

Нелинейное программирование

Задача безусловной оптимизации

$$f(x) \rightarrow \min \quad x \in X, \quad X \in R^n$$

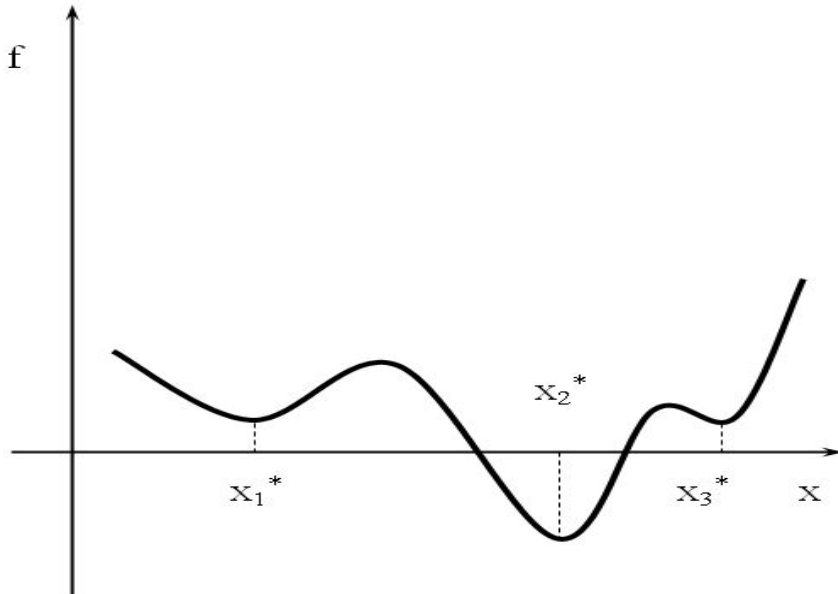
Минимум x^* :

1. Глобальный - $x^* \in X$

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ для всех } x \in X$$

2. Локальный - $x^* \in X$

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ для всех } x \in X \cap U_\varepsilon(x^*)$$
$$U_\varepsilon(x^*) = \{x \in R^n \mid \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$$



Условия оптимальности

1. Необходимое условие минимума

а) функция одной переменной

$$f'(x^*) = 0$$

б) функция многих переменных

$$\text{градиент } f'(\bar{x}^*) = \left(\frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_n} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad i = \overline{1, n} \quad \bar{x}^* - \text{стационарная точка}$$

2. Достаточное условие минимума

а) функция одной переменной

$$f''(x^*) > 0$$

б) функция многих переменных

$$\text{гессиян } G_{ij} = \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = \overline{1, n} \quad G_{ii} = \frac{\partial^2 f(\bar{x}^*)}{\partial x_i^2} > 0$$

Одномерная задача безусловной оптимизации

Существование решения – теорема Вейерштрасса:

целевая функция $f(x)$ непрерывна на множестве $\sigma \quad ([a, b])$ - x_1 и x_2 такие

$$f(x) \geq f(x_1) \quad - \quad x_1 \text{ МИНИМУМ}$$

$$f(x) \leq f(x_2) \quad - \quad x_2 \text{ МАКСИМУМ}$$

Классический подход: $f(x)$ кусочно-непрерывна и кусочно-гладкая для $x \in \sigma$

МИНИМУМ в $x \in \sigma$:

а) $f'(x) = 0$

б) $f'(x)$ - не существует

в) $f(x)$ терпит разрыв

г) x^* - граничная для σ ($x^* = a$ и $x^* = b$)

Численные методы – **оптимальные** – получение решения задачи минимизации ЦФ с требуемой точностью при вычислении только значений функции $f(x_i)$ в меньшем количестве промежуточных точек x_i

Общая схема численных методов

1. специально подобранные n точек x_1, x_2, \dots, x_n $x_i \in [a, b]$

расчет $f(x_i)$ $i = \overline{1, n}$

2. выбор \bar{x}_n из условия $f(\bar{x}_n) = \min_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$

