

*Некоторые
применения теоремы Пифагора*



Автор Янченко Т.Л.

Август 12, 2004

Теорема Пифагора и подобие фигур

Ниже будем использовать следующие обозначения:

- катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника
- ABC соответственно a, b и c ;
- $\sin A = a / c, \sin B = b / c$;
- фигуры 1, 2, 3, их длины, площади и их объемы
- соответственно $F_1, F_2, F_3; L_1, L_2, L_3; S_1, S_2, S_3$ и V_1, V_2, V_3 .

Теорема Пифагора и подобие фигур для n - мерного пространства

- Будем считать F_1 подобной F_2 в n - мерном пространстве
- коэффициентом подобия k , если есть величины W_1 и W_2
- соответственно такие, что $W_1/W_2 = k^n$.
- **T1.** Если F_1 подобна F_3 , где $k = \sqrt[n]{a^2/c^2}$, F_2 подобна F_3 , где $k = \sqrt[n]{b^2/c^2}$, и $W_1 + W_2 = W_3$, то a, b и c - стороны прямоугольного треугольника.
- **T2.** Если F_1 подобна F_3 , где $k = \sqrt[n]{a^2/c^2}$, F_2 подобна F_3 , где $k = \sqrt[n]{b^2/c^2}$, и a, b и c - стороны прямоугольного треугольника, то $W_1 + W_2 = W_3$.

Теорема 1 и теорема 2 для двумерного пространства

- **T1.** Если F_1 подобна F_3 , где $k=a/c=\sin A$, F_2 подобна F_3 , где $k=b/c=\sin B$, и $S_1+S_2=S_3$, то a, b и c - стороны прямоугольного треугольника.

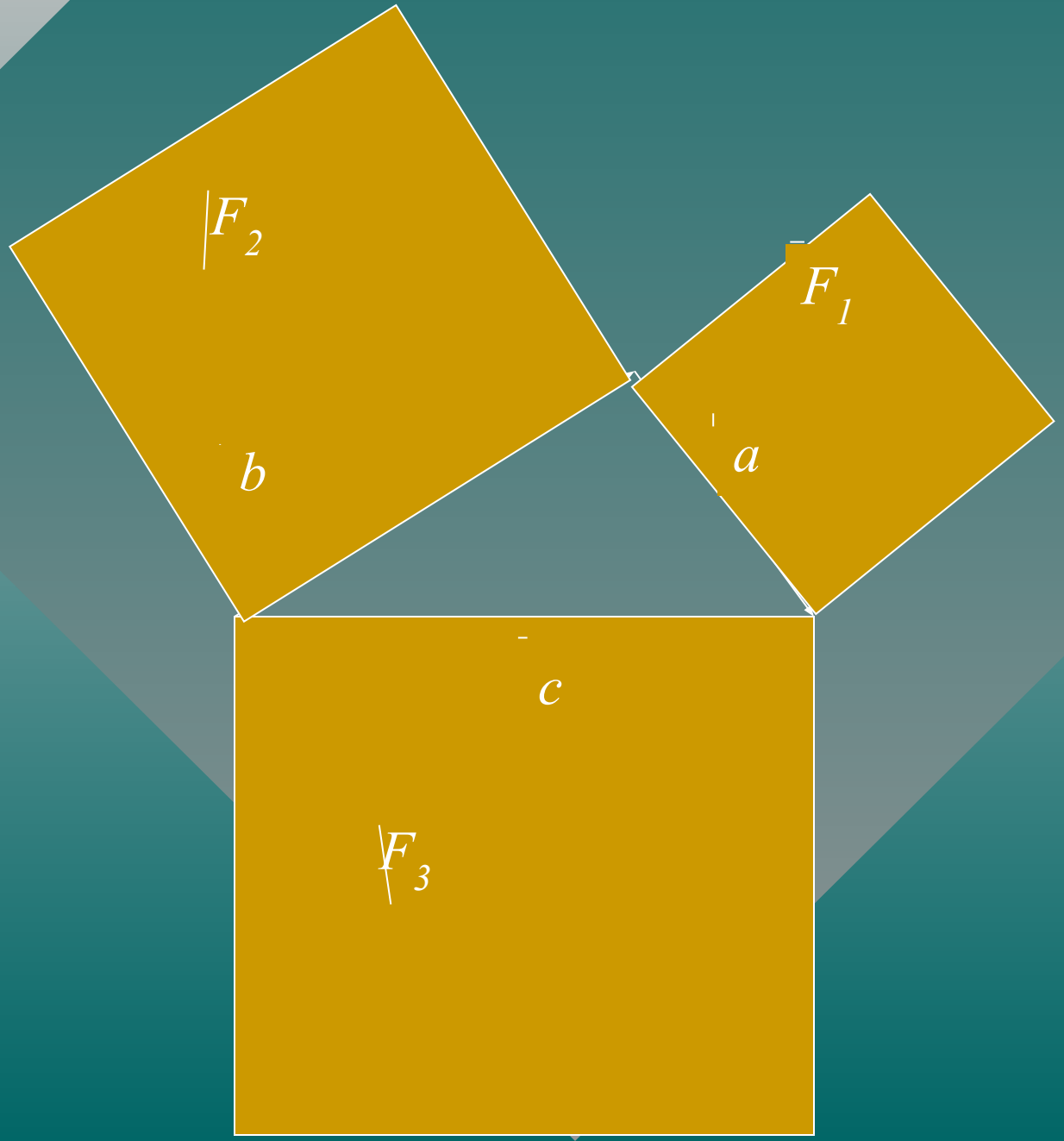
T2. Если F_1 подобна F_3 , где $k=a/c=\sin A$, F_2 подобна F_3 , где $k=b/c=\sin B$, причем a, b и c - стороны прямоугольного треугольника, то $S_1+S_2=S_3$.

