Некоторые часто встречающиеся дискретные распределения

Проводится n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p.

X-число успехов.

Тогда говорят, что X имеет биномиальное распределение с параметрами n,p

X принимает значения: 0,1,2,…n

$$p(X=k)=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

ПРИМЕР.

Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. X-число попаданий. Найти распределение X.

Найдем MX и DX для биномиального распределения

Введем для каждого i=1,2…n случайную величину Z_i .

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{åñëè} \quad \text{â } i-\text{ì} \quad \text{èñïûòàíèè óñïåõ} \\ 0, & \text{åñëè} \quad \text{â } i-\text{ì} \quad \text{èñïûòàíèè íåóäà÷à} \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{X = Z_1 + Z_2 + \ldots + Zn}$$

Тогда математическое ожидание случайной величины X:

$$MX = MZ_1 + MZ_2 + \ldots + MZ_n$$

Найдем математическое ожидание Z_i

Ряд распределения Z_i имеет вид:

Z_i	0	1
P_i	$1-p$	p

Тогда $MZ_i = p$ и $MX = np$.

Найдем дисперсию DZ_i

$$DZ_i = MZ_i^2 - M(Z_i)^2$$

Z_i	0	1
P_i	1-p	p

Z_i^2	0	1
P_i	1-p	p

$$MZ_i^2 = p$$

$$DZ_i = p - p^2 = p(1-p)$$

Так как случайные величины Z_i независимы, то

$$DX = DZ_1 + DZ_2 + \ldots + DZ_n =$$

$$= np(1-p) = npq$$

Таким образом, для случайной величины, распределенной по биномиальному закону,

$$MX = n \cdot p$$

$$DX = n \cdot p \cdot q$$

Распределение Пуассона

Пусть X – число наступлений редкого события за некоторый промежуток времени.

Известно среднее число наступлений этого события за этот промежуток времени a

Тогда X может принимать значения

0, 1, 2,…,k,…

$$p(X = k) = e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!}$$

Говорят, что X имеет распределение Пуассона с параметром a.

ПРИМЕР.

При работе оборудования время от времени возникают сбои. В среднем за месяц возникает 3 сбоя. Пусть Х-число сбоев за месяц. Найти распределение Х.

Вычислить вероятности событий:

А - за месяц будет не больше 2-х сбоев;

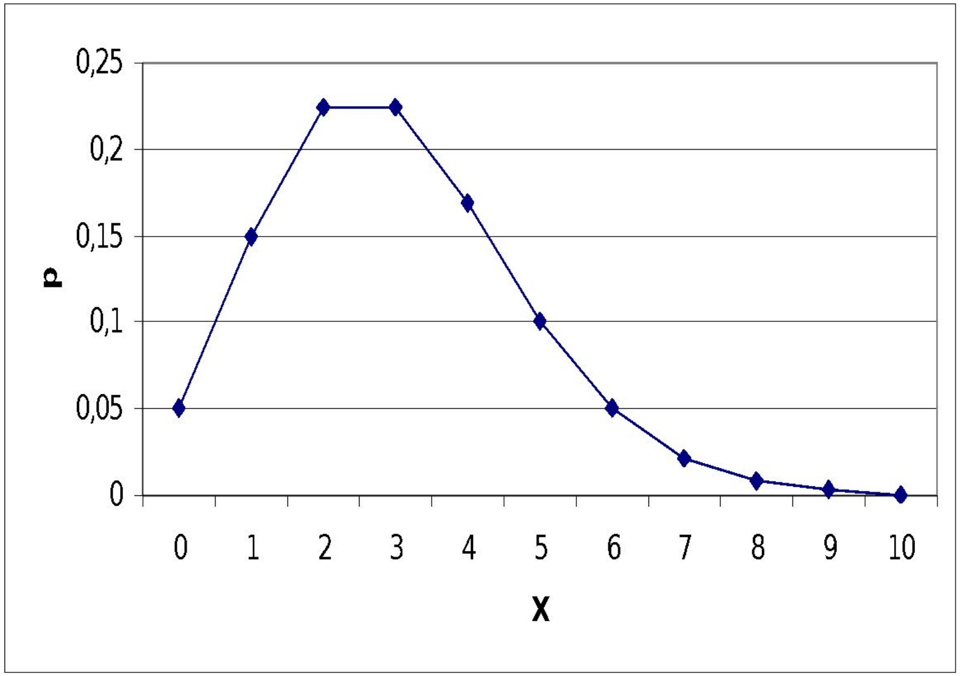
В - в течение месяца произойдет хотя бы один сбой.

X	p
0	0,049787
1	0,149361
2	0,224042
3	0,224042
4	0,168031
5	0,100819
6	0,050409
7	0,021604
8	0,008102
9	0,002701
10	0,00081

=3^A2/ФАКТР(A2)*EXP(-3)

X	p
0	0,049787
1	0,149361
2	0,224042
3	0,224042
4	0,168031
5	0,100819
6	0,050409
7	0,021604
8	0,008102
9	0,002701
10	0,00081

=3^A2/ФАКТР(A2)*EXP(-3)



X	p
0	0,049787
1	0,149361
2	0,224042
3	0,224042
4	0,168031
5	0,100819
6	0,050409
7	0,021604
8	0,008102
9	0,002701
10	0,00081

0,42319

Для распределения Пуассона MX=a, DX=a

Биномиальное распределение и распределение Пуассона связаны: распределение Пуассона является <u>предельным</u> для биномиального.

Если случайная величина X распределена по биномиальному закону, и число опытов n - велико, а вероятность события в каждом опыте p мала, то биномиальное распределение можно приближенно заменить пуассоновским при a=np:

$$p(X=k)\approx\frac{a^k}{k!}e^{-a} \quad \Rightarrow \quad a=n\cdot p$$

ПРИМЕР.

По цели производится 50 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.04. Используя предельное свойство биномиального распределения, найти вероятность того, что в цель попадет один снаряд.

Решение:

Событие *A* - попадание при одном выстреле.

Вероятность *p(A)=0.04*. Всего производится серия таких выстрелов: n=50.

Так как *p* достаточно мало, а *n* - велико, биномиальное распределение приближенно можно заменить распределением Пуассона.

Найдем параметр *a* распределения Пуассона:

$$a = n \cdot p = 50 \cdot 0.04 = 2$$

Тогда вероятность $p_{50}(1)$ того, что из 50-ти выстрелов будет одно попадание по формуле Пуассона будет:

$$p_{50}(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 0{,}271$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Проводится n независимых испытаний, в каждом из которых возможны 2 исхода: успех с вероятностью p и неудача с вероятностью 1-p. Испытания проводятся до первого успеха. Пусть X – число проведенных испытаний. Тогда X имеет геометрическое распределение.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

X принимает значения 1,2,3…,k,…

$$p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

Можно показать, что :

$$MX = \frac{1}{p}$$

$$DX = \frac{1-p}{p^2}$$

ПРИМЕР.

Игральная кость бросается до первого появления шестерки. X- число сделанных бросков. Найти распределение X, MX, DX

Решение.

=(5/6)^(A2-1)*1/6

X	p
1	1/6
2	5/36
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	20/743
12	19/847
13	2/107