

2017 ( есть дефекты)

# Небесная механика

*Банникова Е.Ю.*

# Законы Кеплера

- Первый закон Кеплера... и длина эллипса*

Параметрическое уравнение эллипса

$$x = a \cos \varphi$$

$$y = b \sin \varphi$$

Длина эллипса

$$L = \int dl = \int r d\varphi = \int \sqrt{\frac{dx^2}{d\varphi^2} + \frac{dy^2}{d\varphi^2}} d\varphi = 4aE(e)$$

$$E(e) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad \text{- полный эллиптический интеграл 2-го рода}$$

Длина окружности

$$E(0) = \pi / 2 \quad \longrightarrow \quad L = 2\pi a$$

# Гравитационный потенциал

## Материальной точки

- 
- $\varphi = \frac{GM}{r}$

## Сферической оболочки

$$\varphi_{Sph} = \begin{cases} \frac{GM}{r}, & r \geq a \\ \frac{GM}{a}, & r < a \end{cases}$$

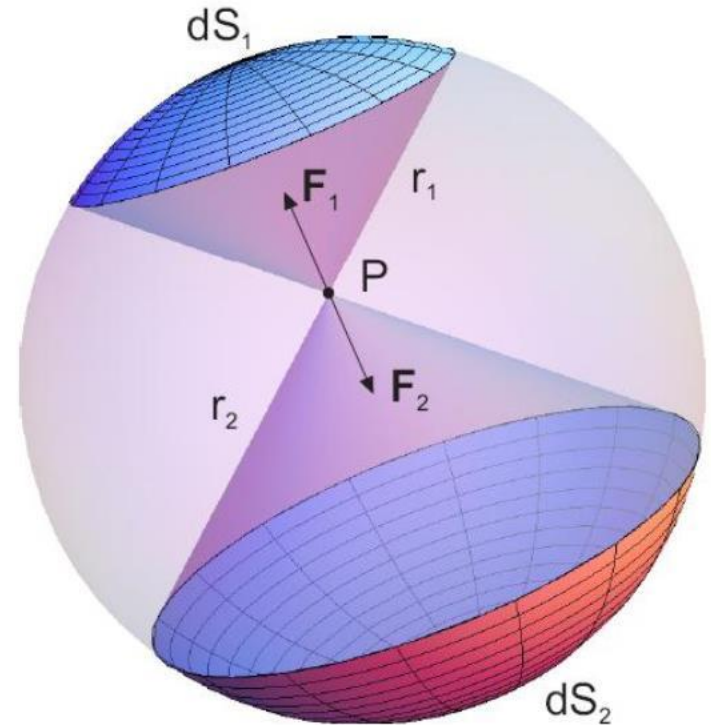
*Внутри сферической оболочки пробная частица находится в невесомости.  
Теорема Ньютона: обобщение на эллипсоидальный слой*

# Притяжение пробной частицы внутри сферы: элементарные соображения

Телесный угол

$$d\Omega = \frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{dm_1}{r_1^2} \frac{r_2^2}{dm_2} \frac{dS_1}{r_1^2} \frac{r_1^2}{dS_2}$$



$$F = \frac{M}{r} = \text{Const}$$

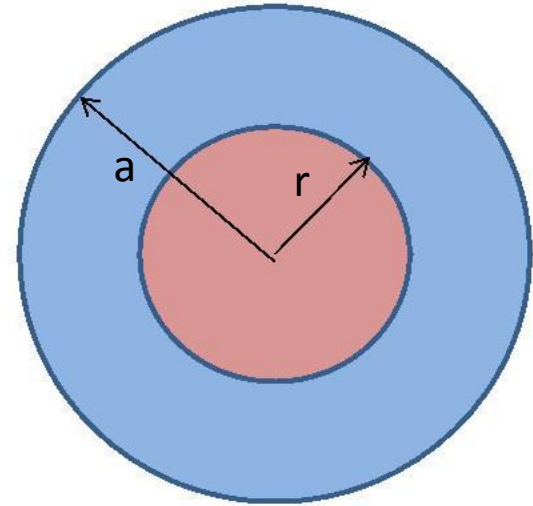
# Гравитационный потенциал шара

Потенциал сферы

$$\varphi_{Sph} = \frac{GM}{r} - 4\pi G \rho \frac{a^2}{2r}, \quad r \geq a$$

$$\frac{GM}{a} - 4\pi G \rho a, \quad r \leq a$$

внутри шара сфера



внутри шара  $4\pi G \rho \int_0^r r^2 dr$  внешняя сфера  $r dr$

$$\frac{GM}{r} - \frac{4\pi G \rho a^2}{3} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

$$\frac{GM}{r}$$

внешний шар

# Гравитационный потенциал шара

## Теорема Дирихле

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho, \text{ внутри объема}$$

$$\Delta \varphi = 0, \text{ вне объема}$$

$$r > a, \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi_{out} = \frac{C}{r} \quad C_2$$

$$r < a, \quad \Delta \varphi = 4\pi G \rho, \quad \varphi_{out} = 0, \quad \varphi_{in} = \frac{GM}{r} \quad \rightarrow$$

$$r < a, \quad \Delta \varphi = 4\pi G \rho, \quad \varphi_{in} = \frac{2G}{r^2} \quad \frac{C}{r} \quad C_2$$

# Гравитационный потенциал шара

Учитываем сшивку на границе  
потенциала и силы

$$\begin{aligned} \varphi_{out} \Big|_{r=a} &= \varphi_{inner} \Big|_{r=a} \\ \varphi_{out} \Big|_{r=a} &= \varphi_{inner} \Big|_{r=a} \end{aligned}$$

Потенциал шара

$$\begin{aligned} \varphi_{шар} &= \begin{cases} GM, & r \geq a \\ \frac{GM}{2a^3} (3a^2 - r^2), & r < a \end{cases} \end{aligned}$$

# Гравитационный потенциал

- Интегрирование по объему
- Суммирование по элементарным составляющим
- Теорема Дирихле

Сфера, цилиндр, шар....



# Гравитационный потенциал эллипсоида

## Теорема Лапласа

Однородные софокусные эллипсоиды притягивают внешнюю точку с силами, одинаково направленными, а по величине пропорциональными их массам

$$\frac{F_x}{F'_x} \propto \frac{M}{M'}$$

## Теорема Ляпунова

Шар обладает минимальной потенциальной энергией

# Задача Эйлера о двух неподвижных массах

- Гравитационный потенциал сжатого
- сфероида эквивалентен потенциалу стержня мнимой длины.

Метод эквигравитирующих стержней

# Разложение потенциала в ряд Лапласа

# Задача многих тел

- Произвольная инерциальная с.к.

$$N \sum_i R_i \cdot G \sum_{j \neq i} m_j \frac{R_j - R_i}{R_{ij}^3} \quad R_i^{(0)} \quad R_i(t_0)$$

$$R_i \quad R_i(t_0)$$

Порядок системы  $6(n+1)$

$(0)$

Первые интегралы:

$$\sum_i m_i R_i \cdot a, \quad \sum_i m_i R_i \cdot a \cdot t \cdot b \quad \text{закон движения центра масс}$$

$$\sum_i R_i \cdot m_i \cdot R_i \cdot I \quad \text{закон сохранения момента количества движения}$$

$$E_{tot} = T + U \quad \text{закон сохранения энергии}$$

В скалярном виде 10 первых интегралов в произвольной инерциальной с.к.

# Задача двух тел:

Произвольная инерциальная с.к.

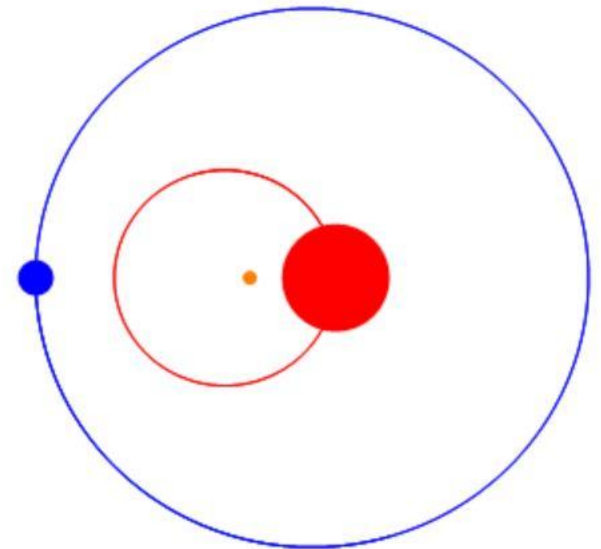
$$\begin{aligned}
 & \vec{R}_1 \quad Gm_2 \quad \vec{R}_{12} \\
 & \vec{R}_2 \quad Gm_1 \quad \vec{R}_{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vec{R}_{1,2}^{(0)} \quad \vec{R}_{1,2}(t) \\
 & \vec{R}_{1,2}^{(0)} \quad \vec{R}_{1,2}(t)
 \end{aligned}$$

Барицентрическая с.к.

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \vec{r}_1 \quad G \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{\beta} \quad 0 \\
 & \vec{r}_2 \quad G \frac{m_1}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{\beta} \quad 0
 \end{aligned}$$



# Задача двух тел

Относительная система координат

$$\ddot{r} = -G(M+m) \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{r}(t_0)$$

$$\mathbf{r}^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$$

Первые интегралы:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{I} \quad \text{момент на единицу массы}$$

$$E_{tot} = T + U$$

Порядок системы = 6, но 4 первых (в скалярах) интегралов. Не хватает.....