$$k_1 = a/c$$
$$k_2 = b/c$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$S_1 + S_2 = S_3$$



Доказательство Т 1

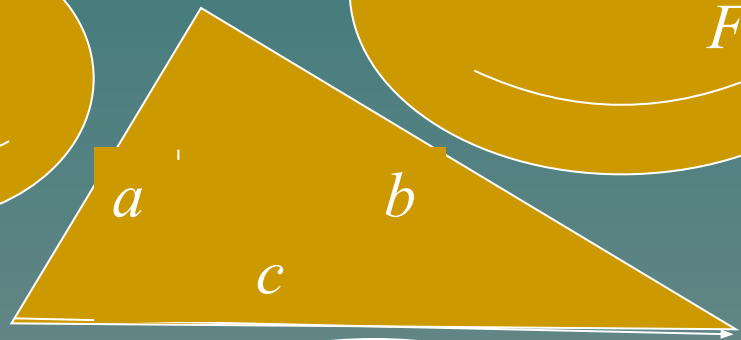
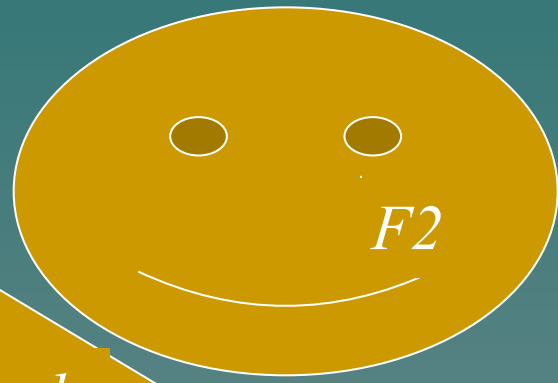
- Из подобия фигур следует равенство :
- $S_1 + S_2 = S_3 (a^2 + b^2) / c^2$ (см. доказательство Т2).
- По условию $S_1 + S_2 = S_3$, следовательно
- $(a^2 + b^2) / c^2 = 1$, откуда $a^2 + b^2 = c^2$. Тогда по
- обратной теореме Пифагора имеем : a , b и c
- есть стороны прямоугольного треугольника.
- Теорема доказана.

Доказательство


T2

- Из подобия фигур, отношение площадей
- которых равно квадрату коэффициента
- подобия, следует : $S_1 = (a^2/c^2)S_3$, $S_2 = (b^2/c^2)S_3$.
- Тогда $S_1 + S_2 = (a^2/c^2) S_3 + (b^2/c^2)S_3 =$
- $= (a^2/c^2 + b^2/c^2)S_3 = S_3(a^2 + b^2)/c^2 = S_3$, так как по
- теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$.
- Итак , имеем $S_1 + S_2 = S_3$. Теорема доказана.

Понимание радиуса k_1 и k_2



$$k_1 = a/c$$
$$k_2 = b/c$$

$$S_1 + S_2 = S_3$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Теорема 3 и теорема 4 для трехмерного пространства

- **Т3.** Если F_1 подобна F_3 , где $k = \sqrt[3]{V_1/V_3} = (a/c)^2$, F_2 подобна F_3 , где $k = \sqrt[3]{V_2/V_3} = (b/c)^2$, и $V_1 + V_2 = V_3$, то a, b и c - стороны прямоугольного треугольника.
- **Т4.** Если F_1 подобна F_2 , где $k = \sqrt[3]{V_1/V_2} = (a/c)^2$, F_2 подобна F_3 , где $k = \sqrt[3]{V_2/V_3} = (b/c)^2$, причем a, b и c - стороны прямоугольного треугольника, то верно $V_1 + V_2 = V_3$.
-

