

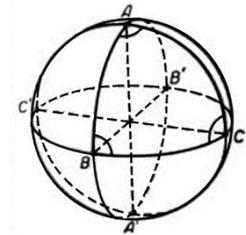


Системы координат на плоскости и в пространстве.

Векторы.

Действия с векторами.

Решение задач с помощью векторов.



Пожелание

Команда «Интеграл»

Системы координат на плоскости и в пространстве

- Что такое система координат?
- Рене Декарт
- Задание прямоугольной системы координат
- Вопросы
- Повторение
- Решение задач

● [Вернуться на главную страницу](#)

Системы координат на плоскости и в пространстве

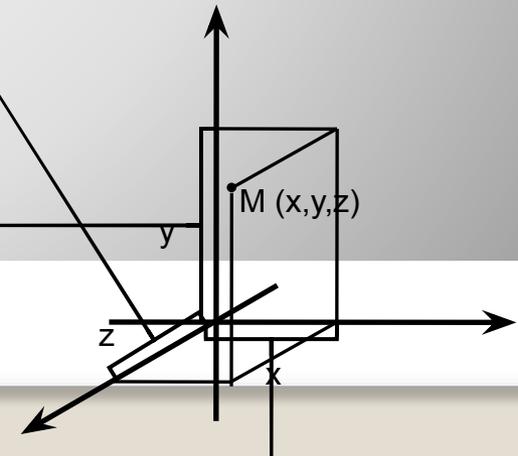
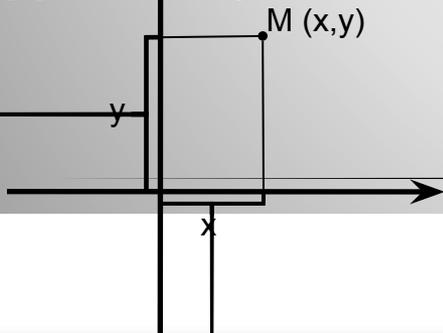
Декартовы прямоугольные координаты

O - начало координат, Ox - ось абсцисс, Oy - ось ординат, \vec{e}_1, \vec{e}_2 - базисные векторы, x - абсцисса точки M (x - проекция точки M на ось Ox параллельно оси Oy), y - ордината точки M (y - проекция точки M на ось Oy параллельно оси Ox).

Расположение точки M на плоскости определяется **декартовыми координатами** с помощью пары чисел :

- расстояние от точки M до оси y с учетом знака
- расстояние от точки M до оси x с учетом знака

Декартовы координаты в пространстве задаются с помощью точки начала координат и трёх взаимно-перпендикулярных направленных прямых. Прямые занумерованы, задан единичный отрезок. Положение любой точки в пространстве однозначно определено тремя числами: первое число – величина проекции точки на первую ось, второе – величина проекции на вторую ось, третье – на третью.



<< << К разделу << К
разделу Далее << К
разделу Далее >>

Рене Декарт

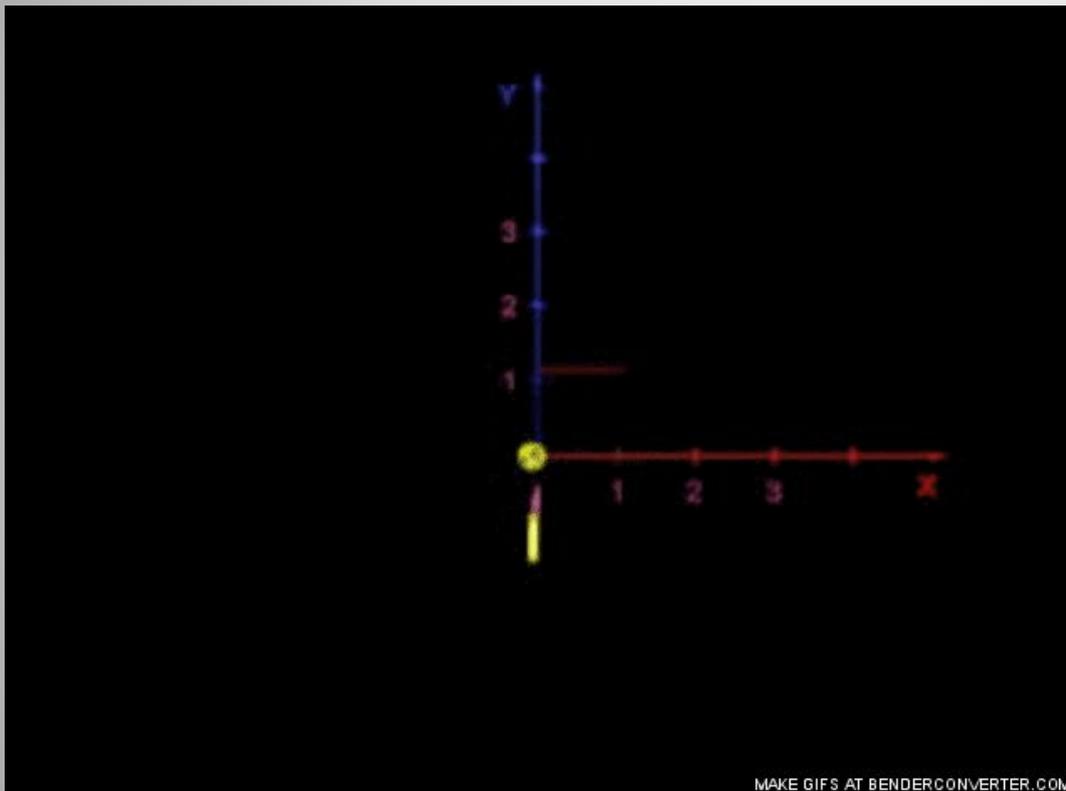


ДЕКАРТ (Descartes), Рене

31 марта 1596 г. – 11 февраля 1650 г.

Французский философ, физик, математик и физиолог Рене Декарт (латинизированное имя – Картезий; Cartesius) родился в Лаэ близ Тура в знатной, но небогатой семье. Образование получил в иезуитской школе Ла Флеш в Анжу (окончил в 1614 г.) и в университете в Пуатье (1616). У Декарта действительное число трактовалось как отношение любого отрезка к единичному, хотя сформулировал такое определение лишь И. Ньютон; отрицательные числа получили у Декарта реальное истолкование в виде направленных ординат. Декарт значительно улучшил систему обозначений, введя общепринятые знаки для переменных величин (x, y, z, \dots) и коэффициентов (a, b, c, \dots), а также обозначения степеней (x^4, a^5, \dots). Запись формул у Декарта почти ничем не отличается от современной.

Задание прямоугольной системы координат в пространстве:



Ox – ось абсцисс

Oy – ось ординат

Oz – ось аппликат

$M (1; 1; 1)$

$$Oy \perp Oz$$

$$Oz \perp Ox$$

$$Oy \perp Ox$$

Вопросы:

1. Сколькими координатами может быть задана точка на прямой?

Одной.

2. Сколькими координатами может быть задана точка в координатной плоскости?

Двумя.

3. Сколькими координатами может быть задана точка в пространстве?