# Задача двух тел. Интеграл Лапласа

$$\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{I} \times \mathbf{r}}{r^3} = 0$$

$$G(M, m)$$

Интеграл Лапласа

$$\mathbf{r} \times \mathbf{I} \times \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}$$

$\mathbf{r} \times \mathbf{r}$  вектор Лапласа

Уравнения связи между первыми интегралами

$$\mathbf{I} \times \mathbf{r} = 0$$

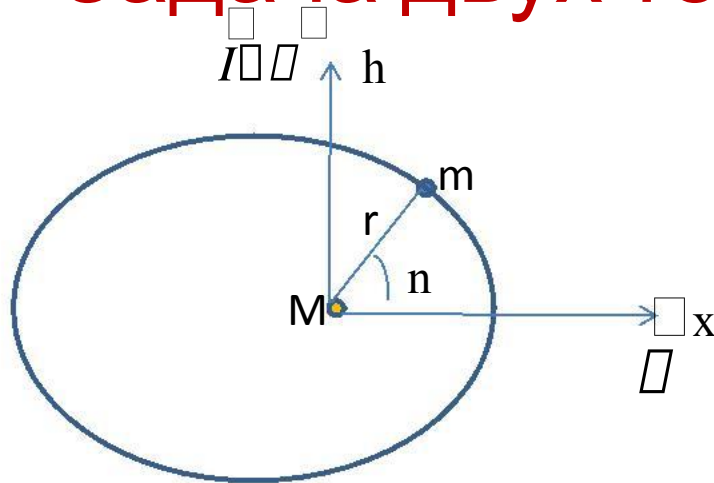
Вектор момента и вектор Лапласа перпендикулярны

$$\mathbf{I}_2 \times \mathbf{r} = \mathbf{I}^2$$

*tot*

5 независимых первых интегралов => задача двух тел в относит с.к. (система 6-го порядка) сводится к одному уравнению

# Задача двух тел. Орбитальная с.к.



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \frac{h^2}{\mu (1 - e \cos \theta)}$$



$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$



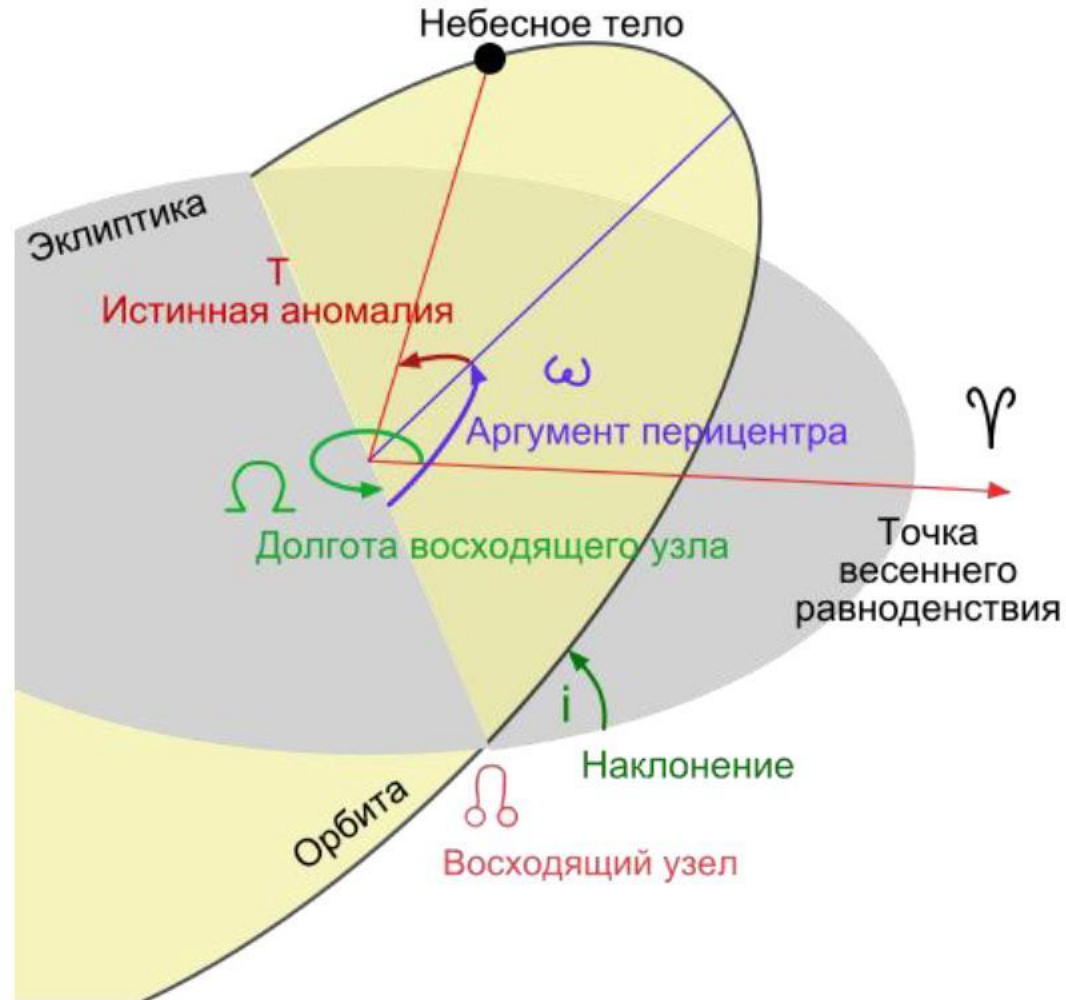
$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

$$p = \frac{I^2}{\mu}$$

$$e = \frac{I}{\mu v_0}$$



# Задача двух тел



# Уравнение Кеплера

$$r_2 = n \int_0^t I dt \longrightarrow \int_0^t \frac{dn}{(1 - e \cos \frac{2\pi t}{T})^2} dt = \frac{\sqrt{p}}{n}$$

$$\frac{n}{2} \frac{1 - e}{\sqrt{1 - e}} \frac{E}{2}$$

Уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - t_0) \longrightarrow \frac{2\pi a^3}{T^2 \sqrt{G(M + m)}}$$

# Смещение перигелия Меркурия

Ньютоновское приближение

$$\frac{du}{dn} = u^2 + \frac{2GMm^2}{I^2} \frac{Em}{u} - \frac{1}{I^2}$$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

Релятивистская задача

$$\frac{du}{dn} = r_g u^3 + u^2 + \frac{r_g m c^2}{I^2} u - \frac{m c}{(I c)^2} \frac{E_2}{m c}$$

Максимальное смещение перигелия наблюдается для Меркурия и составляет 43'' за 100 лет.

# Задача трех тел

$$r_1^3 \ddot{\alpha}_1 + \frac{r_1}{r_1^3} \alpha_1 = \frac{r_2}{r_2^3} \alpha_2$$

$$x \ddot{y} - 2ny \dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$y \ddot{x} - 2nx \dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$z \ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\mu_{1,2} = Gm_{1,2}$$

$$U(x, y, z) = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$$

$$V^2 = 2U + C_J$$

$C_J$  - интеграл Якоби (интеграл относительной энергии)