3. определение из значений $a, b, x_1, x_2, \dots, x_n$

$a_n \leftarrow \bar{x}_n \rightarrow b_n$
ближайшая
слева справа

4. x^* - это $x_n^* \in [a_n, b_n]$

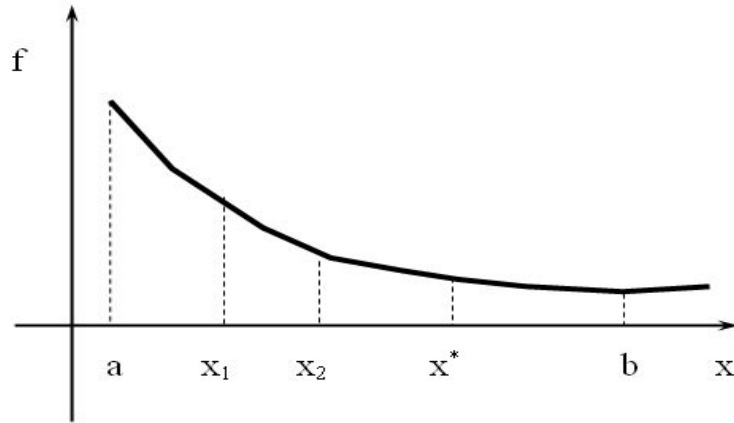
а) $x_n^* = \bar{x}_n$

б) $x_n^* = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

$x^* \in [a_n, b_n]$ - для унимодальных функций

Унимодальные функции

$f(x)$ $x \in \sigma$ $([a, b])$ существует $x^* \in \sigma$



Лемма: $f(x)$ унимодальная на σ

$$x_1, x_2 \in \sigma \quad x_1 < x_2$$

$$\text{а) } f(x_1) \leq f(x_2) \quad x^* \leq x_2 \quad x^* \in [a, x_2]$$

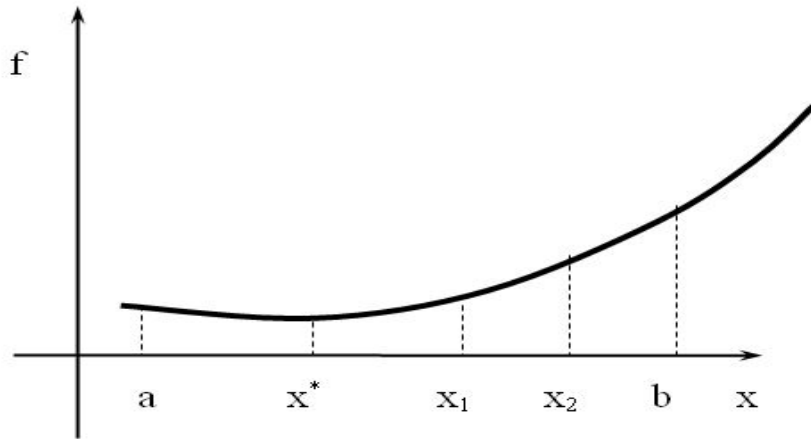
$$\text{б) } f(x_1) \geq f(x_2) \quad x^* \geq x_1 \quad x^* \in [x_1, b]$$

$f(x_1) > f(x_2)$ $x_1 < x_2 < x^*$ $x_1, x_2 \in \sigma$
 $[a, x^*]$ - $f(x)$ убывает

Интервал неопределенности (локализации) x^*

$\Delta_n(f)$ - длина интервала локализации x^* после вычисления значений $f(x)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$

Оптимальный поиск – способ построения последовательности x_1, x_2, \dots, x_n , при которой $\Delta_n(f) \rightarrow \min$



$f(x_1) < f(x_2)$ $x^* < x_1 < x_2$ $x_1, x_2 \in \sigma$
 $[x^*, b]$ - $f(x)$ возрастает.

Способ построения последовательности

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Пассивный поиск

Метод перебора

а) $f(x)$ - не унимодальная

n - число участков разбиения

$$h = \frac{b-a}{n} \quad x_k = a + kh \quad k = \overline{0, n}$$

$$y_k = f(x_k)$$

$$m_n = \min_{0 \leq k \leq n} y_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n \rightarrow \min \rightarrow \text{выбор } n?$$

оценка погрешности?

