

Лекция № 4

**на тему: *Нелинейные модели
регрессии. Модели
распределенным лагом***

1. Нелинейные модели регрессии

Во многих практических случаях моделирование экономических зависимостей линейными уравнениями дает вполне удовлетворительный результат и может использоваться для анализа и прогнозирования. Однако в силу многообразия и сложности экономических процессов ограничиться рассмотрением лишь линейных регрессионных моделей невозможно.

Многие экономические зависимости не являются линейными по своей сути, и поэтому их моделирование линейными функциями, безусловно, не даст положительного результата. Так, например, нелинейными являются производственные функции (зависимости между объемом произведенной продукции и основными факторами производства - трудом, капиталом и т.п.), функции спроса (зависимость между спросом на товары или услуги и их ценами или доходом) и др.

Различают два класса нелинейных регрессий:

1) регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам.

К таким функциям относятся квазилинейные функции.

Например, это полиномы различных степеней

$$y = a + bx + cx^2 + \varepsilon,$$

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \varepsilon$$

Равносторонняя гиперболола

$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$$

2) регрессии нелинейные по оцениваемым параметрам. К таким регрессиям относятся нелинейные функции второго класса.

Например, степенная функция

$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$$

Показательная

$$y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$$

Экспоненциальная

$$y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon.$$

Нелинейная регрессия по включенным переменным не таит каких-либо сложностей в оценке ее параметров.

Она определяется, как и в линейной регрессии, методом наименьших квадратов, так как эти функции линейны по параметрам.

Так, например, в полиноме второй степени

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \varepsilon$$

заменяя $x = x_1$, $x^2 = x_2$, получим двухфакторное уравнение линейной регрессии: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \varepsilon$.

Применив метод наименьших квадратов для оценки коэффициентов исходного полинома второй степени, получим следующую систему нормальных уравнений:

*

$$\begin{cases} \sum y = na_0 + b \sum x + c \sum x^2 \\ \sum yx = a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 \\ \sum yx^2 = a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 \end{cases}$$

Ее решение можно найти методом Крамера.

Среди класса нелинейных функций, параметры которых легко оцениваются с помощью МНК, следует назвать хорошо известную в эконометрике равностороннюю гиперболу:

$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon.$$

Она может быть использована для характеристики связи удельных расходов сырья, материалов, топлива с объемом выпускаемой продукции, времени обращения товаров от величины товарооборота.

Заменяя в уравнении равнобочной гиперболы $1/x$ на z , получим уравнение линейной регрессии $y = a + bz + e$, оценка параметров которого может быть дана с помощью МНК.

Система нормальных уравнений для этого случая примет вид:

$$\begin{cases} \sum y = na + b \sum \frac{1}{x}, \\ \sum \frac{y}{x} = a \sum \frac{1}{x} + b \sum \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

10

Модели вида

$$\ln Y = a + bx + \varepsilon,$$

$$y = a + b \ln x + \varepsilon$$

называются полулогарифмическими моделями. Эти модели также относятся к нелинейным моделям относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейным по параметрам.

Система нормальных уравнений, например, для второй модели будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum y = na + b \sum \ln x , \\ \sum y \ln x = a \sum \ln x + b \sum (\ln x)^2 . \end{cases}$$

Возможны и другие модели, нелинейные относительно объясняющих переменных.

Например,

$$y = a + b\sqrt{x} + \varepsilon .$$

В этом случае система нормальных уравнений для оценки параметров примет вид:

$$\begin{cases} \sum y = na + b \sum \sqrt{x} , \\ \sum y \cdot \sqrt{x} = a \sum \sqrt{x} + b \sum (\sqrt{x})^2 . \end{cases}$$

Иначе обстоит дело с регрессией, *нелинейной по оцениваемым параметрам.* Данный класс нелинейных моделей подразделяется на два типа: **нелинейные модели внутренне линейные и нелинейные модели внутренне нелинейные.**

Если нелинейная модель внутренне линейна, то она с помощью соответствующих преобразований может быть приведена к линейному виду. Например, в экономических исследованиях при изучении эластичности спроса от цен широко используется степенная функция

$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$$

**где y – спрашиваемое количество;
 x – цена;
 ε – случайная ошибка.**

Данная модель нелинейна относительно оцениваемых параметров, так как включает параметры a и b неаддитивно. Однако ее можно считать внутренне линейной, так как логарифмирование данного уравнения, например, по основанию e приводит его к виду

$$\ln y = \ln a + b \ln x + \ln \varepsilon .$$

Оценка параметров a и b в полученном уравнении может быть произведена с помощью МНК. При этом решается система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum \ln y = n \ln a + b \sum \ln x , \\ \sum \ln y \cdot \ln x = \ln a \sum \ln x + b \sum (\ln x)^2 . \end{cases}$$

Параметр b определяется непосредственно из системы, а параметр a – косвенным путем после потенцирования величины $\ln a$.