Доказательство Т3 и Т4

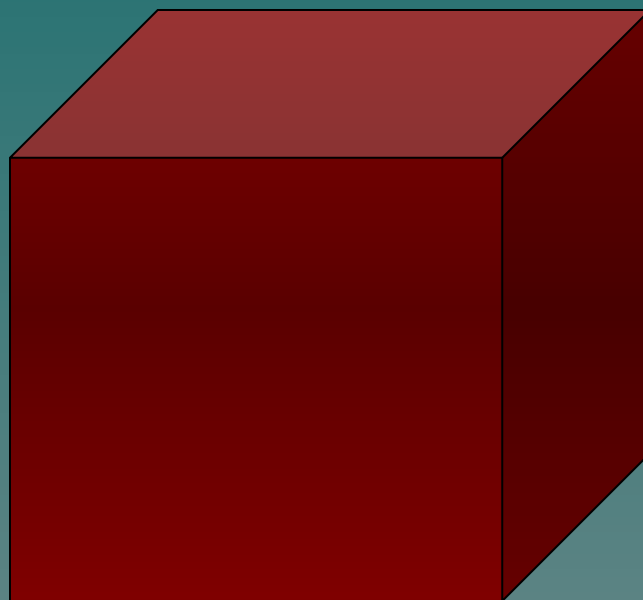
Отношение объемов подобных фигур равно кубу коэффициента подобия, поэтому $V_1 = (a^2/c^2)V_3$ и $V_2 = (b^2/c^2)V_3$, откуда $V_1 + V_2 = V_3(a^2 + b^2)/c^2$. (1)

Т3. По условию $V_1 + V_2 = V_3$, тогда из равенства (1) следует $a^2 + b^2 = c^2$ и то, что a, b и c - стороны прямоугольного треугольника.

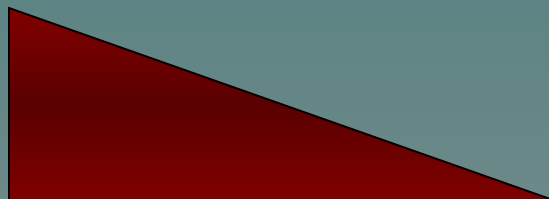
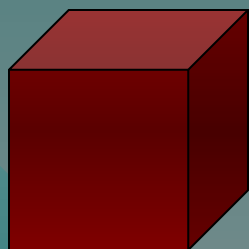
Т4. По условию a, b и c - стороны прямоугольного треугольника, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$, тогда из равенства (1) следует, что $V_1 + V_2 = V_3$. Теоремы доказаны.



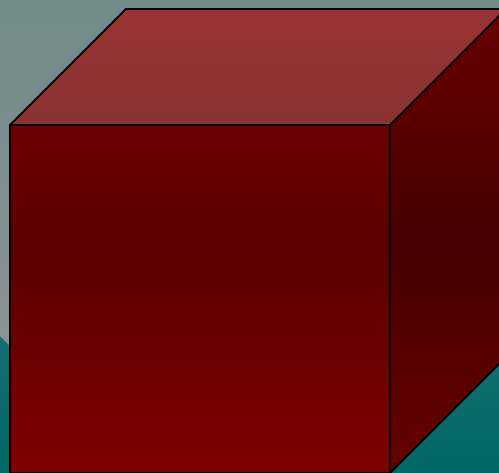
3



1



2



$$k_1 = {}^3V \cdot (a/c)^2$$
$$k_2 = {}^3V \cdot (b/c)^2$$

$$V_1 + V_2 = V_3$$

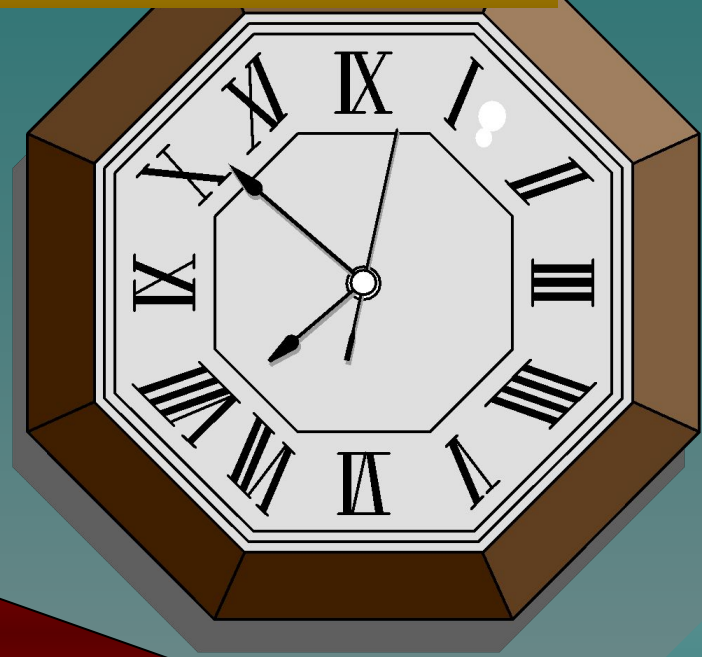
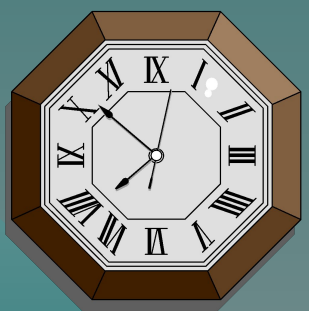