б) $f(x)$ - унимодальная

$$y_i^* = \min_{0 \leq k \leq n} y_k \quad x^* \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

если $|x_{i+1} - x_{i-1}| > \varepsilon$, новое разбиение $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

Последовательный поиск

1. метод дихотомии

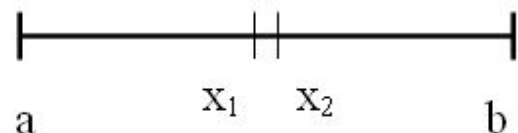
2. метод золотого сечения

3. метод чисел Фибоначчи

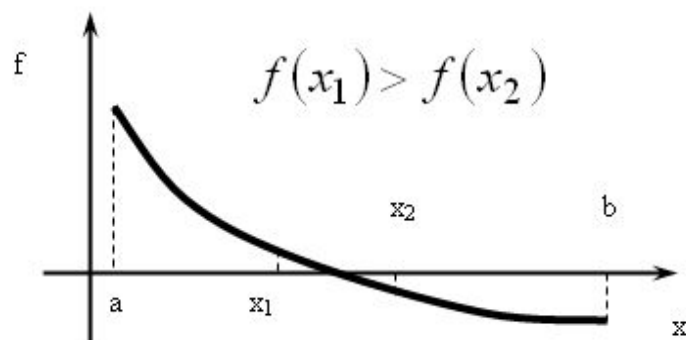
Отличие методов – выбор узлов x_i для сужения интервала локализации

Метод дихотомии

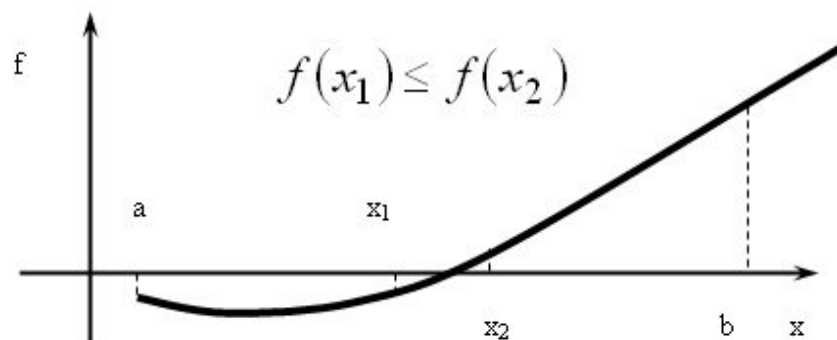
параметр метода $\varepsilon = const \quad 0 < \varepsilon < (b - a)$



$$x_1 = \frac{a + b - \varepsilon}{2} \quad x_2 = \frac{a + b + \varepsilon}{2} = a + b - x_1$$



$$[a, b] \rightarrow [x_1, b] = [a_1, b_1]$$



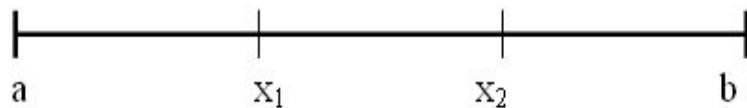
$$[a, b] \rightarrow [a, x_2] = [a_1, b_1]$$

$$x^* \in [a_1, b_1] \quad b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{b - a - \varepsilon}{2} + \varepsilon$$

шаг l : $[a_l, b_l] \quad b_l - a_l = \frac{b - a - \varepsilon}{2^l} + \varepsilon \quad (b_l - a_l) \leq \delta \quad \delta > \varepsilon \quad l \geq \log_2 \left(\frac{b - a - \varepsilon}{\delta - \varepsilon} \right)$

погрешность вычисления минимума $\delta_{МД}^* \leq |b_l - a_l| = (b - a - \varepsilon) / 2^l + \varepsilon \quad l = n/2$

Метод золотого сечения



$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a} = 1,618 \quad \frac{b-a}{x_2-a} = \frac{x_2-a}{b-x_2} = 1,618 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a) = a + 0,382(b-a) \quad x_2 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a) = a + 0,618(b-a) = a + b - x_1$$

x_1 - золотое сечение $[a, b]$ и $[a, x_2]$ x_2 - золотое сечение $[a, b]$ и $[x_1, b]$

Шаг 1. $a = a_1$ $b = b_1$ расчет x_1 и x_2 $f(x_1)$ и $f(x_2) \rightarrow [a_2, b_2] \Leftrightarrow \begin{cases} [a_1, x_2] \\ [x_1, b_1] \end{cases}$

$$b_2 - a_2 = x_2 - a = b - x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a) \quad \bar{x}_2 \in [a_2, b_2] \quad f(\bar{x}_2) = \min_{1 \leq i \leq 2} f(x_i)$$