Наибольшее распространение степенной функции в эконометрике связано с тем, что параметр b имеет четкое экономическое истолкование, – он является коэффициентом эластичности. Это значит, что коэффициент b показывает, на сколько % в среднем изменится результат, если фактор изменится на 1%.

Для степенной функции коэффициент эластичности будет рассчитываться следующим образом

$$\mathcal{E} = f'(x) \frac{x}{y} = a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot \frac{x}{ax^b} = b$$

При $b < 0$ характеризуется эластичность спроса, а при $b > 0$ – предложения.

В других функциях коэффициент эластичности зависит от значений фактора x . В силу этого для них обычно рассчитывается средний показатель эластичности

$$\tilde{\varepsilon} = f'(\bar{x}) \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

Если же модель степенной регрессии представить в виде

$$y = ax^b + \varepsilon ,$$

то она становится внутренне нелинейной, так как ее невозможно превратить в линейный вид. В этом случае, то есть, если модель внутренне нелинейна по параметрам, используются итеративные процедуры, успешность которых зависит от вида уравнений и особенностей применяемого итеративного подхода.

Модели внутренне нелинейные по параметрам могут иметь место в эконометрических исследованиях, однако гораздо большее распространение получили модели, приводимые к линейному виду.

Среди них, в частности, можно назвать модель обратной зависимости вида

$$y = \frac{1}{a + bx + \varepsilon}.$$

Линеаризовать эту модель можно относительно переменной $\frac{1}{y}$.

Для этого нужно просто «перевернуть» дробь:

$$\frac{1}{y} = a + bx + \varepsilon .$$

Вводя новую переменную $Y = \frac{1}{y}$, получим линейное уравнение:

$$Y = a + bx + \varepsilon .$$

Так называемая логистическая функция также может быть приведена к линейному виду:

$$y = \frac{a}{1 + be^{-cx+\varepsilon}} .$$

Переходя к обратным величинам, получим:

$$\frac{a}{y} = 1 + be^{-cx+\varepsilon} .$$

Перенесем единицу в левую часть и прологарифмируем по основанию e , получим:

$$\ln b - cx + \varepsilon = \ln\left(\frac{a}{y} - 1\right)$$

или

$$z = B - cx + \varepsilon, \quad \text{где} \quad z = \ln\left(\frac{a}{y} - 1\right), \quad B = \ln b.$$

2. Модели с распределенным лагом.

Будем рассматривать динамические эконометрические модели.

Эконометрическая модель является динамической, если в данный момент времени t она учитывает значения входящих в нее переменных, относящиеся как к текущим, так и к предыдущим моментам времени, т.е. если эта модель отражает динамику исследуемых переменных в каждый момент времени.

- Будем рассматривать модели, в которых значения переменных за прошлые периоды времени (лаговые переменные) непосредственно включены в модель (присутствуют в явном виде). Это модели с распределенным лагом.

- Если значение результативного признака в текущий момент времени t формируется под воздействием ряда факторов, действовавших в прошлые моменты времени $t - 1, t - 2, \dots, t - l$, то величину l , характеризующую запаздывание в воздействии фактора на результат, называют **лагом**, а временные ряды самих факторных переменных, сдвинутые на один или более моментов времени, – **лаговыми переменными**.

- Разработка экономической политики как на макро-, так и на микроуровне требует решения обратного типа задач, т.е. задач, определяющих, какое воздействие окажут значения управляемых переменных текущего периода на будущие значения экономических показателей.

- Эконометрическое моделирование охарактеризованных выше процессов осуществляется с применением моделей, содержащих не только текущие, но и лаговые значения факторных переменных. Эти модели называются **моделями с распределенным лагом**.
- Например,
- $y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$ –
- модель с распределенным лагом.

- Наряду с лаговыми значениями независимых, или факторных, переменных на величину зависимой переменной текущего периода могут оказывать влияние ее значения в прошлые моменты или периоды времени. Эти процессы обычно описывают с помощью моделей регрессии, содержащих в качестве факторов лаговые значения зависимой переменной, которые называются **моделями авторегрессии**. Например, модель вида

$$\bullet y_t = a + b_0 x_t + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t -$$

- модель авторегрессии.

