Лекция № 4

на тему: *Нелинейные модели регрессии. Модели распределенным лагом*

1. Нелинейные модели регрессии

Во многих практических случаях моделирование экономических зависимостей линейными уравнениями дает вполне удовлетворительный результат и может использоваться для анализа и прогнозирования. Однако в силу многообразия и сложности экономических процессов ограничиться рассмотрением лишь линейных регрессионных моделей невозможно.

Многие экономические зависимости не являются линейными по своей сути, и поэтому их моделирование линейными функциями, безусловно, не даст положительного результата. Так, например, нелинейными являются производственные функции (зависимости между объемом произведенной продукции и основными факторами производства - трудом, капиталом и т.п.), функции спроса (зависимость между спросом на товары или услуги и их ценами или доходом) и др.

Различают два класса нелинейных регрессий:

1) регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам. К таким функциям относятся квазилинейные функции.

Например, это полиномы различных степеней

$$y = a + bx + cx^2 + \varepsilon,$$

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \varepsilon$$

Равносторонняя гипербола

$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$$

2) регрессии нелинейные по оцениваемым параметрам. К таким регрессиям относятся нелинейные функции второго класса.

Например, степенная функция

$$y = a \cdot x^{b} \cdot \varepsilon$$

Показательная

$$y = a \cdot b^{x} \cdot \varepsilon$$

Экспоненциальная

$$y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon.$$

Нелинейная регрессия по включенным переменным не таит каких-либо сложностей в оценке ее параметров.

Она определяется, как и в линейной регрессии, методом наименьших квадратов, так как эти функции линейны по параметрам.

Так, например, в полиноме второй степени

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \varepsilon$$

заменив $x = x_1$, $x^2 = x_2$, получим двухфакторное уравнение линейной регрессии: $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \varepsilon$.

Применив метод наименьших квадратов для оценки коэффициентов исходного полинома второй степени, получим следующую систему нормальных уравнений:

*

$$\begin{cases} \sum y = na_0 + b\sum x + c\sum x^2 \\ \sum yx = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 \\ \sum yx^2 = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 \end{cases}$$

Ее решение можно найти методом Крамера.

Среди класса нелинейных функций, параметры которых легко оцениваются с помощью МНК, следует назвать хорошо известную в эконометрике равностороннюю гиперболу:

$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon.$$

Она может быть использована для характеристики связи удельных расходов сырья, материалов, топлива с объемом выпускаемой продукции, времени обращения товаров от величины товарооборота.

Заменив в уравнении равносторонней гиперболы *1/x* на *z*, получим уравнение линейной регрессии *y* = *a* + *bz* + *e*, оценка параметров которого может быть дана с помощью МНК.

Система нормальных уравнений для этого случая примет вид:

$$\begin{cases} \sum y = na + b\sum \frac{1}{x}, \\ \sum \frac{y}{x} = a\sum \frac{1}{x} + b\sum \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Модели вида

$$\ln Y = a + bx + \varepsilon,$$

$$y = a + b\ln x + \varepsilon$$

называются полулогарифмическими моделями. Эти модели также относятся к нелинейным моделям относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейным по параметрам.

Система нормальных уравнений, например, для второй модели будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum y = na + b\sum \ln x \ , \\ \sum y \ln x = a\sum \ln x + b\sum (\ln x)^2 \ . \end{cases}$$

Возможны и другие модели, нелинейные относительно объясняющих переменных.

Например,

$$y = a + b\sqrt{x} + \varepsilon \ .$$

В этом случае система нормальных уравнений для оценки параметров примет вид:

$$\begin{cases} \sum y = na + b\sum\sqrt{x}\ , \\ \sum y\cdot\sqrt{x} = a\sum\sqrt{x} + b\sum\left(\sqrt{x}\right)^2\ . \end{cases}$$

Иначе обстоит дело с регрессией, *нелинейной по оцениваемым параметрам*. Данный класс нелинейных моделей подразделяется на два типа: нелинейные модели внутренне линейные и нелинейные модели внутренне нелинейные.

Если нелинейная модель внутренне линейна, то она с помощью соответствующих преобразований может быть приведена к линейному виду. Например, в экономических исследованиях при изучении эластичности спроса от цен широко используется степенная функция

$$y = a \cdot x^{b} \cdot \varepsilon$$

где ***y*** – спрашиваемое количество;

x – цена;

ε – случайная ошибка.