\bar{x}_2 - золотое сечение $[a_2, b_2]$

Шаг 2. $x_3 = a_2 + b_2 - \bar{x}_2$ расчет $f(x_3) \rightarrow [a_3, b_3]$ $b_3 - a_3 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 (b-a)$
 $\bar{x}_3 \in [a_3, b_3]$ $f(\bar{x}_3) = \min_{1 \leq i \leq 3} f(x_i)$ \bar{x}_3 - золотое сечение $[a_3, b_3]$

Метод золотого сечения (продолжение)

Шаг $(n-1)$. \bar{x}_{n-1} - золотое сечение $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ $f(\bar{x}_{n-1}) = \min_{1 \leq i \leq (n-1)} f(x_i)$

расчет $x_n = a_{n-1} + b_{n-1} - \bar{x}_{n-1}$ и $f(x_n) \rightarrow [a_n, b_n]$

$$b_n - a_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n-1} (b-a)$$

$$\bar{x}_n \in [a_n, b_n] \quad f(\bar{x}_n) = \min_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$$

\bar{x}_n - золотое сечение $[a_n, b_n]$

$$\bar{x}_n = a_n + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_n - a_n) \quad \text{ИЛИ} \quad \bar{x}_n = a_n + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_n - a_n)$$

$$\delta_{MЗС}^* \leq \max \left\{ \begin{array}{l} |\bar{x}_n - a_n| \\ |b_n - \bar{x}_n| \end{array} \right\} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n (b-a)$$

Сравнение МД ($\varepsilon \rightarrow 0$) и МЗС - одинаково n (количество вычислений $f(x_i)$ $i = \overline{1, n}$)

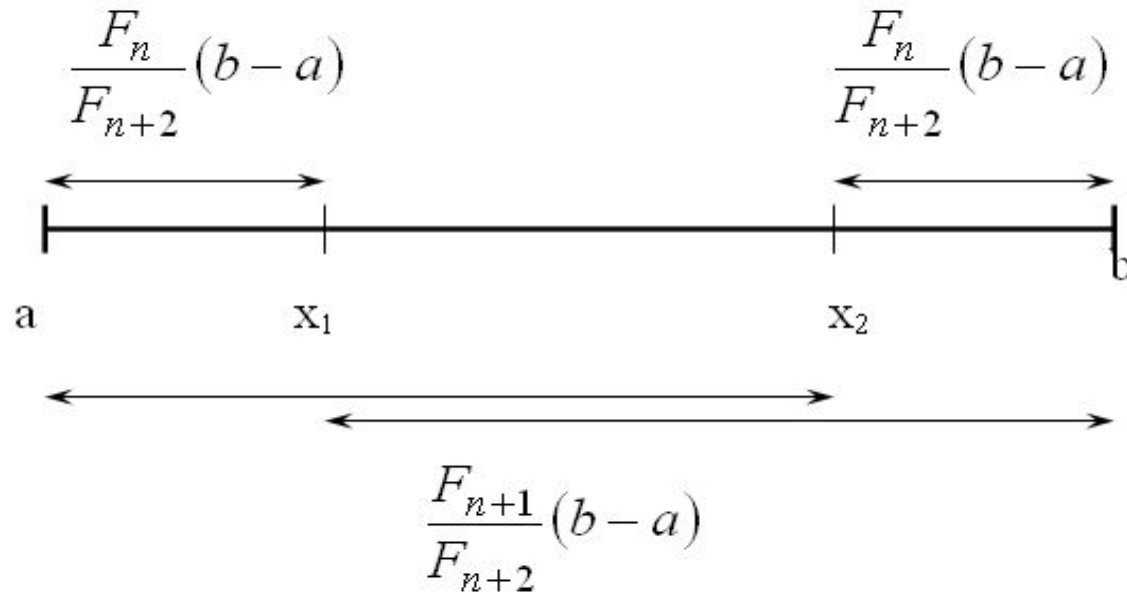
$$\frac{\delta_{MЗС}^*}{\delta_{MД}^*} = \left(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n (b-a) \right) / \frac{b-a}{2^n} = \left\{ l = \frac{n}{2} \right\} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{5}-1) \right)^n \approx (0,874)^n$$

Метод чисел Фибоначчи

$$F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad n = 1, 2, \dots$$

Рекуррентная формула

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$



Пусть $n \geq 2$ (n - количество вычислений значений функции $f(x)$)

$$a_1 = a \quad b_1 = b$$

Метод чисел Фибоначчи (продолжение)