- Построение моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии имеет свою **специфику**. **Во-первых**, оценка параметров модели авторегрессии, а в большинстве случаев и моделей с распределенным лагом не может быть произведена с помощью обычного МНК ввиду нарушения его предпосылок и требует специальных статистических методов.

- **Во-вторых**, исследователям приходится решать проблемы выбора оптимальной величины лага и определения его структуры.
- Наконец, **в-третьих**, между моделями с распределенным лагом и моделями авторегрессии существует определенная взаимосвязь, и в некоторых случаях необходимо осуществлять переход от одного типа моделей к другому.

- **3. Лаги Алмон.** Рассмотрим общую модель с распределенным лагом, имеющую конечную максимальную величину лага l , которая описывается соотношением

- $$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \dots + b_p x_{t-p} + \varepsilon_t \quad (1)$$

- Эта модель говорит о том, что если в некоторый момент времени t происходит изменение независимой переменной x , то это изменение будет влиять на значения переменной y в течение l следующих моментов времени.

- Коэффициент регрессии b_0 при переменной x_t характеризует среднее абсолютное изменение y_t при изменении x_t на **1 ед.** своего измерения в некоторый фиксированный момент времени t без учета воздействий лаговых значений фактора x . Этот коэффициент называют ***краткосрочным мультипликатором.***

- В момент $(t + 1)$ совокупное воздействие факторной переменной x_t на результат y_t составит $(b_0 + b_1)$ усл. ед., в момент $(t + 2)$ это воздействие составит $(b_0 + b_1 + b_2)$ и т.д. Полученные таким образом суммы называют ***промежуточными мультипликаторами.***

- С учетом конечной величины лага можно сказать, что изменение переменной x_t в момент t на **1 усл. ед.** приведет к общему изменению результата через l моментов времени на $(b_0 + b_1 + \dots + b_l)$ абсолютных единиц.
- Величину
- $b = b_0 + b_1 + \dots + b_l$
- называют **долгосрочным мультипликатором.**

- Он показывает абсолютное изменение результата y в долгосрочном периоде
- $t + l$ под влиянием изменения фактора x на 1 ед.

- Предположим, что было установлено, что в исследуемой модели имеет место **полиномиальная** структура лага, т.е. зависимость коэффициентов регрессии b_i от величины лага описывается полиномом k -ой степени. Частным случаем полиномиальной структуры лага является линейная модель. **Лаги, структуру которых можно описать с помощью полиномов, называют лагами Алмон**, по имени Ш. Алмон, впервые обратившей внимание на такое представление лагов.

Формально модель зависимости коэффициентов b_j от величины лага j в форме полинома можно записать в следующем виде:

– для полинома **1-й** степени:

$$\bullet b_j = c_0 + c_1 j;$$

– для полинома **2-й** степени:

$$\bullet b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2;$$

– для полинома **3-й** степени:

$$\bullet b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + c_3 j^3 \text{ и т.д.}$$

В наиболее общем виде для полинома k -ой степени имеем:

$$b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + \dots + c_k j^k .$$

Тогда каждый из коэффициентов модели (1) можно выразить следующим образом:

- $b_0 = c_0;$
- $b_1 = c_0 + c_1 + \dots + c_k;$
- $b_2 = c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \dots + 2^k c_k;$
- $b_3 = c_0 + 3c_1 + 9c_2 + \dots + 3^k c_k;$

И т.д.

- $b_l = c_0 + l c_1 + l^2 c_2 + \dots + l^k c_k \quad (2)$

Подставив в (1) найденные соотношения для b_j , получим:

$$y_t = a + c_0 x_t + (c_0 + c_1 + \dots + c_k) x_{t-1} + (c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \dots + 2^k c_k) x_{t-2} + (c_0 + 3c_1 + 9c_2 + \dots + 3^k c_k) x_{t-3} + \dots + (c_0 + 1^k c_1 + 1^2 c_2 + \dots + 1^k c_k) x_{t-l} + \varepsilon_t. \quad (3)$$

Перегруппируем слагаемые в (3):

$$y_t = a + c_0(x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-l}) + c_1(x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + \dots + 1x_{t-l}) + c_2(x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + \dots + 1^2 x_{t-l}) + \dots + c_k(x_{t-1} + 2^k x_{t-2} + 3^k x_{t-3} + \dots + 1^k x_{t-l}) + \varepsilon_t. \quad (4)$$

Обозначим слагаемые в скобках при c_i как новые переменные:

$$z_0 = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-l} = \sum_{j=0}^l x_{t-j};$$

$$z_1 = x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + \dots + lx_{t-l} = \sum_{j=1}^l jx_{t-j};$$

$$z_2 = x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + \dots + l^2x_{t-l} = \sum_{j=1}^l j^2x_{t-j};$$