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Иллюстрация к теоремам 3 и 4



1



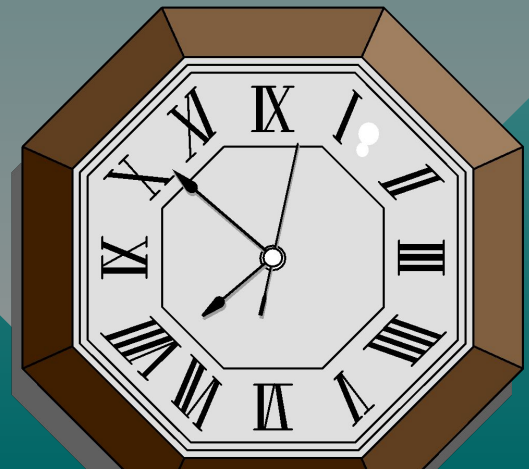
$$k_1 = \sqrt{1 - (a/c)^2}$$
$$k_2 = \sqrt{1 - (b/c)^2}$$

$$V_1 + V_2 = V_3$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$

2



Теоремы 5 и 6 для одномерного пространства

- **Т5.** Если F_1 подобна F_3 , где $k=a^2/c^2$, F_2 подобна F_3 ,
- где $k=b^2/c^2$, и $L_1+L_2=L_3$, то a, b и c - стороны
- прямоугольного треугольника .
- **Т6.** Если F_1 подобна F_3 , где $k=a^2/c^2$, F_2 подобна F_3 ,
- где $k=b^2/c^2$, и a, b и c - стороны прямоугольного
- треугольника , то $L_1+L_2=L_3$.

Иллюстрация для одномерного пространства

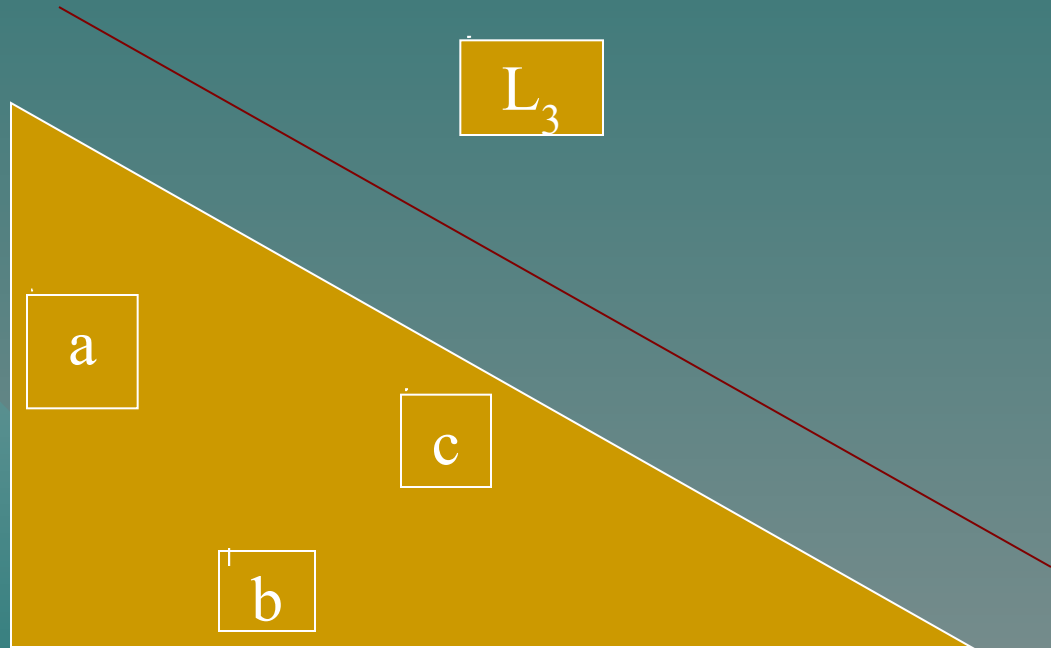
$$\overline{k_1 = a^2/c^2}$$
$$\overline{k_2 = b^2/c^2}$$

L_1

$$\overline{a^2 + b^2 = c^2}$$

\Leftrightarrow

$$\overline{L_1 + L_2 = L_3}$$



L_3

a

c

b

L_2