Шаг 1. расчет $x_1 = a + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b-a)$ и $x_2 = a + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b-a) = a + b - x_1$

$$f(x_1) \quad \text{и} \quad f(x_2) \rightarrow [a_2, b_2] \Leftrightarrow \begin{cases} [a, x_2] \\ [x_1, b] \end{cases}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b-a) \quad \bar{x}_2 \in [a_2, b_2] \quad f(\bar{x}_2) = \min_{1 \leq i \leq 2} f(x_i)$$

$$\bar{x}_2 = x'_2 = a_2 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b-a) = a_2 + \frac{F_n}{F_{n+1}}(b_2 - a_2)$$

или

$$\bar{x}_2 = x''_2 = a_2 + \frac{F_{n-1}}{F_{n+2}}(b-a) = a_2 + \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}(b_2 - a_2)$$

Метод чисел Фибоначчи (продолжение)

Шаг 2. расчет $x_3 = a_2 + b_2 - \bar{x}_2$ и $f(x_3) \rightarrow [a_3, b_3]$

$$b_3 - a_3 = \frac{F_n}{F_{n+1}}(b_2 - a_2) = \frac{F_n}{F_{n+2}}(b - a) \quad \bar{x}_3 \in [a_3, b_3] \quad f(\bar{x}_3) = \min_{1 \leq i \leq 3} f(x_i)$$

$$\bar{x}_3 = x'_3 = a_3 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_3 - a_3) = a_3 + \frac{F_{n-1}}{F_{n+2}}(b - a)$$

или

$$\bar{x}_3 = x''_3 = a_3 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_3 - a_3) = a_3 + \frac{F_{n-2}}{F_{n+2}}(b - a)$$

Шаг $(n-1)$ расчет $x_n = a_{n-1} + b_{n-1} - \bar{x}_{n-1}$ и $f(x_n) \rightarrow [a_n, b_n]$

$$b_n - a_n = \frac{F_3}{F_4}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{F_3}{F_{n+2}}(b - a) \quad \bar{x}_n \in [a_n, b_n] \quad f(\bar{x}_n) = \min_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$$

$$\bar{x}_n = x'_n = a_n + \frac{F_1}{F_3}(b_n - a_n) = a_n + \frac{F_1}{F_{n+2}}(b - a)$$

или

$$\bar{x}_n = x''_n = a_n + \frac{F_2}{F_3}(b_n - a_n) = a_n + \frac{F_2}{F_{n+2}}(b - a)$$

Метод чисел Фибоначчи (продолжение)

Погрешность вычисления минимума

$$\delta_{MЧФ}^* = \max \left\{ \begin{array}{l} |\bar{x}_n - a_n| \\ |b_n - \bar{x}_n| \end{array} \right\} = \frac{F_2}{F_{n+2}}(b-a) = \frac{F_1}{F_{n+2}}(b-a) = \frac{b-a}{F_{n+2}}$$

Сравнение МЧФ и МЗС ($n \rightarrow \infty$) $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$

$$\frac{\delta_{MЗС}^*}{\delta_{MЧФ}^*} = \frac{(b-a) \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n}{\frac{b-a}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2}}} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{5}} = 1,1708$$

Сравнение интервальных методов

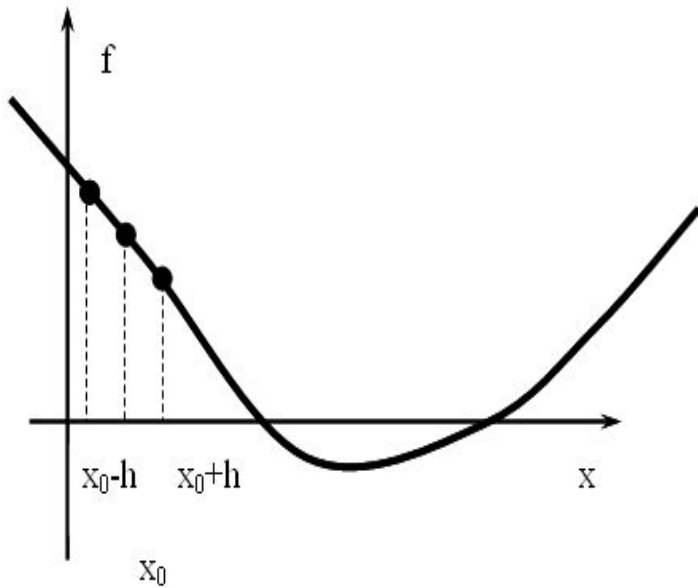
МД: 1. простой в реализации 2. применим для поиска минимума разрывной функции
3. большой объем вычислений для обеспечения заданной точности δ