(5)

$$\dots$$

$$z_k = x_{t-1} + 2^kx_{t-2} + 3^kx_{t-3} + \dots + l^kx_{t-l} = \sum_{j=1}^l j^kx_{t-j}$$

Перепишем модель (4) с учетом соотношений (5):

$$y_t = a + c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_k z_k + \varepsilon_t \quad 6)$$

Процедура применения метода Алмон для расчета параметров модели с распределенным лагом

- 1. Определяется максимальная величина лага l .
- 2. Определяется степень полинома k , описывающего структуру лага.
- 3. По соотношениям (5) рассчитываются значения переменных

z_0, \dots, z_k

- Определяются параметры уравнения линейной регрессии (6).
- С помощью соотношений (2) рассчитываются параметры исходной модели с распределенным лагом.

- Применение метода Алмон сопряжено с рядом **проблем**.
1. Величина лага l должна быть известна заранее. При ее определении лучше исходить из максимально возможного лага, чем ограничиваться лагами небольшой длины. Выбор меньшего лага, чем его реальное значение, приведет к тому, что в модели регрессии не будет учтен фактор, оказывающий значительное влияние на результат, т.е. к неверной спецификации модели.

Влияние этого фактора в такой модели будет выражено в остатках. Тем самым в модели не будут соблюдаться предпосылки МНК о случайности остатков, а полученные оценки ее параметров окажутся неэффективными и смещенными.

Выбор большей величины лага по сравнению с ее реальным значением будет означать включение в модель статистически незначимого фактора и снижение эффективности полученных оценок, однако эти оценки все же будут несмещенными.

Наиболее простым способом определения реальной величины лага является измерение тесноты связи между результатом и лаговыми значениями фактора. Кроме того, оптимальную величину лага можно приблизительно определить на основе априорной информации экономической теории или проведенных ранее эмпирических исследований.

2. Необходимо установить степень полинома k . Обычно на практике ограничиваются рассмотрением полиномов 2-й и 3-й степени, применяя следующее правило: выбранная степень полинома должна быть на единицу больше числа экстремумов в структуре лага. Если априорную информацию о структуре лага получить невозможно, величину k проще всего получить путем сравнения моделей, построенных для различных значений k , и выбора наилучшей модели.

- 3. Переменные \mathbf{z} , которые определяются как линейные комбинации исходных переменных \mathbf{x} , будут коррелировать между собой в случаях, когда наблюдается высокая связь между самими исходными переменными. Поэтому оценку параметров модели (6) придется проводить в условиях мультиколлинеарности факторов.

- Однако мультиколлинеарность факторов $\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_k$ в модели (6) сказывается на оценках параметров $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_l$ в несколько меньшей степени, чем если бы эти оценки были получены путем применения обычного МНК непосредственно к модели (1) в условиях мультиколлинеарности факторов $\mathbf{x}_t, \dots, \mathbf{x}_{t-l}$

- **Метод Алми имеет два преимущества.**
- 1. Он достаточно универсален и может быть применен для моделирования процессов, которые характеризуются разнообразными структурами лагов.
- 2. При относительно небольшом количестве переменных в (6) (обычно выбирают $k = 2$ или $k = 3$), которое не приводит к потере значительного числа степеней свободы, с помощью метода Алмон можно построить модели с распределенным лагом любой длины.

4. Модель Койка. Рассмотренные модели были построены в предположении конечной длины лага l .

Предположим, что для описания некоторого процесса используется модель с бесконечным лагом вида

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \dots + \varepsilon_t \quad (7)$$

- Параметры такой модели обычным МНК определить нельзя из-за бесконечного числа факторов. Однако, приняв определенные допущения относительно структуры лага, оценки ее параметров все же можно получить. Эти допущения состоят в наличии геометрической структуры лага, т.е. такой структуры, когда воздействия лаговых значений фактора на результат уменьшаются с увеличением величины лага в геометрической прогрессии.

- Впервые такой подход к оценке параметров моделей с распределенным лагом был предложен Л.М. Койком. Койк предположил, что существует некоторый постоянный темп λ ($0 < \lambda < 1$) уменьшения во времени лаговых воздействий фактора на результат. Если, например, в период t результат изменялся под воздействием изменения фактора в этот же период времени на b_0 ед., то под воздействием изменения фактора, имевшего место в период $(t - 1)$, результат изменится на $b_0\lambda$ ед.; в период $(t - 2)$ – на $b_0\lambda^2$ ед., и т.д.