# Задача трех тел

$$V^2 - 2U = C_J$$

$$U(x, y, z) = \frac{n^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}$$

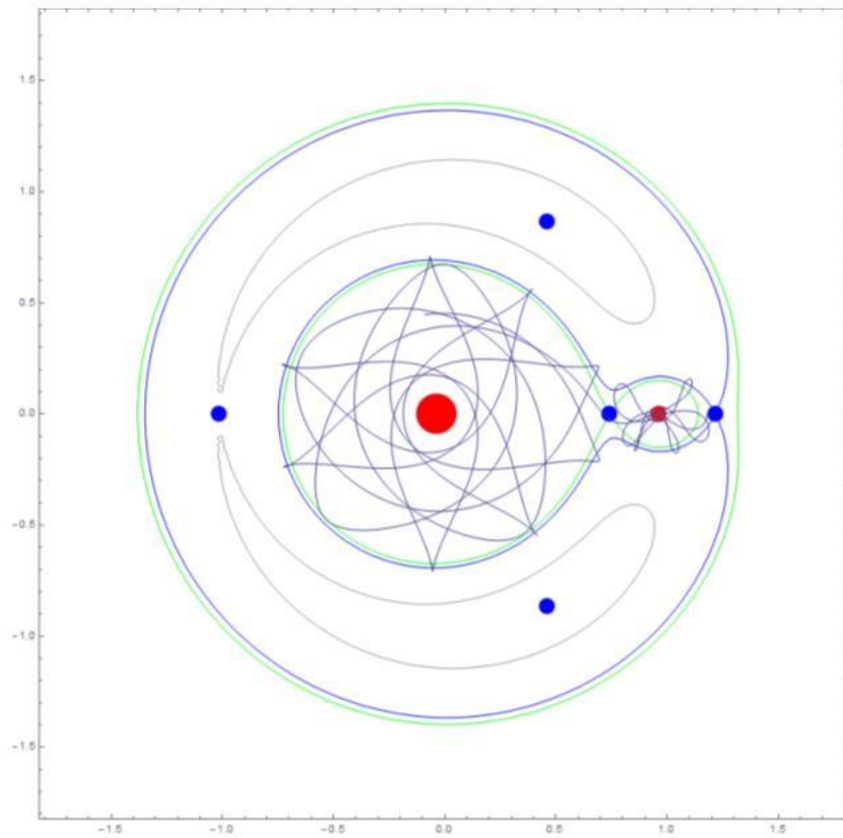
Поверхности нулевой скорости

$$n^2(x^2 + y^2) + \frac{2\mu_1}{r_1} + \frac{2\mu_2}{r_2} = C_J$$

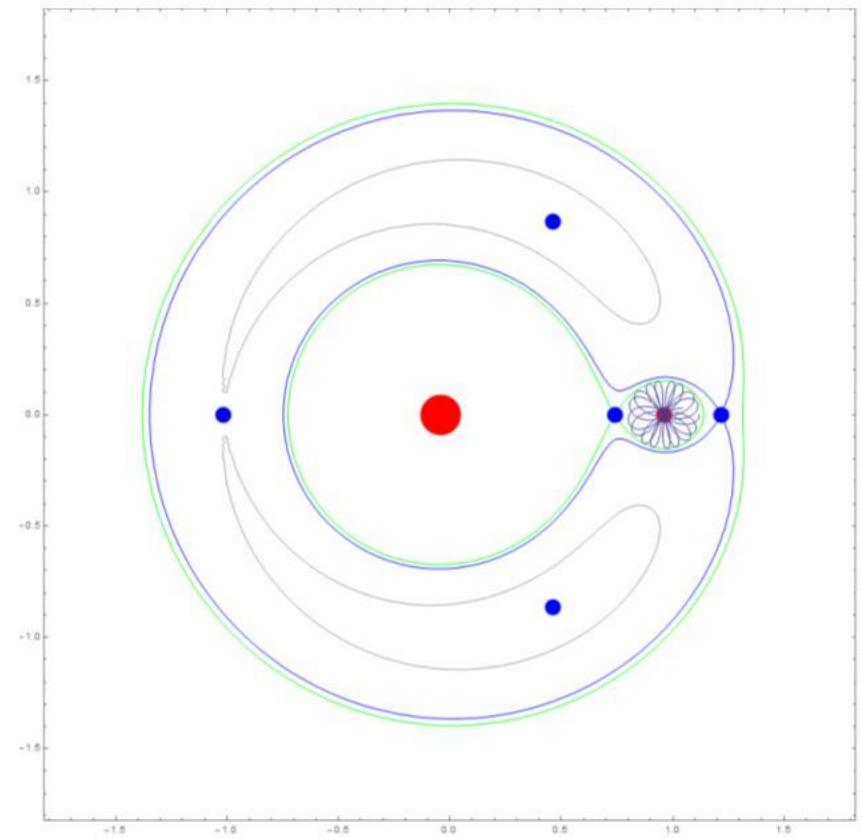
$C_J$  - интеграл Якоби

# Кривые нулевой скорости

$m=0.04;$   
 $x_0=1.179;y_0=0;z_0=0.0;$   
 $V_{x0}=0.0;V_{y0}=-0.238;V_{z0}=0.0;$



$m=0.04;$   
 $x_0=1.12;y_0=0;z_0=0.0;$   
 $V_{x0}=0.0;V_{y0}=-0.238;V_{z0}=0.0;$



# Точки Лагранжа

$L_4, L_5$

$$\begin{matrix} r_1 & r_2 & 1 \\ \hline r_1 & r_2 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 1/2 \mu_2 \\ y = \sqrt{3}/2 \end{matrix}$$

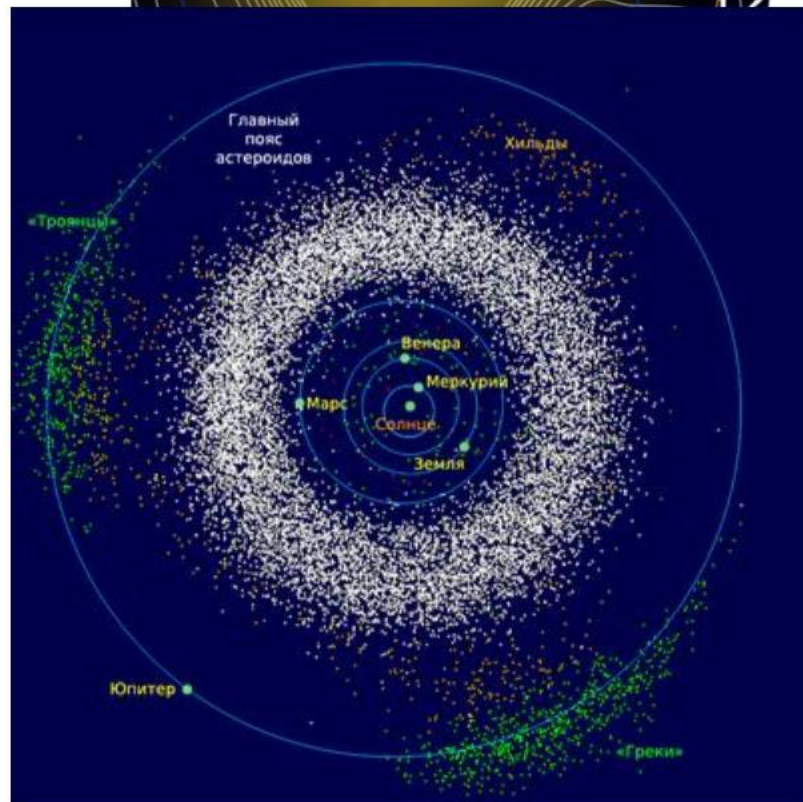
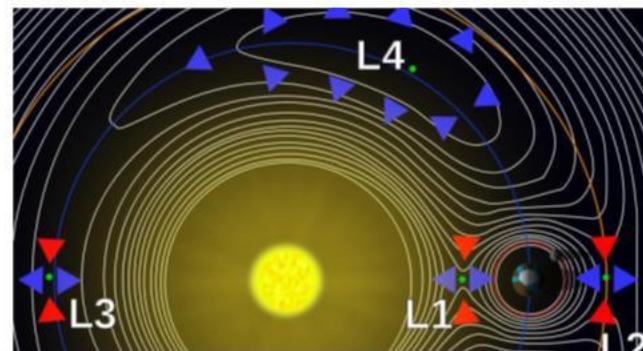
$$\mu_2 \ll \mu_1$$