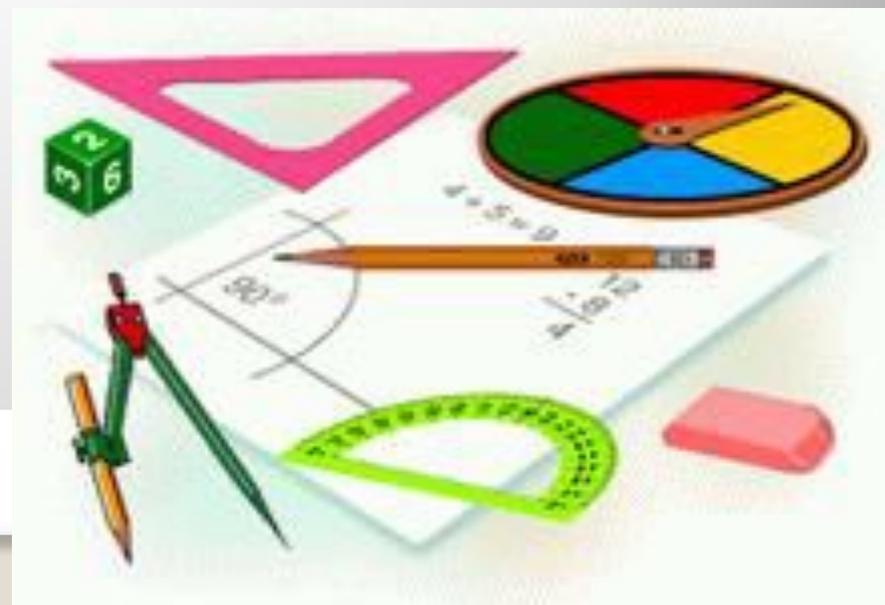
Тремя.

Выполнение задания с последующей проверкой.

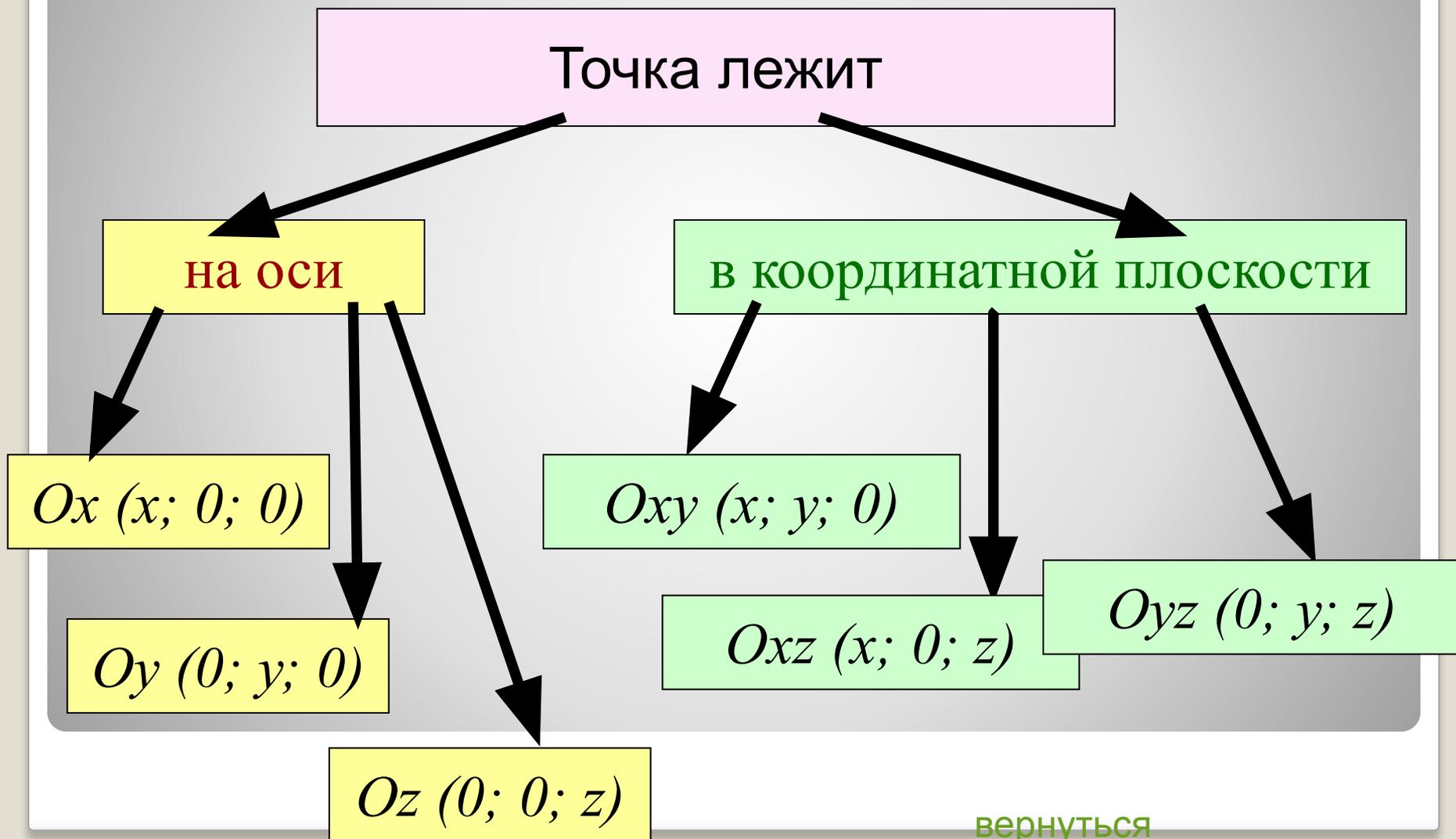
Начертить прямоугольную трехмерную систему координат и отметить в ней точки:

$A (1; 4; 3)$; $B (0; 5; -3)$; $C (0; 0; 3)$ и $D (4; 0; 4)$

подсказка



Нахождение координат точек.



Повторение.

Даны точки:

A (2; -1; 0)

B (0; 0; -7)

C (2; 0; 0)

D (-4; -1; 0)

E (0; -3; 0)

F (1; 2; 3)

P (0; 5; -7)

K (2; 0; -4)

*Назовите точки, лежащие
в плоскости Oyz .*

*Назовите точки, лежащие
в плоскости Oxz .*

B (0; 0; -7)

*Назовите точки, лежащие
в плоскости Oxy .*

C (2; 0; 0)

E (0; -3; 0)

Решение задач.