МЗС: 1. предел для чисел Фибоначчи $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n / F_{n+1} = (\sqrt{5}-1)/2$

2. расположение x_i не зависит от n

МЧФ: оптимальный метод – при том же n наименьший интервал локализации x^*

Метод последовательного перебора



Дано: x_0 h ε

x_0 и $x_0 + h$

а) $f(x_0) < f(x_0 + h) \rightarrow h = -h \quad x_0 + h$

б) $f(x_0 - h) = f(x_0) = f(x_0 + h) \rightarrow h = h/4$
при $|h| \leq \varepsilon \quad x_{\min} = x_0$

в) $f(x_0) > f(x_0 + h) \rightarrow$ спуск до
 $f(x_0 + kh) > f(x_0 + (k-1)h)$

$$x_{\min} \in [x_0 + (k-2)h, x_0 + kh]$$

при $|h| \leq \varepsilon \quad x_{\min} = x_0 + (k-1)h$

при $|h| > \varepsilon \quad h = -h/4$ - повторение
процедуры спуска
от $x_0 + kh$

Скорость сходимости зависит от:

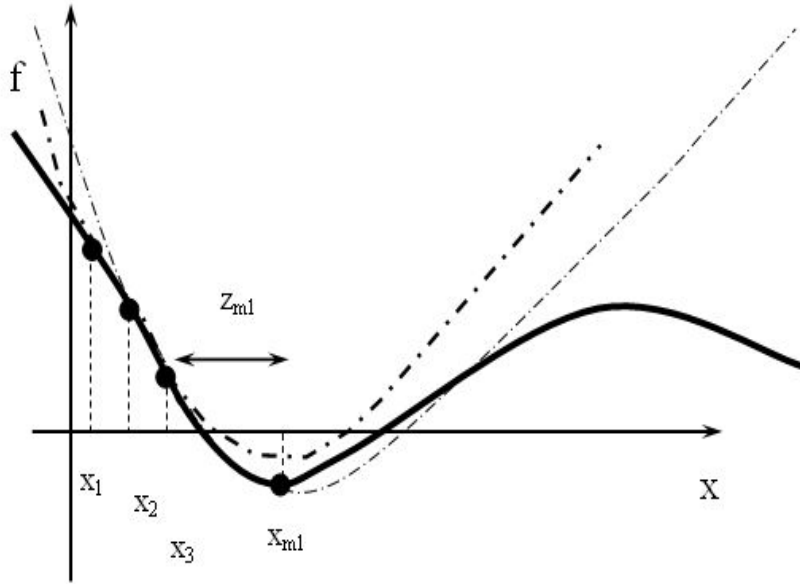
1. x_0
2. h

Для ускорения спуска – локальные свойства
функции вблизи x_0

а) $f'(x_0)$ - скорость и направление убывания функции

б) $f''(x_0)$ - направление выпуклости функции

Метод квадратичной параболы (Пауэлла)



Вблизи локального минимума

$$\begin{cases} f'(x^*) = 0 \\ f''(x^*) > 0 \end{cases}$$

Аппроксимация квадратичной параболой

Заданы: x_0 h ε

I) выбор начальных приближений

$$x_1 = x_0$$

$$f(x_0) > f(x_0 + h) \quad x_2 = x_0 + h$$

$$x_3 = x_0 + 2h$$

$$x_1 = x_0 - h$$

$$f(x_0) < f(x_0 + h) \quad x_2 = x_0$$

$$x_3 = x_0 + h$$

расчет $y_1 = f(x_1)$ $y_2 = f(x_2)$ $y_3 = f(x_3)$

II) Построение квадратичной параболы

$$\varphi(x - x_3) = a(x - x_3)^2 + b(x - x_3) + c = az^2 + bz + c$$

$$z = x - x_3 \quad z_1 = x_1 - x_3 \quad z_2 = x_2 - x_3$$

$$\text{Система уравнений} \begin{cases} y_3 = c \\ y_2 = az_2^2 + bz_2 + c \\ y_1 = az_1^2 + bz_1 + c \end{cases}$$