$L_1, L_2$

$$r_2 = \frac{\mu_2}{3\mu_1} \mu_1^{1/3}$$

$L_3$

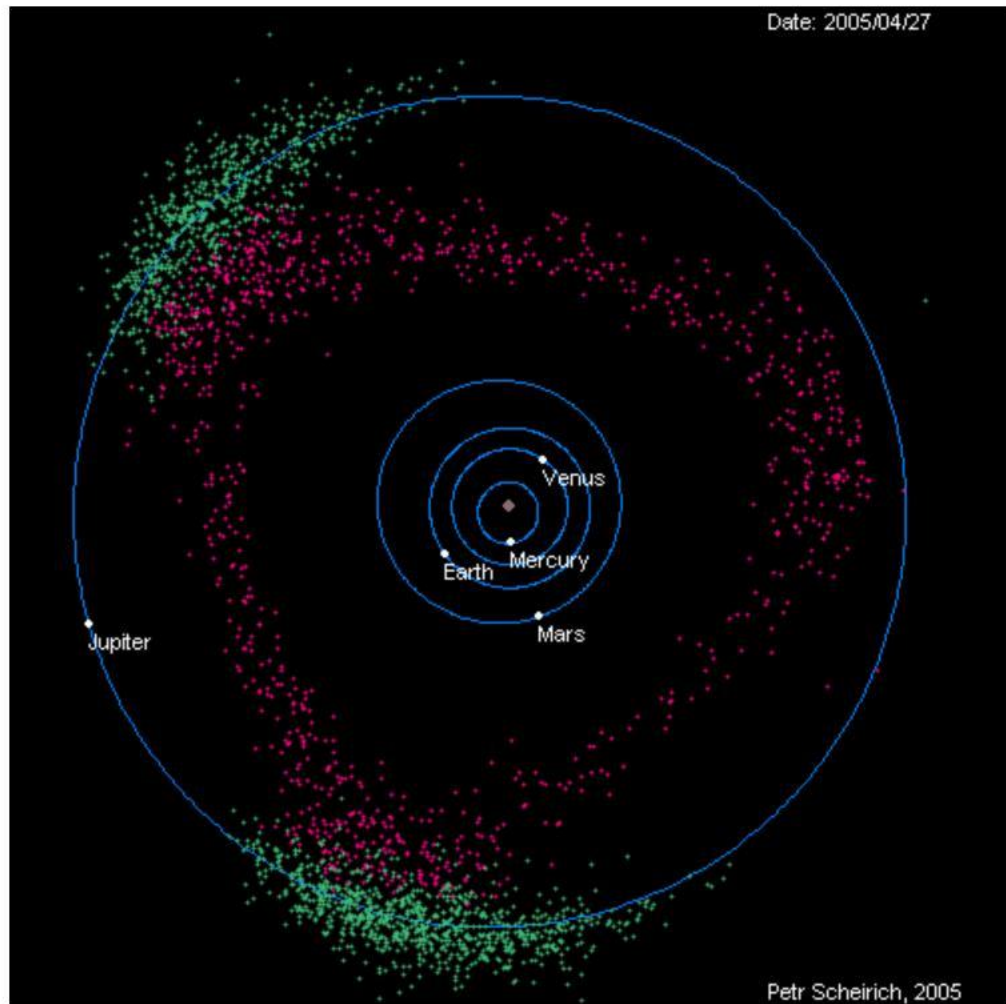
$$r = \frac{7}{12} \mu_2 \mu_1$$



# Семейство Хильды

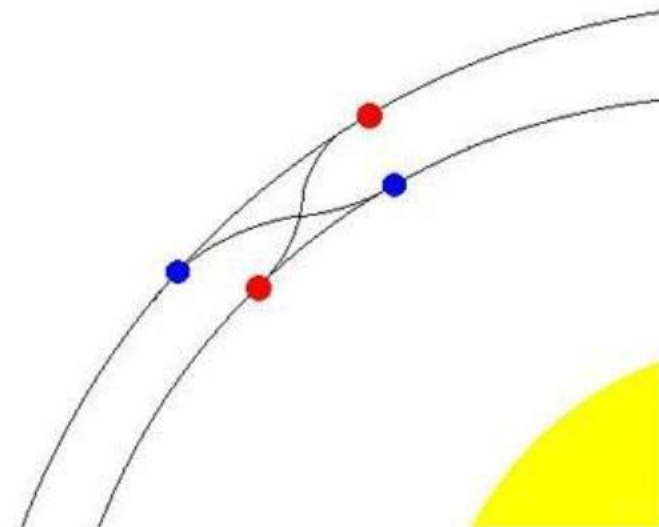
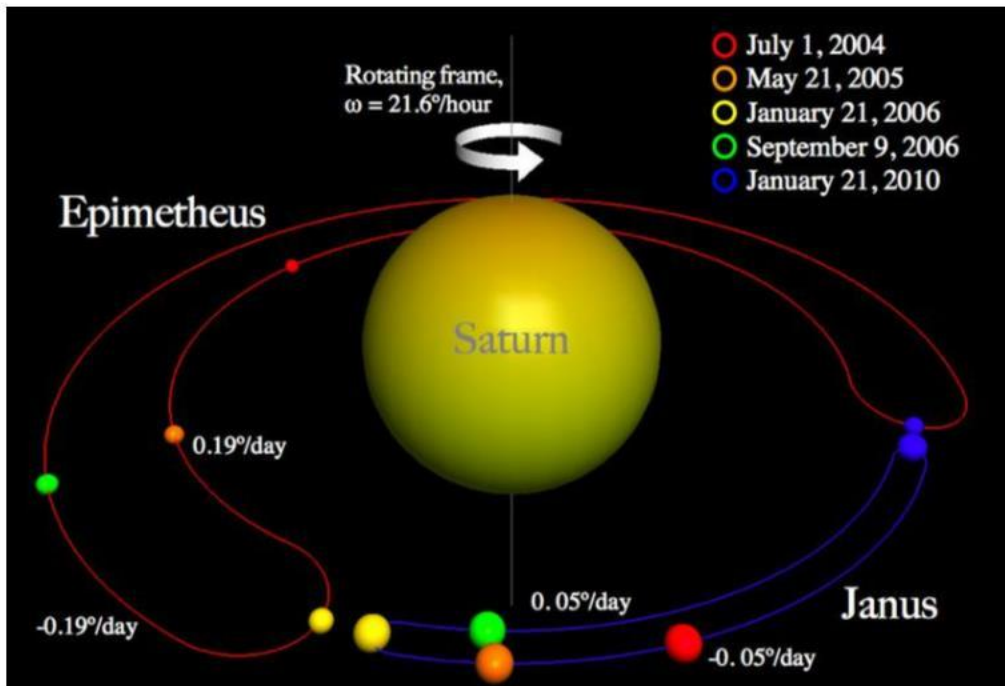
Резонанс 3:2

L3,L4,L5 – афелии астероидов

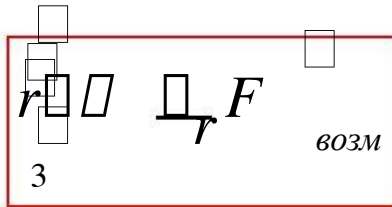




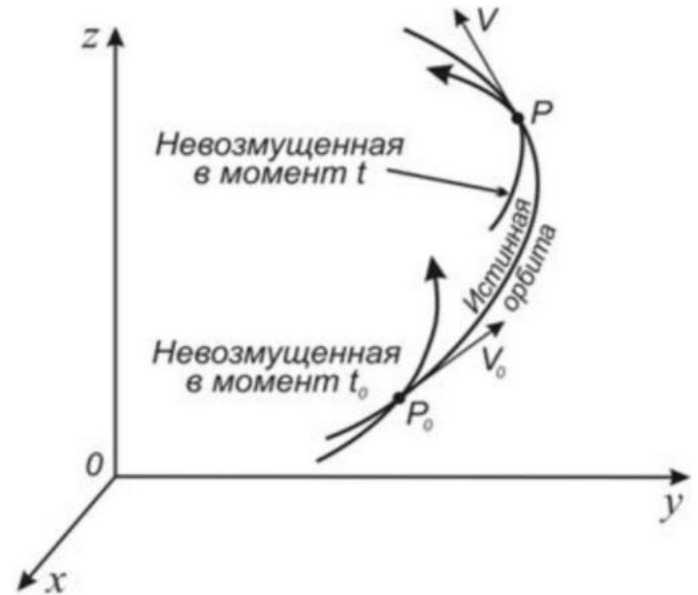
# Янус и Эпиметей



# Метод Лагранжа оскулирующих элементов



$r$



На малом интервале – невозмущенное кеплеровское движения, соответствующее разным начальным условиям.

Возмущенная орбита является огибающей семейства невозмущенных

## Планетные уравнения Лагранжа

$$\frac{dE_i}{dt} = \dots \quad j \quad \text{возм}$$

$(E, U)$

$i$

$U_{\text{возм}}$  - возмущающий потенциал

$$E = (i, \dots, e, p, \dots)$$

# Метод Лагранжа оскулирующих элементов

Разложение, усреднение U....

Вековые (секулярные) возмущения

$$\begin{aligned}
 a &= a_0 \\
 e &= e_0 + A(\cos \varpi - \cos \varpi_0) \\
 \varpi &= \varpi_0 + Bt \\
 \Omega &= \Omega_0 + Ct
 \end{aligned}$$

Астероид, возмущенный Юпитером

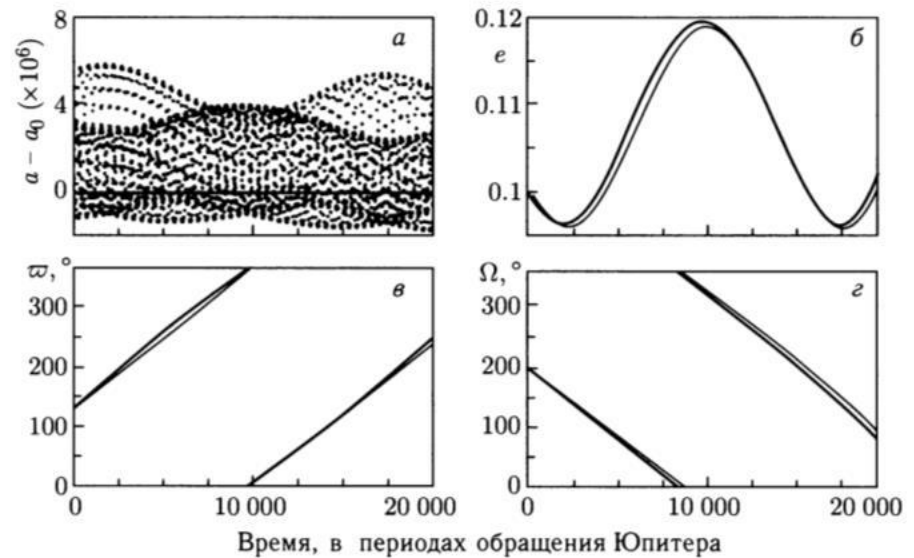


Рис. 6.3. Сопоставление результатов полного численного интегрирования (жирная кривая) с прогнозом аналитической теории (тонкая кривая) для изменений: а) большой полуоси, б) эксцентриситета, в) долготы перигелия и з) долготы восходящего узла орбиты пробной частицы при доминировании вековых возмущений со стороны Юпитера

# Метод Лагранжа или метод оскулирующих элементов

$$\frac{dE_i}{dt} = \dots_i(t, E_j)$$

Для двух планет

$$E = E_0 + A \left( \frac{t}{T} \right)^{k_1, k_2} + \frac{A_{k_1, k_2}}{k_{n1}^{k_1} k_{n2}^{k_2}} \sin(k_1 M_1 - k_2 M_2) + \frac{B_{k_1, k_2}}{k_{n1}^{k_1} k_{n2}^{k_2}} \cos(k_1 M_1 - k_2 M_2)$$

$k_{1,2}$  – собственная частота движения планеты и частота возмущающей силы (м)

Периодические возмущения :