Даны координаты четырех вершин куба

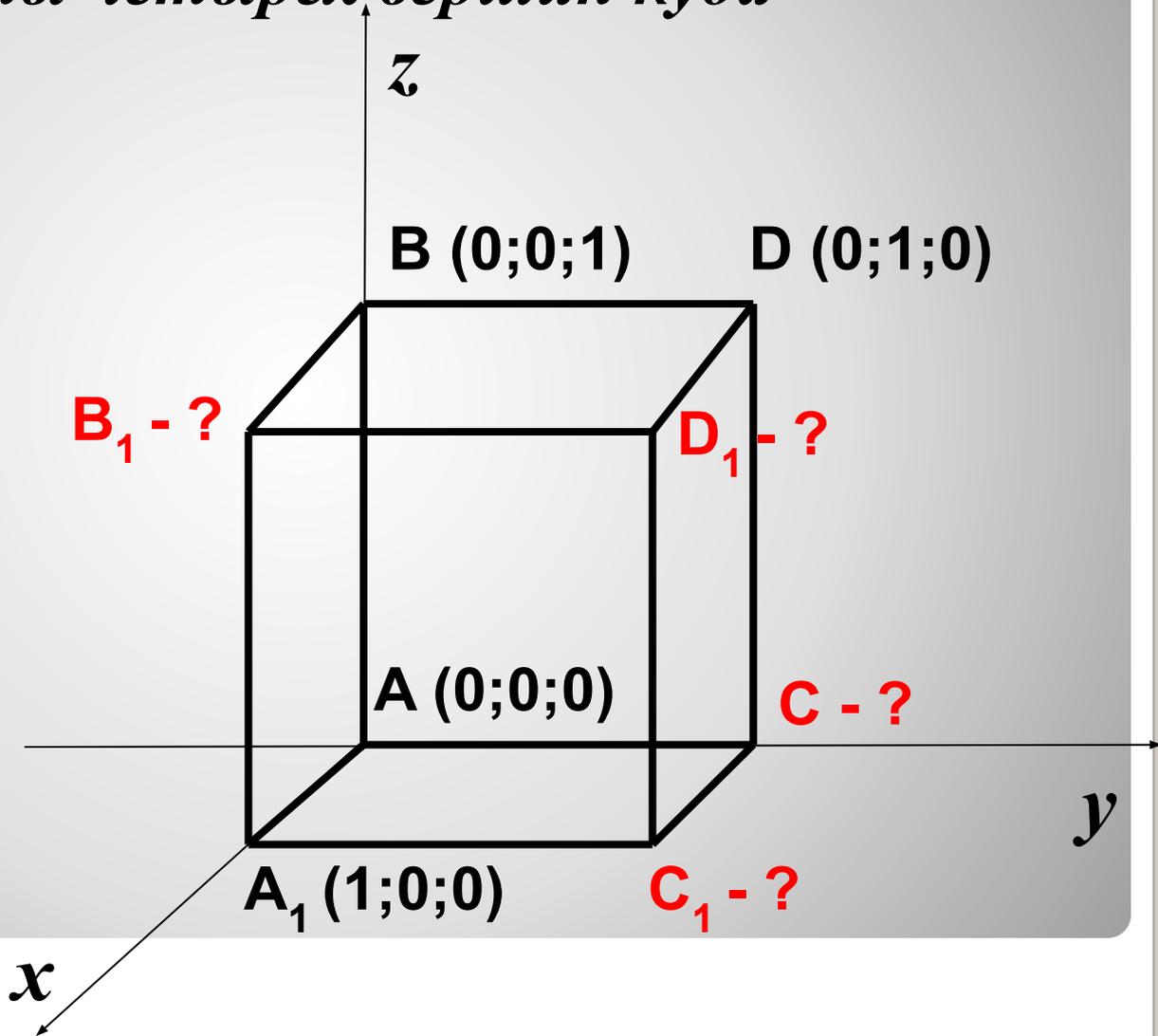
$$B_1 (1; 0; 1)$$

$$C (0; 1; 0)$$

$$C_1 (1; 1; 0)$$

$$D_1 (1; 1; 1)$$

Найдите
координаты
остальных
вершин.



[На главную](#)

Векторы

Понятие вектора

Коллинеарные векторы

Равенство векторов

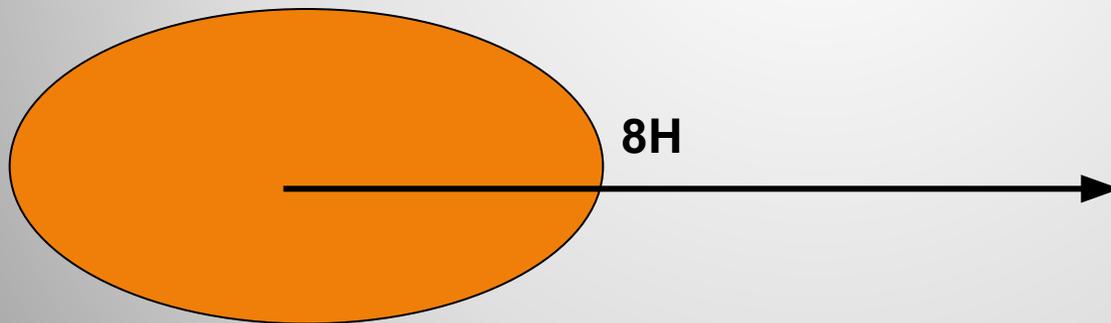
Противоположные векторы

Действия с векторами

>>>> Вернуться на главную

Понятие вектора

- Пусть на тело действует сила в 8Н. Стрелка указывает направление силы, а длина отрезка соответствует числовому значению силы.



Понятие вектора

- Рассмотрим произвольный отрезок. На нем можно указать два направления.

Чтобы выбрать одно из направлений, один конец отрезка назовем **НАЧАЛОМ**, а другой – **КОНЦОМ** и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.



- **Определение.**

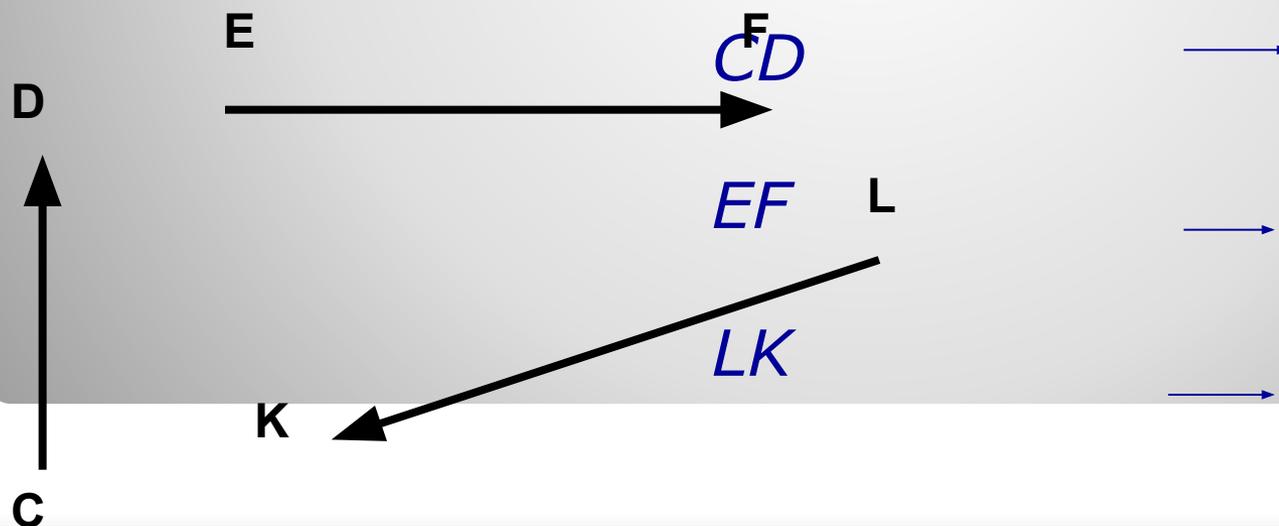
Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**.

Понятие вектора

- На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой

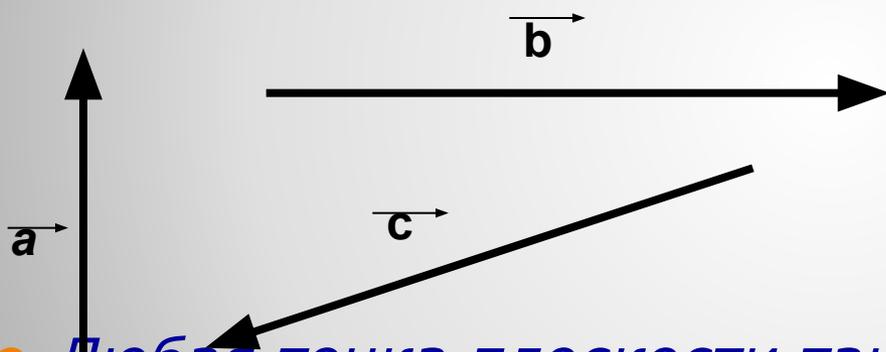


Вектор \overrightarrow{AB} , A – начало вектора, B – конец.



