и не иметь.

Для нахождения экстремума функции необходимо каждую критическую точку дополнительно исследовать с помощью достаточного признака.

ТЕОРЕМА (ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА)

- Пусть в стационарной точке $M_0(x_0;y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков и обозначим

$A = f''_{xx}(x_0,y_0)$; $B = f''_{xy}(x_0,y_0)$; $C = f''_{yy}(x_0,y_0)$; $\Delta = AC - B^2$.

Тогда в точке M_0 функция $z = f(x,y)$:

- имеет минимум, если $\Delta > 0$ и $A > 0$;
- имеет максимум, если $\Delta > 0$ и $A < 0$;
- не имеет экстремума, если $\Delta < 0$.
- вопрос о наличии экстремума остается открытым, если $\Delta = 0$. Необходимы дополнительные исследования;

Без доказательства.

Пример.

Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-3xy$.

Решение

1) Находим стационарные точки, т.е точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума. Для этого вычисляем частные производные, приравниваем их к нулю и решаем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2-3y, \\ z'_y = 3y^2-3x. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-y=0, \\ y^2-x=0. \end{cases}$$

Решением будут две точки $M_0(0;0)$ и $M1(1;1)$.

1) Применим достаточный признак, чтобы выяснить вопрос о наличии и характере экстремума.

$z''_{xx}=6x$; $z''_{xy}=-3$; $z''_{yy}=6y$. Подставим сюда координаты стационарных точек, получим:

для точки M_0: $A=0$, $B=-3$, $C=0$, $\Delta_{M0}=AC-B2=-9<0$, нет экстремума в точке $M_0(0;0)$;

для точки M_1: $A=6$, $B=-3$, $C=6$, $\Delta_{M1}=AC-B2=27>0$ и $A=6>0$, в точке $M_1(1;1)$ данная функция имеет минимум.

$z_{min}=z(M_1)=1+1-3=-1$.

Точка M называется **внутренней** точкой множества G, если существует δ - окрестность точки M, целиком принадлежащая множеству G.

Точка M_0 называется **граничной точкой** множества G, если в любой δ - окрестности точки M_0 содержатся точки, как принадлежащие множеству G, так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества G называется его **границей** Г.

Множество G называется **открытой областью** или областью, если все его точки – внутренние и любые две точки множества G (точки M и N рис.4) можно соединить непрерывной кривой, также лежащей внутри G.

Открытая область с присоединенной границей Г называется **замкнутой областью**.

Пример.

Внутренность круга $x^2+y^2<1$ – есть область; окружность $x^2+y^2=1$ – ее граница; круг с присоединенной границей $x^2+y^2\leq 1$ – замкнутая область.

Область называется **ограниченной**, если она целиком содержится внутри круга (или шара) достаточно большого радиуса.

Функция $z = f(x;y) = f(M)$ называется **непрерывной** в открытой или замкнутой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Если функция $z = f(M)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области:

- имеет наибольшее и наименьшее значения;
- ограничена: $|f(M)| \le K$ (K - положительное число);
- принимает в этой области все значения, заключенные между наименьшими и
- наибольшими ее значениями.