$$a = \frac{(y_1 - y_3)z_2 - (y_2 - y_3)z_1}{z_1 z_2 (z_1 - z_2)}$$

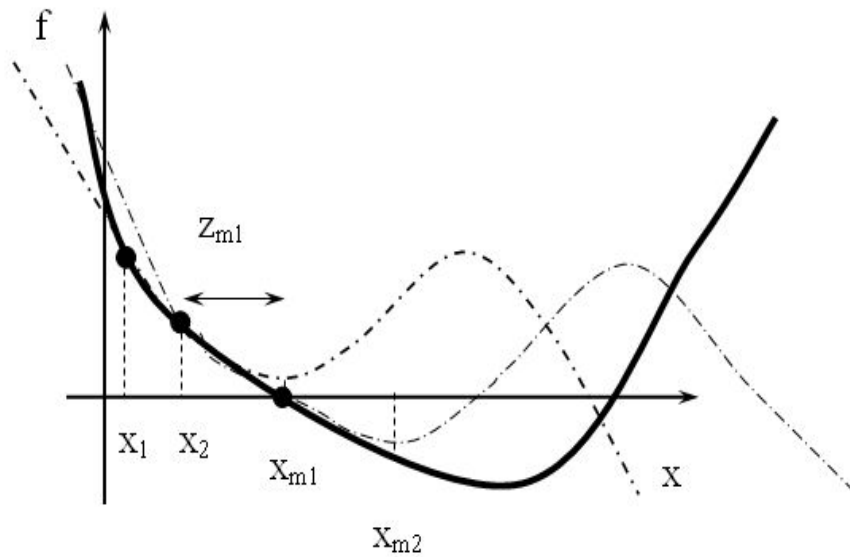
$$b = \frac{(y_1 - y_3)z_2^2 - (y_2 - y_3)z_1^2}{z_1 z_2 (z_2 - z_1)}$$

При $a > 0$ $\min \varphi(x - x_3)$ $z_{ml} = -b/2a$ $x_{ml} = x_3 + z_{ml}$

1. при $|z_{ml}| < \varepsilon \rightarrow x_{\min} = x_{ml}$ 2. при $|z_{ml}| > \varepsilon \rightarrow$

$$x_1 = x_2 \quad x_2 = x_3 \quad x_3 = x_{ml} \rightarrow \text{II)}$$

Метод кубической параболы (Давидона)



$$z = x - x_2 \quad z_1 = x_1 - x_2 \quad \text{проверка условия } \frac{D_2 - D_1}{h} > 0$$

Система уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x_1) = y_1 \\ \varphi(x_2) = y_2 \\ \varphi'(x_1) = D_1 \\ \varphi'(x_2) = D_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} az_1^3 + bz_1^2 + cz_1 + d = y_1 \\ d = y_2 \\ 3az_1^2 + 2bz_1 + c = D_1 \\ c = D_2 \end{cases}$$

$$a = \frac{D_1 - D_2 - 2(y_1 - y_2 - D_2 z_1)/z_1}{z_1^2}$$

$$b = \frac{D_2 - D_1 - 3(y_1 - y_2 - D_2 z_1)/z_1}{z_1}$$

Минимум кубической параболы $\varphi'(z) = 0$

$$3az^2 + 2bz + c = 0 \rightarrow z_{m1} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$$

$$x_{m1} = x_2 + z_{m1} \quad 1. \text{ при } |z_{m1}| < \varepsilon \rightarrow x_{\min} = x_{m1}$$

$$2. \text{ при } |z_{m1}| > \varepsilon \rightarrow x_1 = x_2 \quad x_2 = x_3 \quad x_3 = x_{m1} \rightarrow \text{II}$$

при $b^2 - 3ac < 0$ - точка перегиба $z_{m1} = -b/3a$

I) Выбор начальных приближений

$$x_1 = x_0 \quad x_2 = \begin{cases} x_0 + h & (f(x_0 + h) < f(x_0)) \\ x_0 - h & (f(x_0 - h) < f(x_0)) \end{cases}$$

$$\text{расчет} \quad y_1 = f(x_1) \quad y_2 = f(x_2) \\ D_1 = f'(x_1) \quad D_2 = f'(x_2)$$

II) Построение кубической параболы

$$\varphi(x - x_2) = a(x - x_2)^3 + b(x - x_2)^2 + c(x - x_2) + d = \\ = az^3 + bz^2 + cz + d$$