Понятие вектора

- Векторы часто обозначают и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней:



- Любая точка плоскости также является вектором, который называется **НУЛЕВЫМ**. Начало нулевого вектора совпадает с его концом:

$$\overline{MM} = \mathbf{0}.$$

М

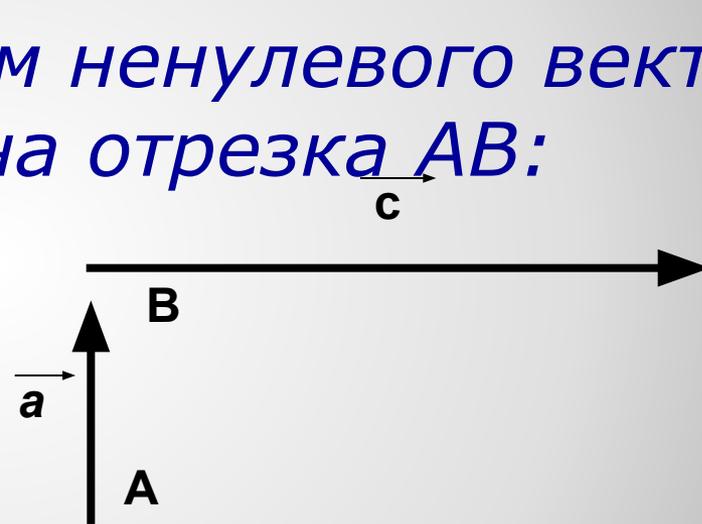


Понятие вектора

- Длиной или модулем ненулевого вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB :

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = AB = 5$$

$$|\vec{c}| = 17$$



- Длина нулевого вектора считается равной нулю:

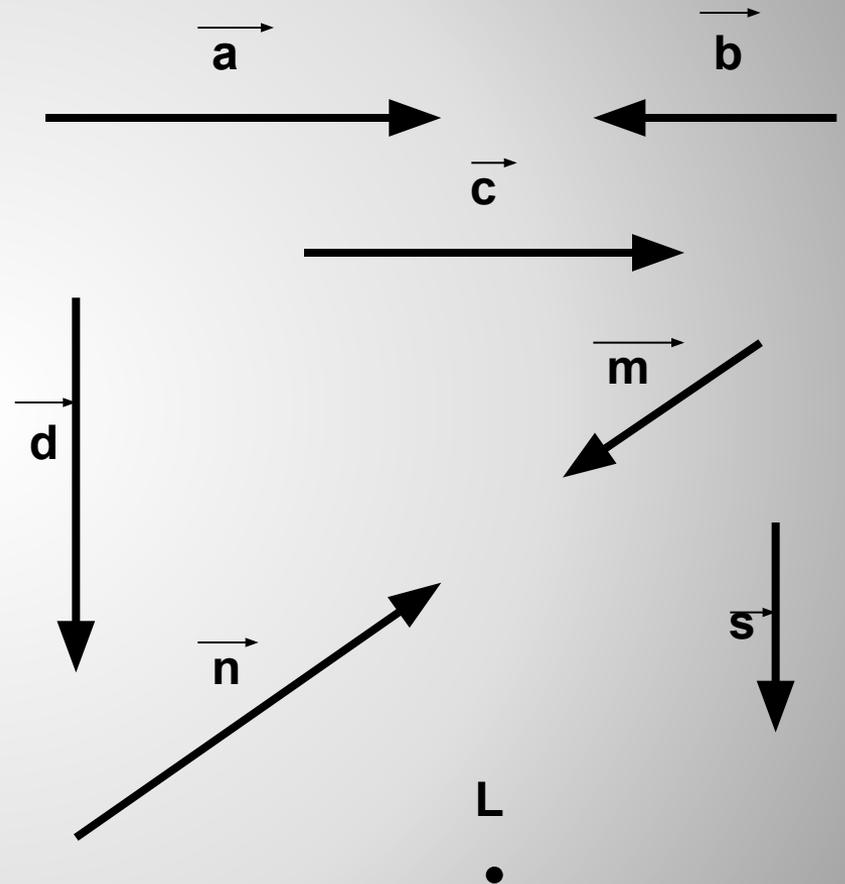
$$|\overrightarrow{MM}| = 0.$$

M



Коллинеарные векторы

- Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Коллинеарные векторы могут быть **сонаправленными** или **противоположно направленными**.
- Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

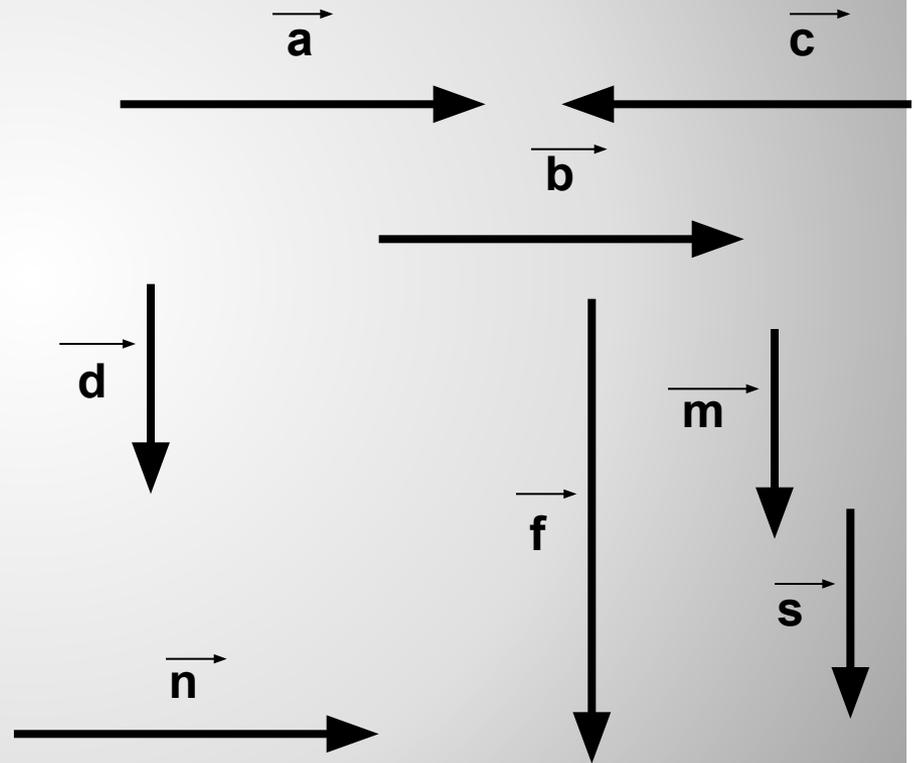


Равенство векторов

- Определение.
Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ если}$$

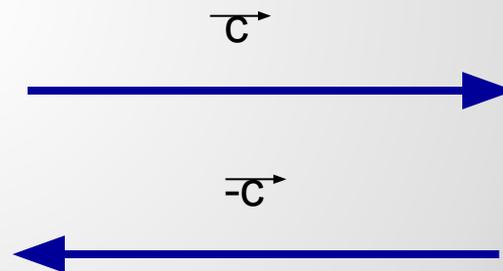
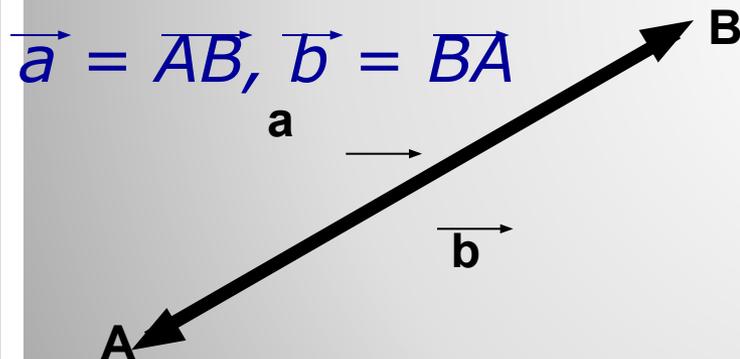
- 1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- 2) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$



Противоположные векторы

Пусть \vec{a} – произвольный ненулевой вектор.

Определение. Вектор \vec{b} называется противоположным вектору \vec{a} , если \vec{a} и \vec{b} имеют равные длины и противоположно направлены.