$$A_{mlp} = \frac{A(k_1, k_2)}{k_{n1}^{k_1} k_{n2}^{k_2}}$$

$T$

$$\frac{2^2}{k_{n1}^{k_1} k_{n2}^{k_2}}$$

# Метод Лагранжа или метод оскулирующих элементов

- Резонансные возмущения

Пример – астероид на резонансной орбите с Юпитером

$$a_J \approx 5.20$$

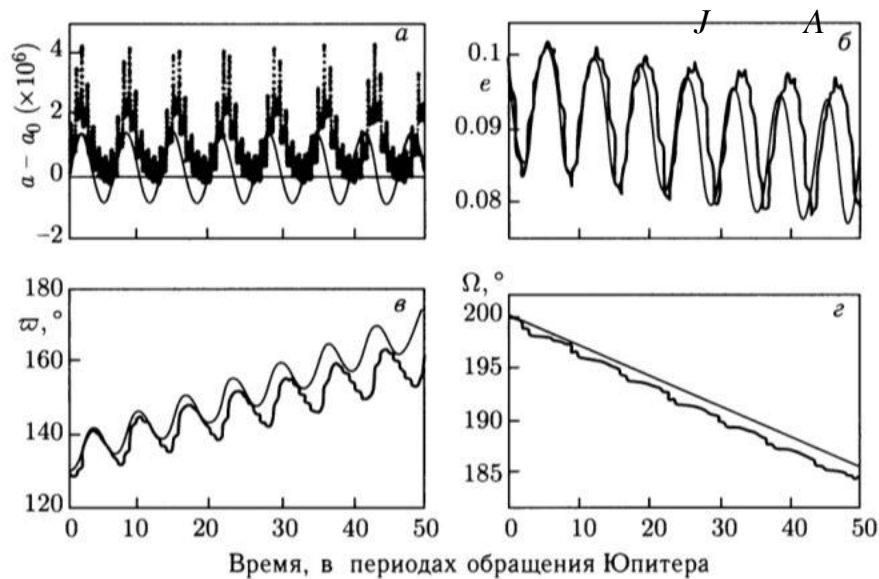
$$a_A \approx 3.27$$

$$\frac{T_A}{T_J} \approx 0.5$$

$$T_J$$

$$2n \quad n$$

$$\square$$

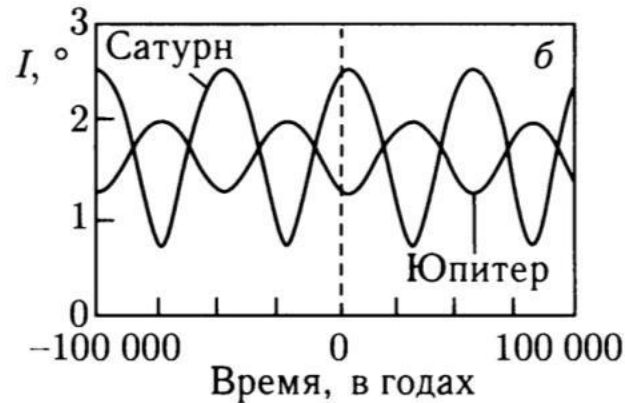
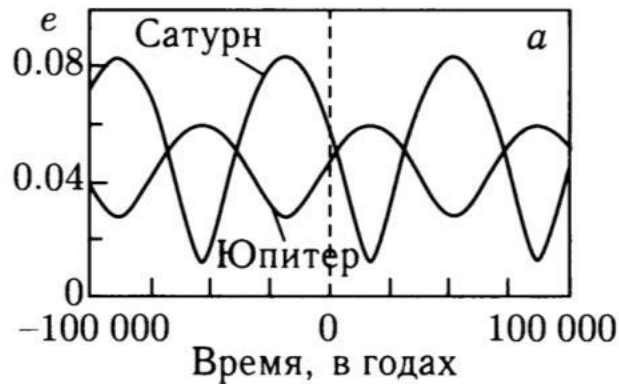


# Метод Лагранжа или метод оскулирующих элементов

- Возмущения кеплеровских элементов Юпитер-Сатурн

Пример Юпитер-Сатурн

$$\frac{T_J}{T_S} \approx \frac{2}{5}$$



Эксцентриситет орбиты каждой из планет периодически изменяется  
с периодом 70 100лет

Наклонение – 51 000 лет

# Метод Лагранжа или метод оскулирующих элементов

- Короткопериодические возмущения  $Amp \propto \frac{A(k_1, k_2)}{k_{11} n_1 \pm k_{22} n_2}$

$$k_{11} n_1 \pm k_{22} n_2 \pm k_{n1} n \quad T \propto \frac{2\pi}{k_{11} n_1}$$

Периоды возмущений порядка орбитального периода, амплитуда мала.

- Долгопериодические возмущения (при малых  $k_1, k_2$ )

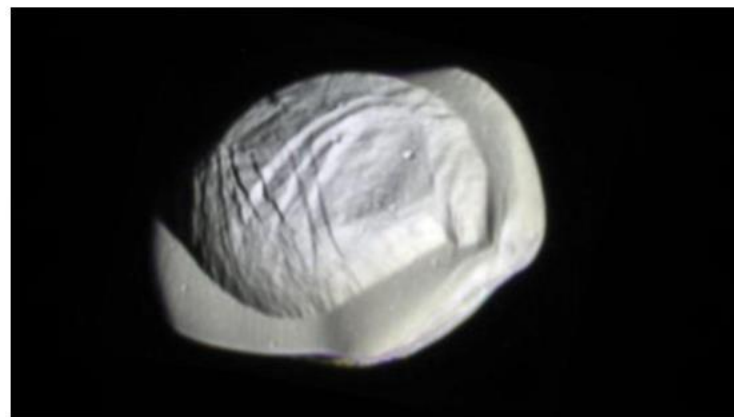
$$k_{11} n_1 \pm k_{22} n_2 \pm 0 \quad \text{Отношение средних движений = простой дроби}$$

$$\boxed{\frac{n_1}{n_2} \pm \frac{k_2}{k_1}} \quad \text{- резонансное состояние}$$

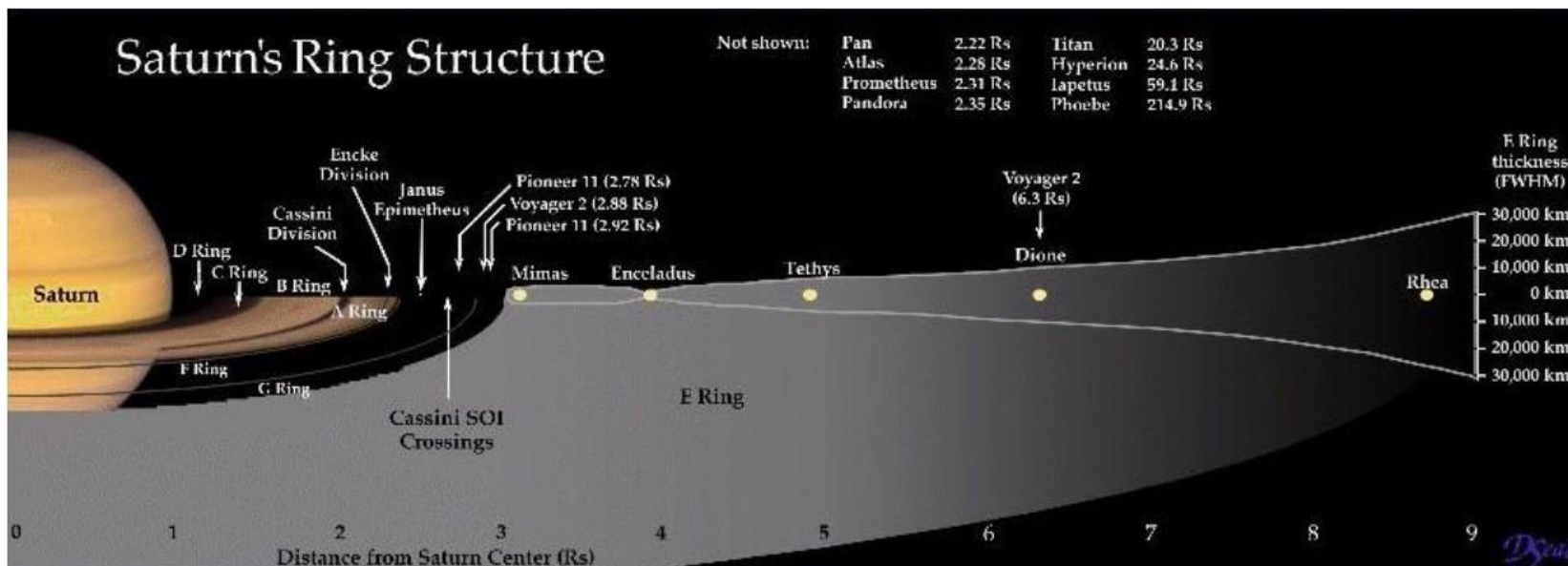
# Спутник-пастух колец Сатурна

Открытие в 1990г. при анализе изображений Вояджер-2 (1981г.)