Для некоторого периода $(t - l)$ это изменение результата составит $b_0 \lambda^l$ ед. В более общем виде можно записать:

$$b_j = b_0 \lambda; j = 0, 1, 2, \dots, 0 < \lambda < 1 \quad (8)$$

Ограничение на значения $\lambda > 0$ обеспечивает одинаковые знаки для всех коэффициентов $b_j > 0$, а ограничение $b_j < 1$ означает, что с увеличением лага значения параметров модели (7) убывают в геометрической прогрессии.

Чем ближе λ к нулю, тем выше темп снижения воздействия фактора на результат во времени и тем большая доля воздействия на результат приходится на текущие значения фактора x_t .

Выразим с помощью (8) все коэффициенты b_j в модели (7) через b_0 и λ :

$$y_t = a + b_0 x_t + b_0 \lambda x_{t-1} + b_0 \lambda^2 x_{t-2} + \dots + \varepsilon_t \quad (9)$$

Тогда для периода $(t - 1)$ модель (9) можно записать следующим образом:

$$y_{t-1} = a + b_0 x_{t-1} + b_0 \lambda x_{t-2} + b_0 \lambda^2 x_{t-3} + \dots + \varepsilon_{t-1} \quad (10)$$

Умножим обе части (10) на λ :

$$\begin{aligned} \lambda y_{t-1} &= \lambda a + b_0 \lambda x_{t-1} + b_0 \lambda^2 x_{t-2} + b_0 \lambda^3 x_{t-3} + \dots \\ &+ \lambda \varepsilon_{t-1} \end{aligned} \quad (11)$$

Вычтем найденное соотношение (11) из соотношения (9):

$$y_t - \lambda y_{t-1} = a - \lambda a + b_0 x_t + \varepsilon_{t-1} - \lambda \varepsilon_{t-1} \quad (12)$$

Преобразовав (12), получим **модель**

Койка:

$$y_t = a(1 - \lambda) + b_0 x_t + (1 - \lambda)y_{t-1} + u_t, \quad (13)$$

где $u_t = \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}$.

Полученная модель есть модель двухфакторной линейной регрессии (точнее – авторегрессии). Определив ее параметры, мы найдем λ и оценки параметров \mathbf{a} и \mathbf{b}_0 исходной модели. Далее с помощью соотношений (8) можно определить параметры $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots$ модели (7). Отметим, что применение обычного МНК к оценке параметров модели (13) приведет к получению смещенных оценок ее параметров ввиду наличия в этой модели в качестве фактора лаговой результативной переменной Y_{t-1} .

Описанный алгоритм получил название преобразования *Койка*. Это преобразование позволяет перейти от модели с бесконечными распределенными лагами к модели авторегрессии, содержащей две независимые переменные: x_t и y_{t-1} .

Несмотря на бесконечное число лаговых переменных в модели (7), геометрическая структура лага позволяет определить величины среднего и медианного лагов в модели Койка. Поскольку сумма коэффициентов регрессии в модели (7) есть сумма геометрической прогрессии, т.е.

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j = b_0 + b_0\lambda + b_0\lambda^2 + b_0\lambda^3 + \dots = b_0(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots) = b_0 \frac{1}{1-\lambda}$$

(14)

то средний лаг определяется как

$$\bar{l} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j b_j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j} = \frac{b_0 \lambda (1 + 2\lambda^2 + 3\lambda^3 + \dots)}{b_0 \frac{1}{1-\lambda}} = \frac{b_0 \lambda \frac{1}{(1-\lambda)^2}}{b_0 \frac{1}{1-\lambda}} = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

(15)

Нетрудно заметить, что при $\lambda = 0,5$
средний лаг , $\bar{l} = 1$
а при $\lambda < 0,5$ средний лаг $\bar{l} < 1$,
т.е. воздействие фактора на результат в
среднем занимает менее одного
периода времени. Величину $(1 - \lambda)$
интерпретируют обычно как скорость, с
которой происходит адаптация
результата во времени к изменению
факторного признака. Для расчета
медианного лага необходимо

выполнение следующего условия:

$$\sum_{j=0}^{l_{me}-1} \beta_j = \sum_{j=0}^{l_{me}-1} \frac{b_j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j} = \sum_{j=0}^{l_{me}-1} \frac{b_0 \lambda^j}{b_0 \frac{1}{1-\lambda}} = \sum_{j=0}^{l_{me}-1} \lambda^j (1-\lambda) = 0,5.$$

Поэтому медианный лаг в модели Койка равен

$$l_{me} = \frac{\ln 0,5}{\ln \lambda}$$

*

*

*

*

*

*

*

*