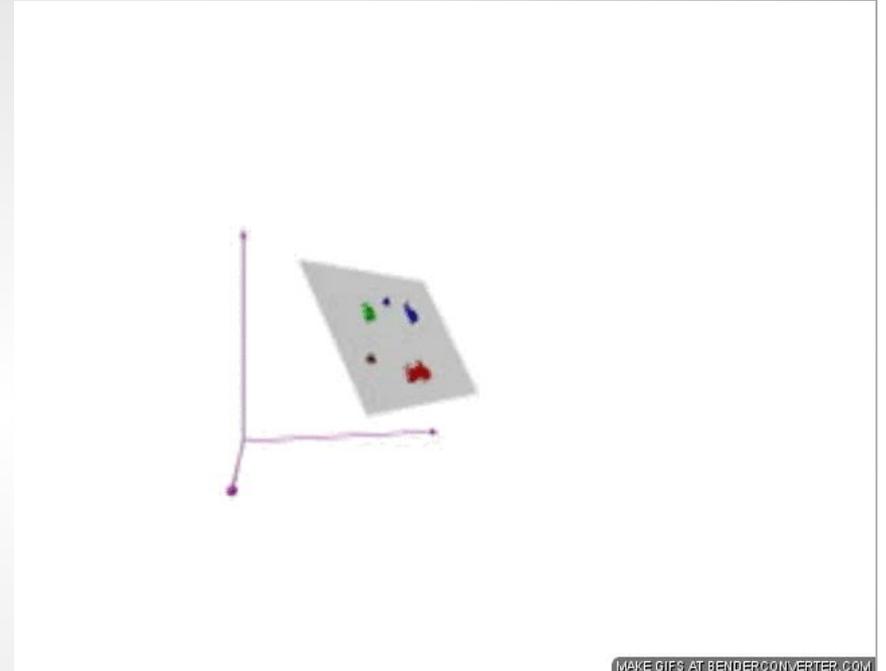


Вектор, противоположный вектору \vec{c} , обозначается так: \overleftarrow{c} .

Очевидно, $\vec{c} + \overleftarrow{c} = \vec{0}$ или $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

Действия с векторами

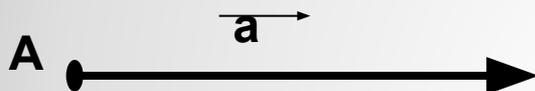
- Откладывание вектора от данной точки
- Сумма двух векторов
- Законы сложения
- Сумма нескольких векторов
- Вычитание векторов
- Умножение вектора на число
- Способы задания вектора
- Правила действия над векторами с заданными координатами
- Скалярное произведение



>>> Вернуться на главную страницу

Откладывание вектора от данной точки

- Если точка **A** – начало вектора \vec{a} , то говорят, что вектор \vec{a} отложен от точки **A**.



- **Утверждение:** От любой точки **M** можно отложить вектор, равный данному вектору \vec{a} , и притом только один.



Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одной и той же буквой

Сумма двух векторов

- Рассмотрим пример:

*Петя из дома (**D**) зашел к Васе (**B**), а потом поехал в кинотеатр (**K**).*



В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами \overrightarrow{DB} и \overrightarrow{BK} , Петя переместился из точки D в K, т.е. на вектор \overrightarrow{DK} :

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BK}.$$

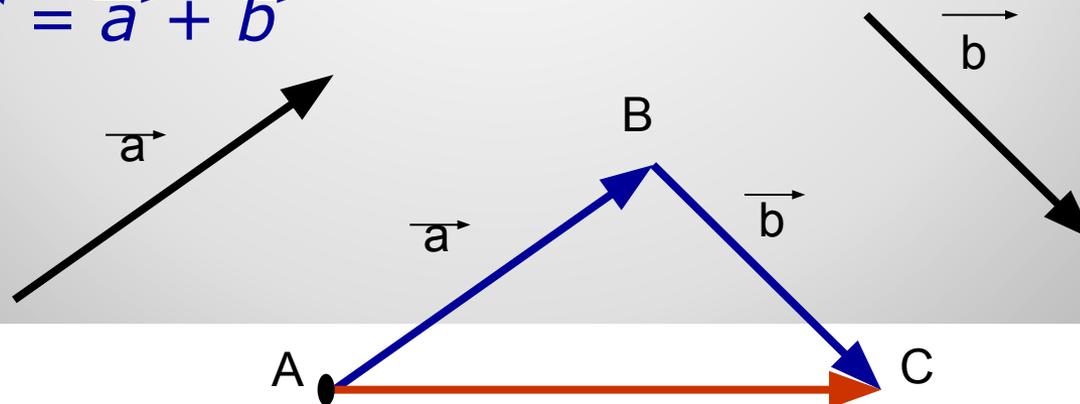
Вектор \overrightarrow{DK} называется суммой векторов \overrightarrow{DB} и \overrightarrow{BK} .

Сумма двух векторов

Правило треугольника

Пусть \vec{a} и \vec{b} – два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$



Законы сложения векторов

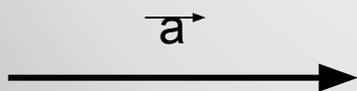
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон)

Правило параллелограмма

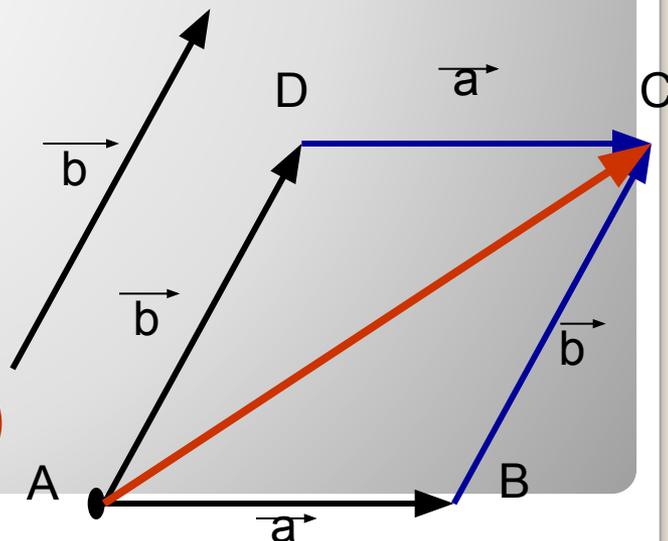
Пусть \vec{a} и \vec{b} – два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки $\vec{AB} = \vec{a}$, затем вектор $\vec{AD} = \vec{b}$. На этих векторах построим параллелограмм $ABCD$.

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{b} + \vec{a}$$



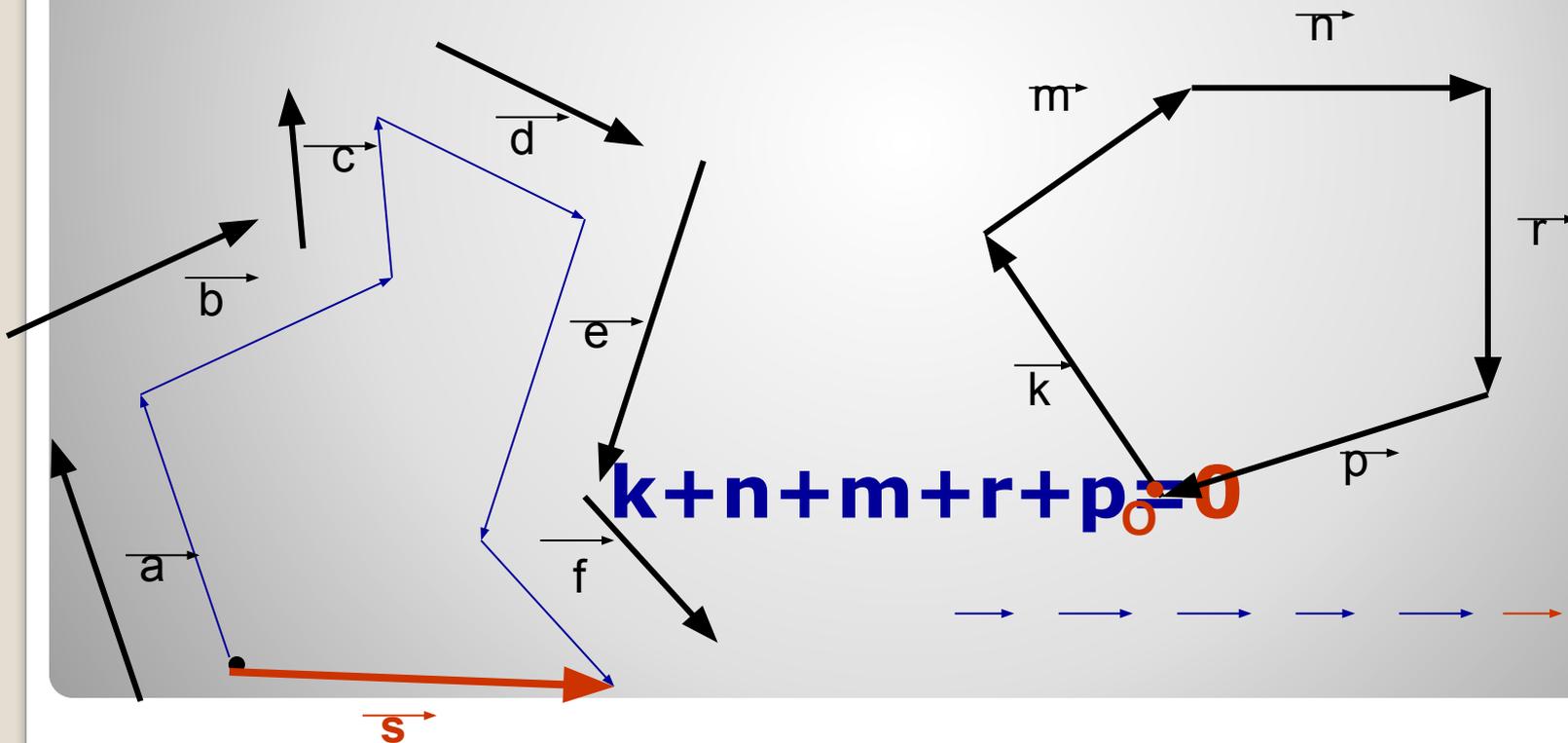
2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
(сочетательный закон)