1991г. – официально назван в честь бога пастухов



Расположен внутри *люка Энке* и движется почти в плоскости экватора Сатурна

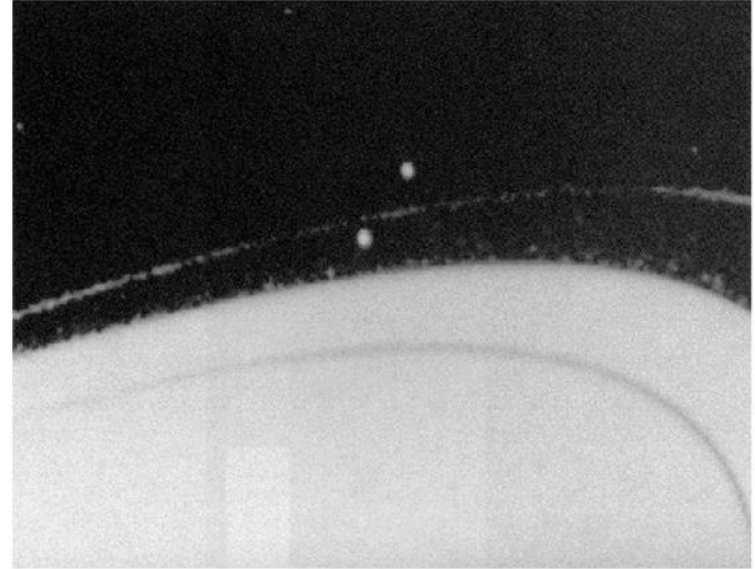




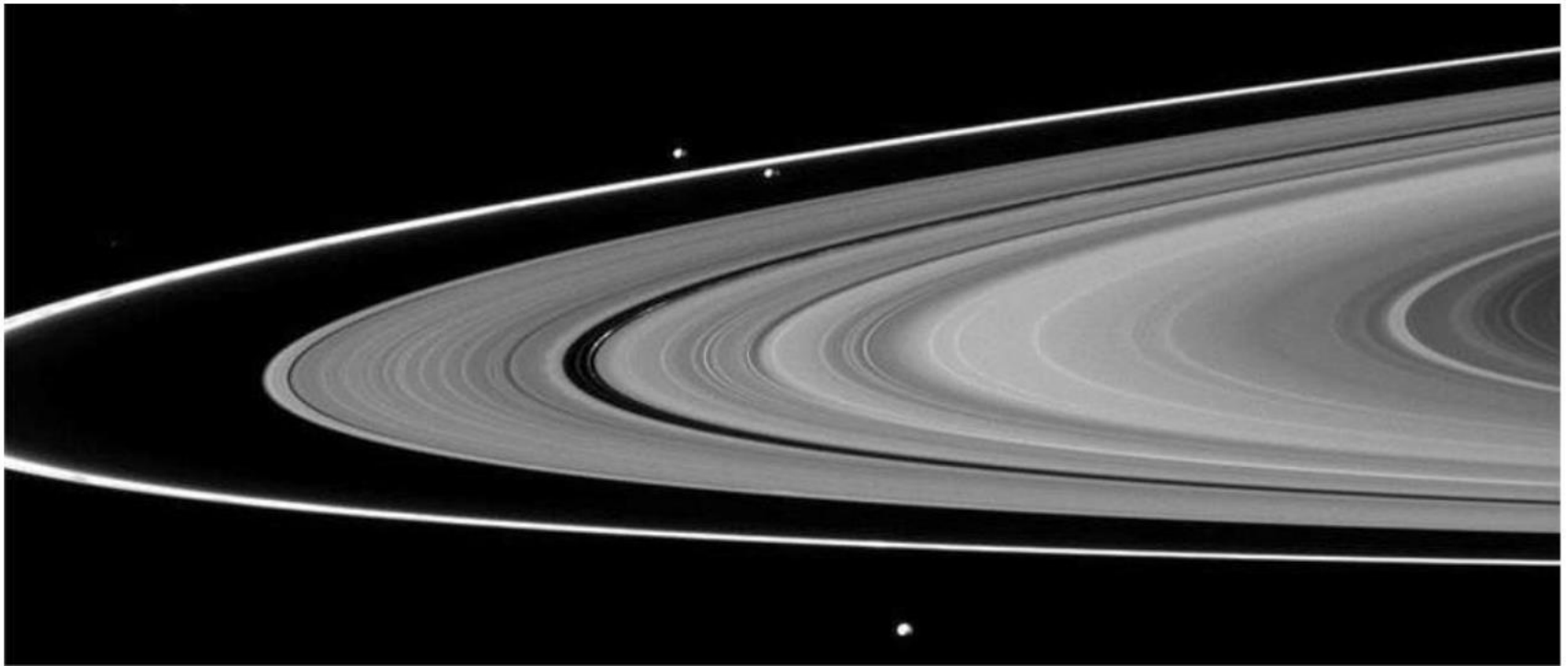
# Спутник-пастухи Сатурна

Прометей (внутренний)

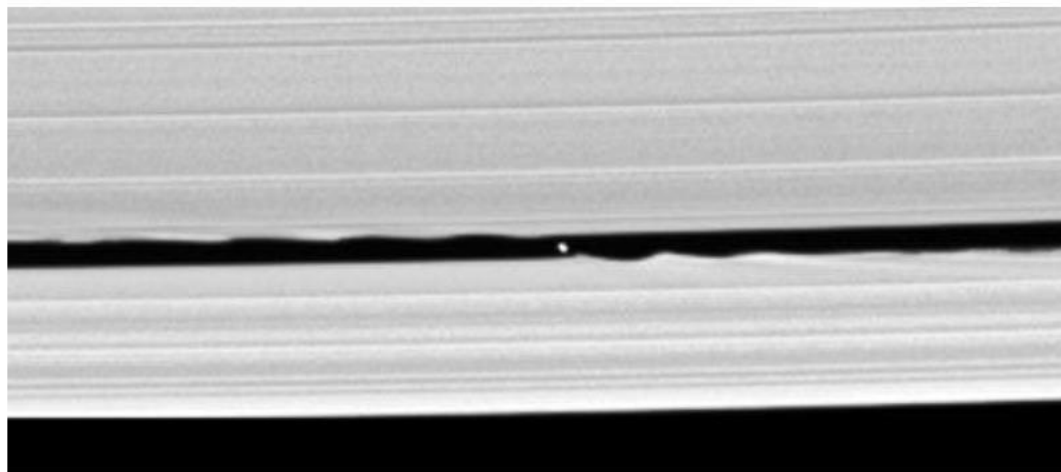
Пандора (внешний)



Cassini image



# Спутники-пастухи



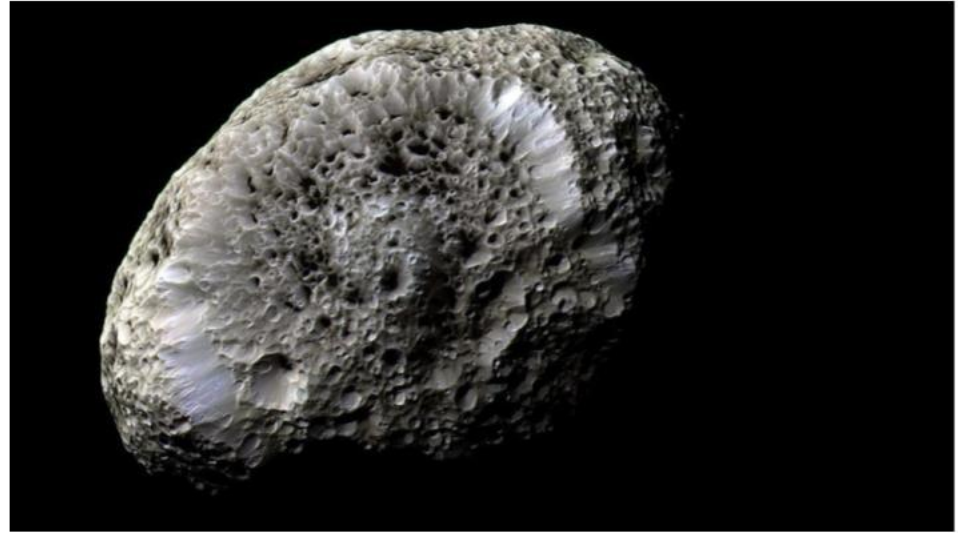
Cassini's confirmation that a small moon orbits within the Keeler gap in Saturn's rings is made all the more exciting by this image, in which the disk of the 7 kilometer-wide body is resolved for the first time.

The new body, provisionally named S/2005 S1, was first seen in a time-lapse sequence of images taken on May 1, 2005, as Cassini began its climb to higher elevations in orbit around.

In the vicinity of the little moon, the Keeler gap edges bear striking similarities to the scalloped edges of the 322 kilometer-wide Encke gap, where the small moon Pan (25 kilometers across) resides. From the size of the waves seen in the scalloped edges of the Encke gap, imaging scientists were able to estimate the mass of Pan. They expect to do the same eventually with S/2005 S1.

This image was obtained with the Cassini spacecraft narrow-angle camera on May 2, 2005, at a distance of about 594,000 kilometers from Saturn.

# Гиперион (спутник перевертыш)



Двуликий... Япет

Cassini images

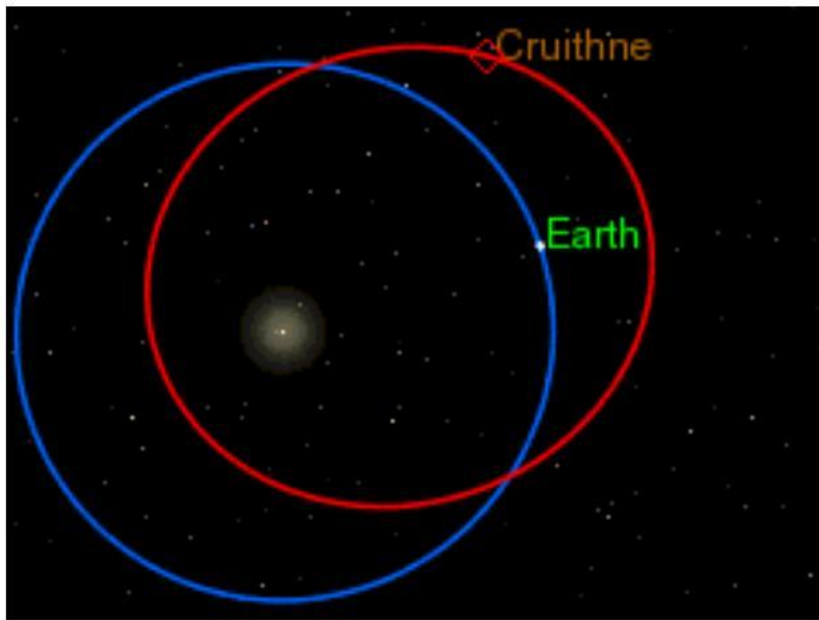
Спин-орбитальный резонанс



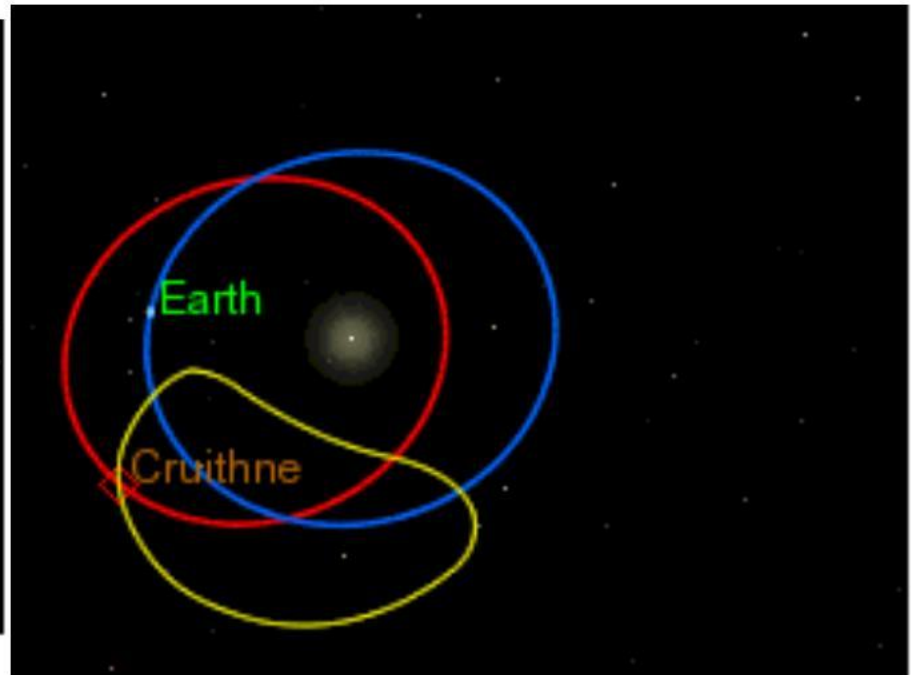
# Астероид Круитни

Орбитальный резонанс с Землей 1:1

Проекция на эклиптику



Сопутствующая система к.