Сумма нескольких векторов

Правило многоугольника

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}$$



Вычитание векторов

Определение. Разностью двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор, сумма которого с вектором \vec{b} равна вектору \vec{a} .

Теорема. Для любых векторов \vec{a} и \vec{b} справедливо равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Задача. Даны векторы \vec{a} и \vec{b} . Построить вектор $\vec{a} - \vec{b}$.



Умножение вектора на число

Определение. Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число k называется такой вектор \vec{b} , длина которого равна вектору $k|\vec{a}|$, причем векторы $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.



Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Для любого числа k и любого вектора \vec{a} векторы \vec{a} и $k\vec{a}$ коллинеарны.

Умножение вектора на число

Для любых чисел k, n и любых векторов \vec{a}, \vec{b} справедливы равенства:

1) $(kn) \vec{a} = k (n\vec{a})$ (сочетательный закон)

2) $(k+n) \vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a}$ (первый распределительный закон)

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон)

Свойства действий над векторами позволяют в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, выполнять преобразования по тем же правилам, что и в числовых выражениях. Например,

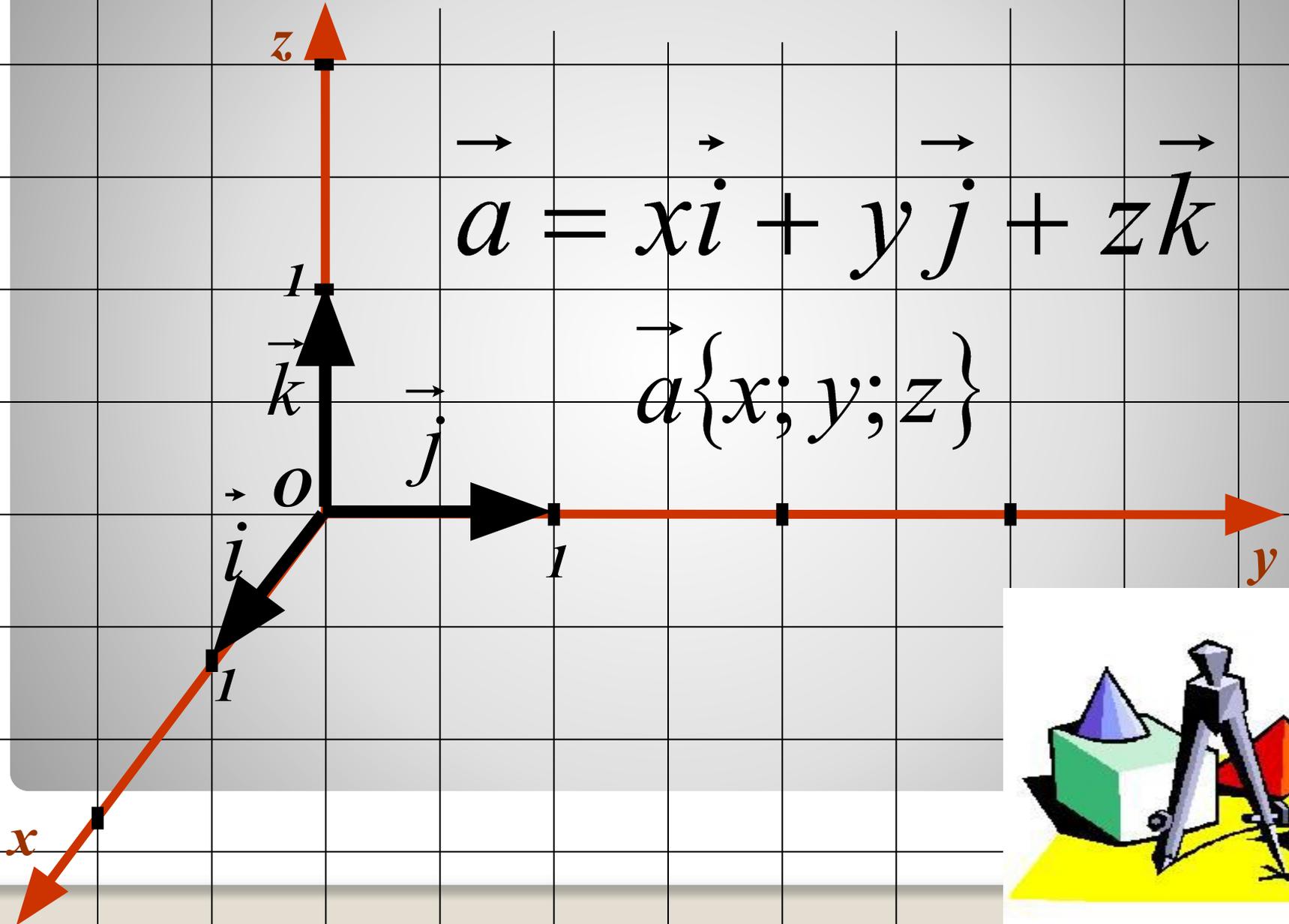
$$\begin{aligned} \vec{p} &= 2(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) - 3(\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}) = \\ &= 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c} - 3\vec{a} = -5\vec{b} + 4\vec{c} \end{aligned}$$

Способы задания вектора

[<<<< Вернуться](#)

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a}\{x; y; z\}$$



Правила действий над векторами с заданными координатами.

1. Равные векторы имеют равные координаты.

Пусть $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} = \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, тогда

$$\vec{a}\{x_1 \vec{i}; y_1 \vec{j}; z_1 \vec{k}\} = \vec{b}\{x_2 \vec{i}; y_2 \vec{j}; z_2 \vec{k}\} \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} - (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= (x_1 - x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 - y_2) \cdot \vec{j} + (z_1 - z_2) \cdot \vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = \vec{0} \end{aligned}$$

Следовательно

$$x_1 = x_2; \quad y_1 = y_2; \quad z_1 = z_2$$

Правила действий над векторами с заданными координатами.

2. Каждая координата суммы двух (и более) векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

$$\text{Дано: } \begin{matrix} \vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \\ \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \end{matrix} \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\text{Доказать: } \vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$$
$$\vec{a}\{x_1 \vec{i}; y_1 \vec{j}; z_1 \vec{k}\} \quad \vec{b}\{x_2 \vec{i}; y_2 \vec{j}; z_2 \vec{k}\}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} + (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= (x_1 + x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 + y_2) \cdot \vec{j} + (z_1 + z_2) \cdot \vec{k} = \vec{c} \end{aligned}$$

Следовательно

$$\vec{c}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$$

Правила действий над векторами с заданными координатами.

3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты на это число.

Дано: $\vec{a}\{x; y; z\}$ α – произв. число $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{c}$

Доказать: $\vec{c}\{\alpha \cdot x; \alpha \cdot y; \alpha \cdot z\}$

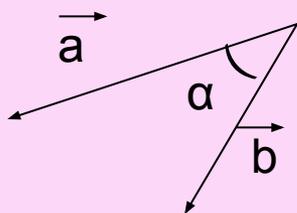
4. Каждая координата разности двух векторов равна число равна разности соответствующих координат на этих векторов.

Дано: $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

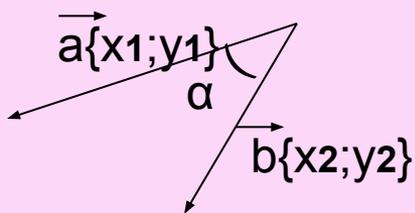
Доказать: $\vec{c}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$

Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

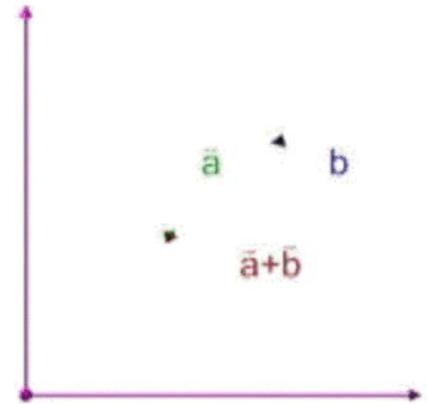


Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Решение задач

Задача 1
Задача 2
Задача 3
Задача 4



MAKE GIFS AT BENDERCONVERTER.COM

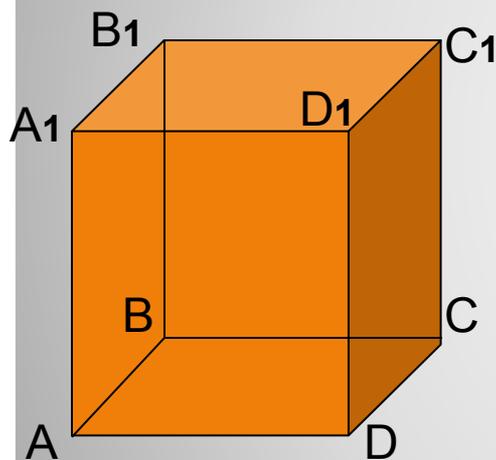
[Повторить материал](#)

[Вернуться на главную](#)

Задача 1

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - параллелепипед.

Упростите выражение: $\vec{C_1 D} - \vec{D A} + \vec{C D} + \vec{D_1 A_1} + \vec{A B_1} + \vec{C C_1}$



Решение:

Воспользуемся свойствами сложения векторов

$$\vec{C C_1} + \vec{C_1 D} = \vec{C D},$$

$$\vec{D_1 A_1} - \vec{D A} = 0,$$

$$\text{Получаем: } \vec{C D} + \vec{C D} + \vec{A B_1},$$

$$\vec{C D} = \vec{B A}, \vec{B A} + \vec{A B_1} = \vec{B B_1}, \vec{C D} + \vec{B B_1} = \vec{B A_1}$$

[К списку задач](#)

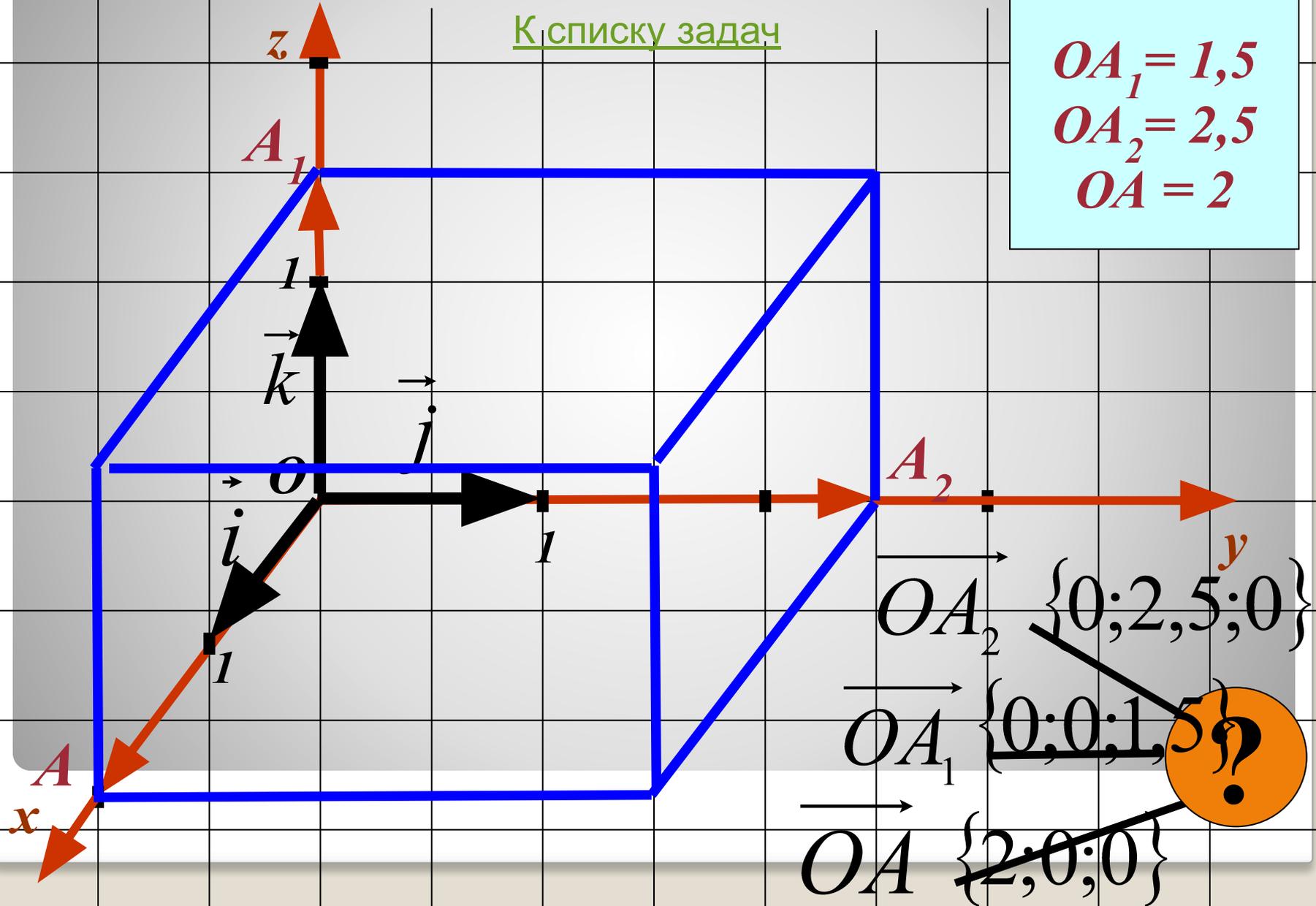
№2 Определите координаты векторов:

К списку задач

$$OA_1 = 1,5$$

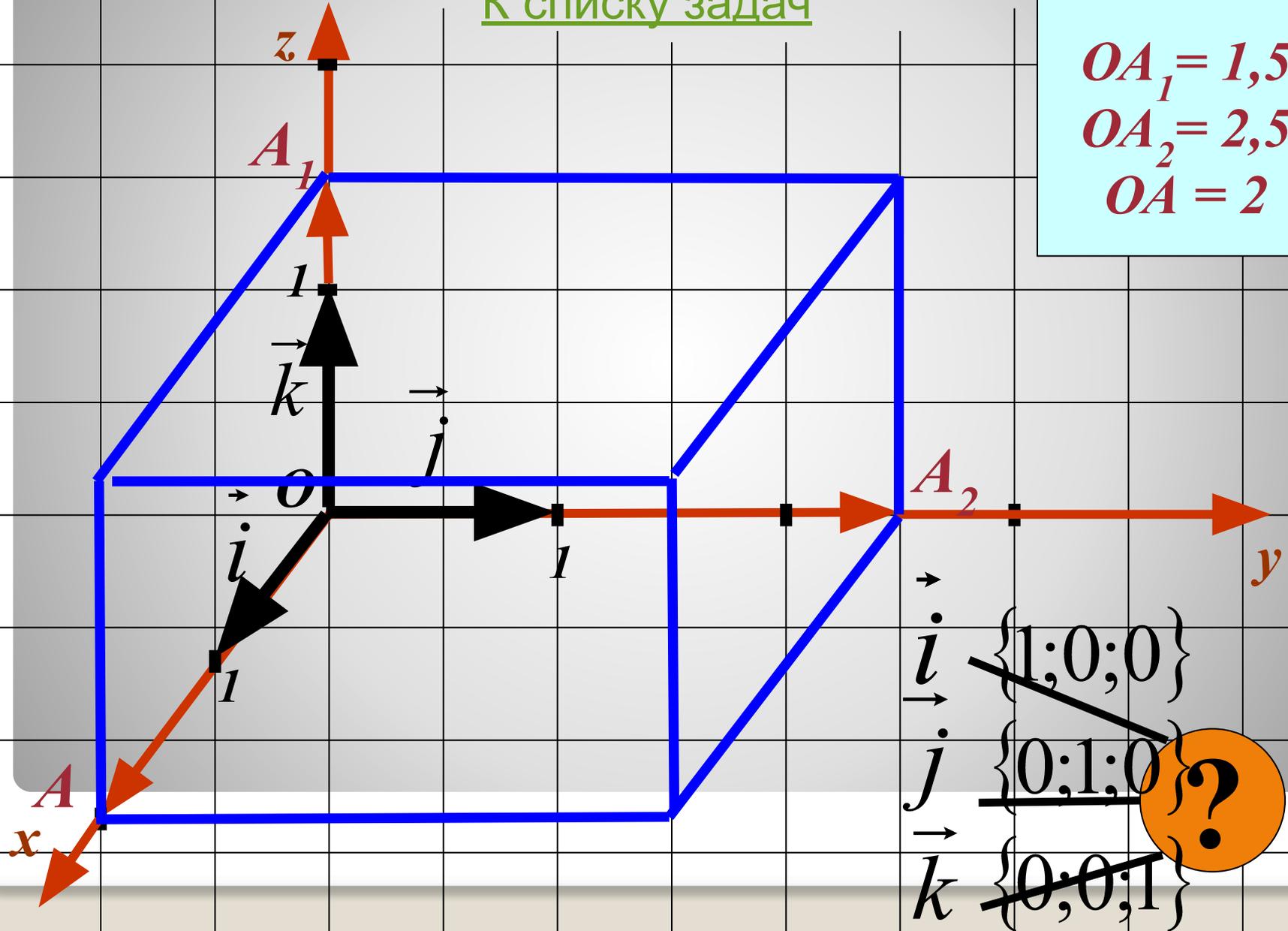
$$OA_2 = 2,5$$

$$OA = 2$$



№3 Определение координат векторов:

К списку задач



$$\begin{aligned} OA_1 &= 1,5 \\ OA_2 &= 2,5 \\ OA &= 2 \end{aligned}$$

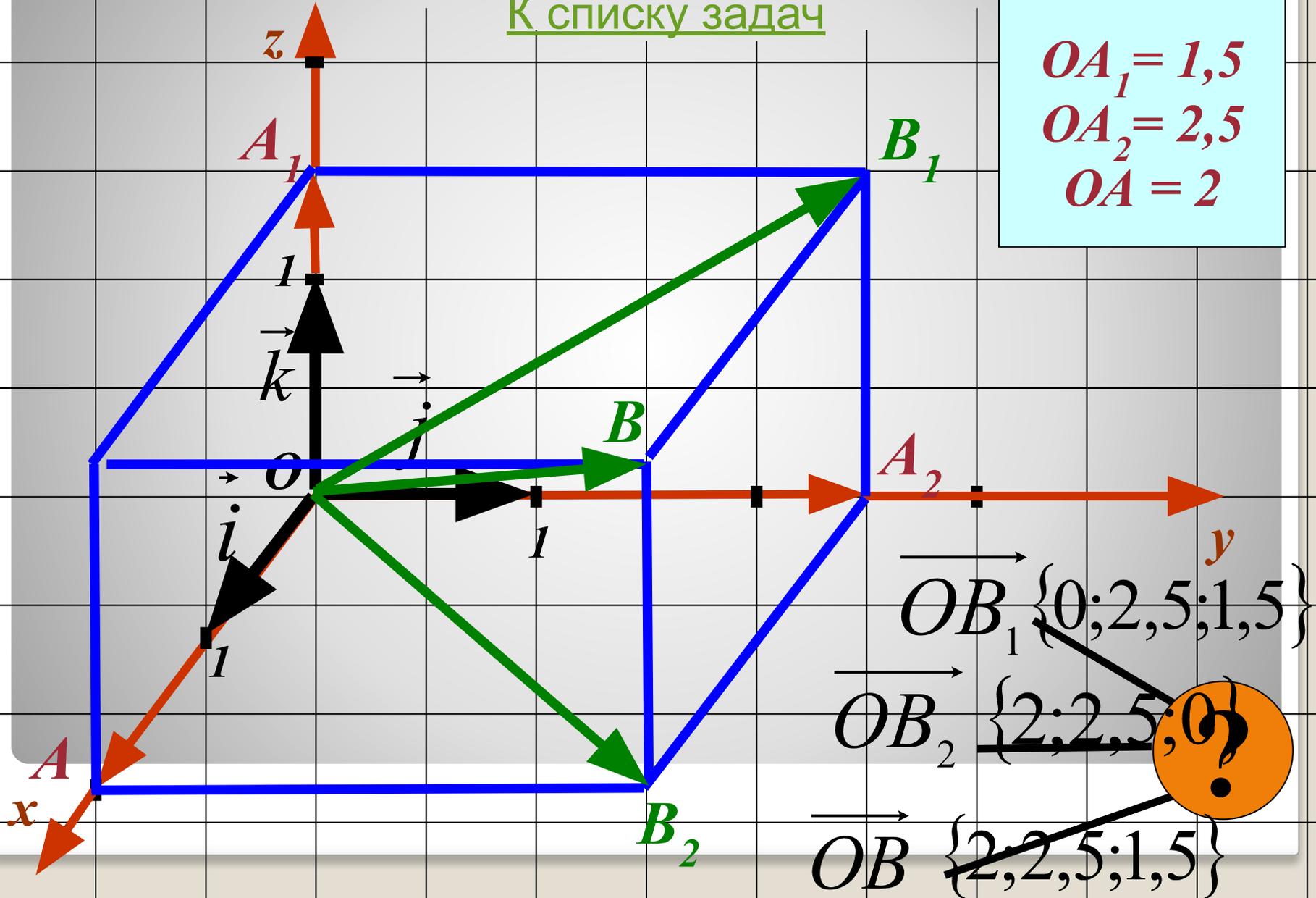
$$\begin{aligned} \vec{i} & \{1; 0; 0\} \\ \vec{j} & \{0; 1; 0\} \\ \vec{k} & \{0; 0; 1\} \end{aligned}$$



№4 Определите координаты векторов:

К списку задач

$$\begin{aligned} OA_1 &= 1,5 \\ OA_2 &= 2,5 \\ OA &= 2 \end{aligned}$$



*Пространство ,плоскость,вектора
Шагают рядом , и всегда
В решении любой задачи
Пусть вам сопутствует удача!*

В начало