# Сечение Пуанкаре

*Сечение (отображение) Пуанкаре* – отображение проекции траектории на выделенную плоскость фазового пространства.

Для траектории на плоскости:  
4-х мерное фазовое пространство

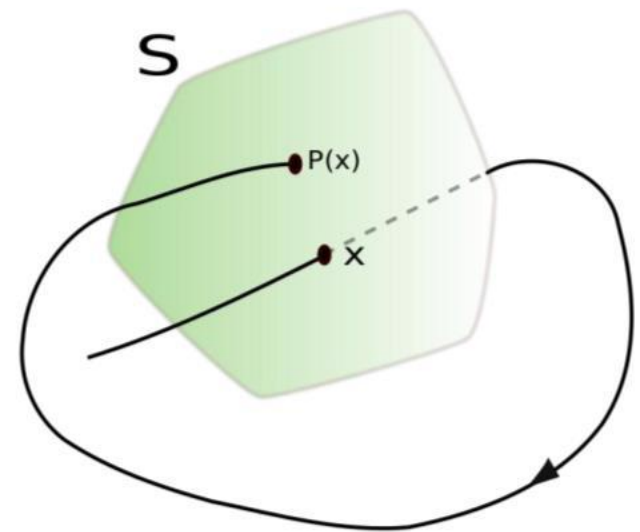
$(x, y, z, t)$

Одну из переменных можно исключить, воспользовавшись интегралом Якоби или полной энергией => 3D фазовое пр-во  $(x, y, z)$

Выделяем одну из плоскостей, например,  $y=0$ .

Т.о. получаем проекцию на фазовую плоскость

$(x, z)$



# Сечение Пуанкаре

Потенциал Хенона-Хейлиса

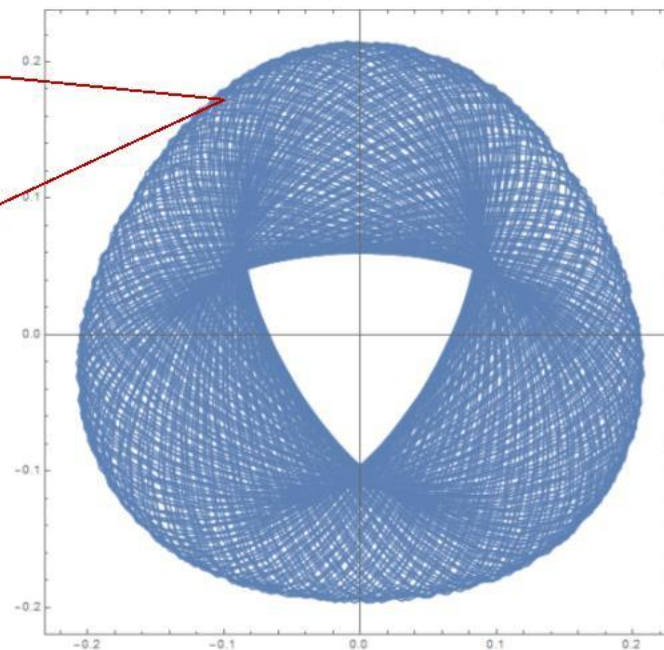
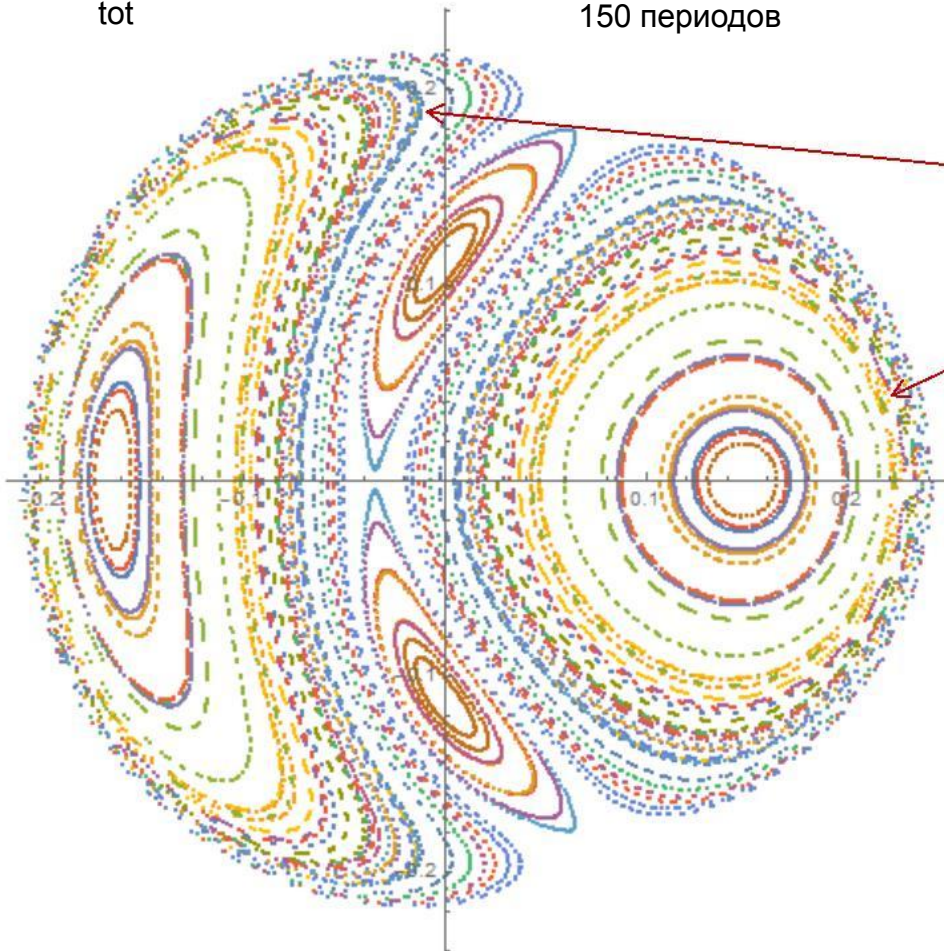
$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 2x^2 \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}y^3$$

$E = 1/40$

tot

$N=50$  – число частиц  
150 периодов

Траектория одной из частиц  
150 периодов



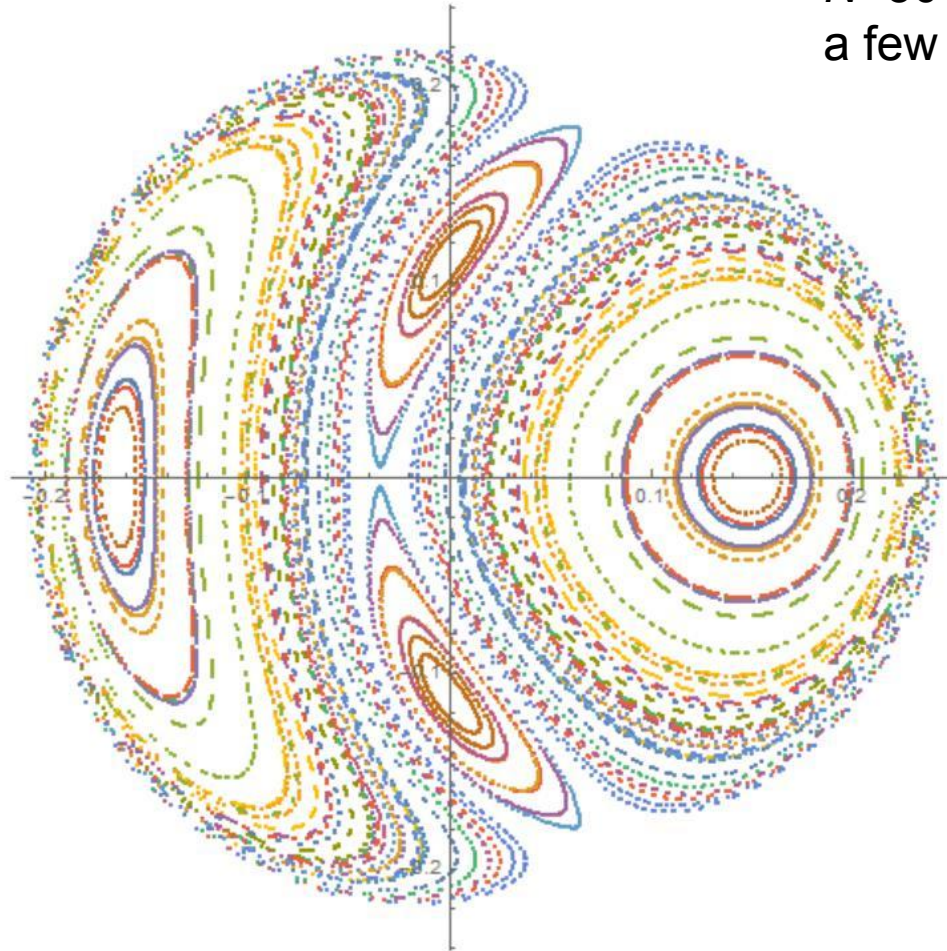
# Сечение Пуанкаре

Потенциал Хенона-Хейлиса

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3$$

$N=50$  – число частиц  
a few 100 periods

$E = 1/40$   
tot



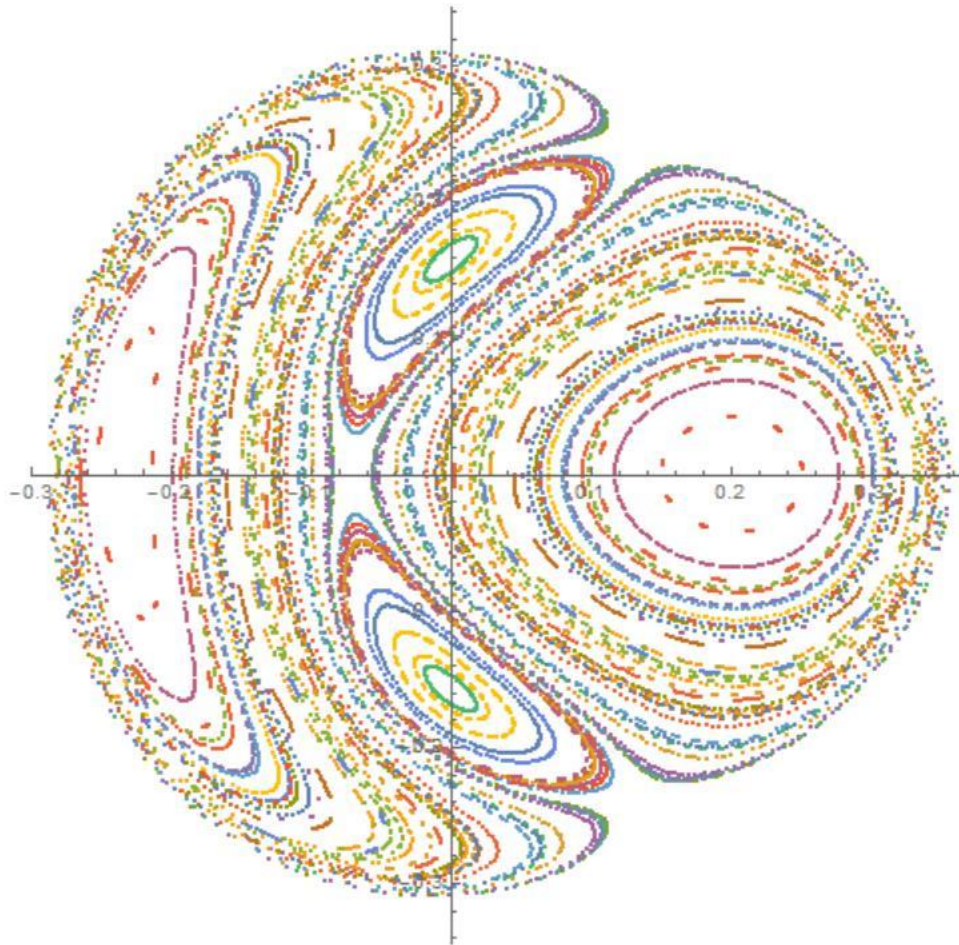
# Сечение Пуанкаре

Потенциал Хенона-Хейлиса

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3$$

$E = 1/20$

tot





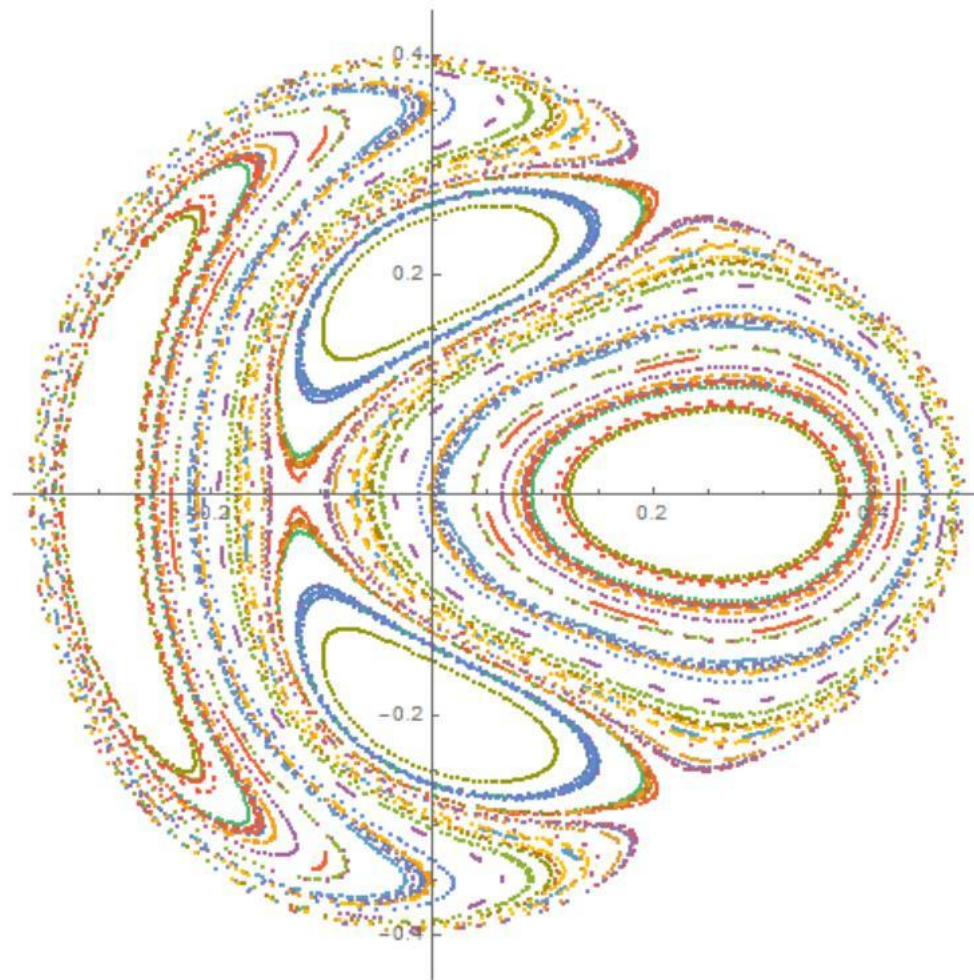
# Сечение Пуанкаре

Потенциал Хенона-Хейлиса

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 2x^2y + \frac{2}{3}y^3$$

$E = 1/12$

tot



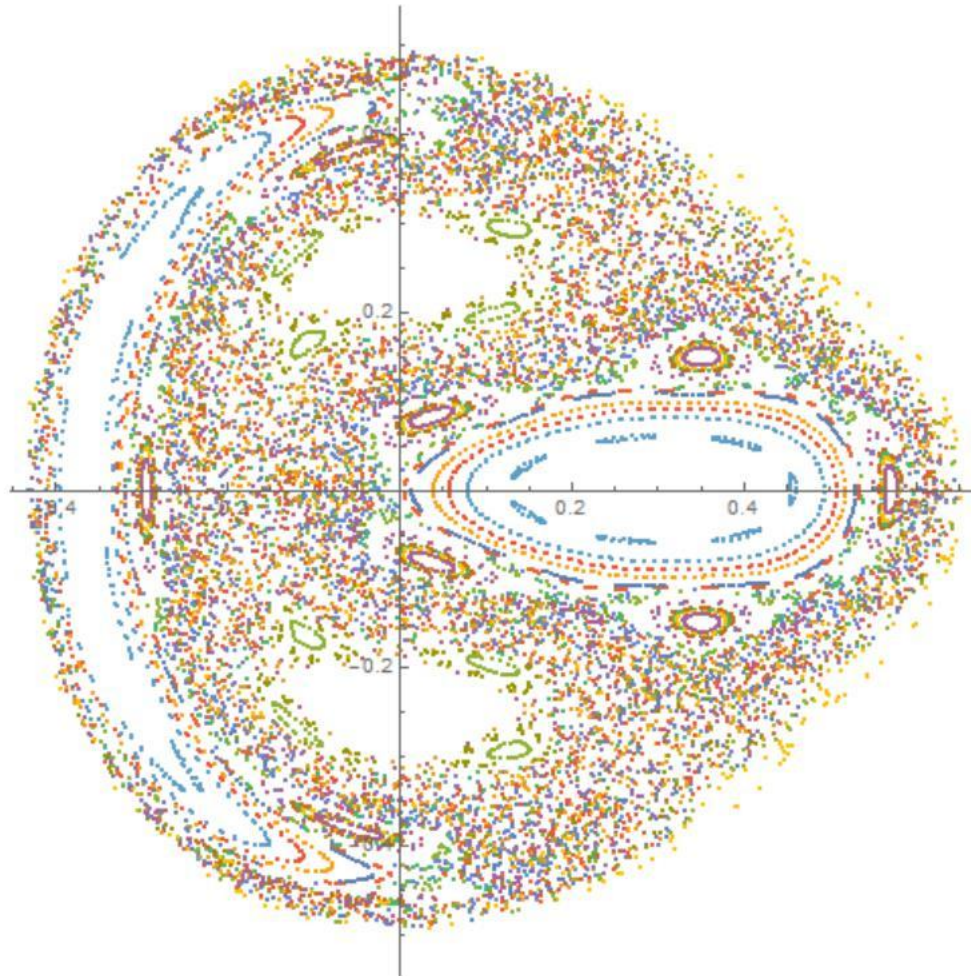
# Сечение Пуанкаре

Потенциал Хенона-Хейлиса

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 2x^2y + \frac{2}{3}y^3$$

$E_{\text{tot}} = 1/8$

tot



# Сечение Пуанкаре

Потенциал Хенона-Хейлиса

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 2xy + \frac{2}{3}y^3$$

$E_{\text{tot}} = 1/6$