Данная модель нелинейна относительно оцениваемых параметров, так как включает параметры *a* и *b* неаддитивно. Однако ее можно считать внутренне линейной, так как логарифмирование данного уравнения, например, по основанию *е* приводит его к виду

$$\ln y = \ln a + b \ln x + \ln \varepsilon \, .$$

Оценка параметров *a* и *b* в полученном уравнении может быть произведена с помощью МНК. При этом решается система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum \ln y = n \ln a + b \sum \ln x \, , \\ \sum \ln y \cdot \ln x = \ln a \sum \ln x + b \sum (\ln x)^2 \, . \end{cases}$$

Параметр *b* определяется непосредственно из системы, а параметр *a* – косвенным путем после потенцирования величины *lna.*

Наибольшее распространение степенной функции в эконометрике связано с тем, что параметр *b* имеет четкое экономическое истолкование, – он является коэффициентом эластичности. Это значит, что коэффициент *b* показывает, на сколько % в среднем изменится результат, если фактор изменится на 1%.

Для степенной функции коэффициент эластичности будет рассчитываться следующим образом

$$Э = f'(x)\frac{x}{y} = a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot \frac{x}{ax^{b}} = b$$

При *b<0* характеризуется эластичность спроса, а при *b>0* – предложения.

В других функциях коэффициент эластичности зависит от значений фактора х. В силу этого для них обычно рассчитывается средний показатель эластичности

$$\widetilde{Э} = f'(\bar{x})\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

Если же модель степенной регрессии представить в виде

$$y = ax^b + \varepsilon ,$$

то она становится внутренне нелинейной, так как ее невозможно превратить в линейный вид. В этом случае, то есть, если модель внутренне нелинейна по параметрам, используются итеративные процедуры, успешность которых зависит от вида уравнений и особенностей применяемого итеративного подхода.

Модели внутренне нелинейные по параметрам могут иметь место в эконометрических исследованиях, однако гораздо большее распространение получили модели, приводимые к линейному виду.

Среди них, в частности, можно назвать модель обратной зависимости вида

$$y = \frac{1}{a + bx + \varepsilon}.$$

Линеаризовать эту модель можно относительно переменной $\frac{1}{y}$.

Для этого нужно просто «перевернуть» дробь:

$$\frac{1}{y} = a + bx + \varepsilon\ .$$

Вводя новую переменную Y = $\frac{1}{y}$, **получим линейное уравнение:**

Y = a + bx + ε.

Так называемая логистическая функция также может быть приведена к линейному виду:

$$y = \frac{a}{1 + be^{-cx+\varepsilon}} .$$

Переходя к обратным величинам, получим:

$$\frac{a}{y} = 1 + be^{-cx+\varepsilon} .$$

Перенесем единицу в левую часть и прологарифмируем по основанию е, получим:

$$\ln b - cx + \varepsilon = \ln\left(\frac{a}{y} - 1\right)$$

или

$$z = B - cx + \varepsilon \ , \quad где \quad z = \ln\left(\frac{a}{y} - 1\right), \quad B = \ln b \ .$$

2. Модели с распределенным лагом.

Будем рассматривать динамические эконометрические модели. Эконометрическая модель является динамической, если в данный момент времени ***t*** она учитывает значения входящих в нее переменных, относящиеся как к текущим, так и к предыдущим моментам времени, т.е. если эта модель отражает динамику исследуемых переменных в каждый момент времени.

- Будем рассматривать модели, в которых значения переменных за прошлые периоды времени (лаговые переменные) непосредственно включены в модель (присутствуют в явном виде). Это модели с распределенным лагом.

- Если значение результативного признака в текущий момент времени ***t*** формируется под воздействием ряда факторов, действовавших в прошлые моменты времени ***t – 1, t – 2, … , t – l,*** то величину ***l,*** характеризующую запаздывание в воздействии фактора на результат, называют ***лагом***, а временные ряды самих факторных переменных, сдвинутые на один или более моментов времени, **– *лаговыми переменными***.

- Разработка экономической политики как на макро-, так и на микроуровне требует решения обратного типа задач, т.е. задач, определяющих, какое воздействие окажут значения управляемых переменных текущего периода на будущие значения экономических показателей.

- Эконометрическое моделирование охарактеризованных выше процессов осуществляется с применением моделей, содержащих не только текущие, но и лаговые значения факторных переменных. Эти модели называются ***моделями с распределенным лагом.***
- Например,
- $y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$ –
- модель с распределенным лагом.

- Наряду с лаговыми значениями независимых, или факторных, переменных на величину зависимой переменной текущего периода могут оказывать влияние ее значения в прошлые моменты или периоды времени. Эти процессы обычно описывают с помощью моделей регрессии, содержащих в качестве факторов лаговые значения зависимой переменной, которые называются ***моделями авторегрессии***. Например, модель вида
  - $y_t = a + b_0 x_t + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ –
- модель авторегрессии.

- Построение моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии имеет свою ***специфику***. ***Во-первых***, оценка параметров модели авторегрессии, а в большинстве случаев и моделей с распределенным лагом не может быть произведена с помощью обычного МНК ввиду нарушения его предпосылок и требует специальных статистических методов.

- ***Во-вторых***, исследователям приходится решать проблемы выбора оптимальной величины лага и определения его структуры.
- Наконец, ***в-третьих***, между моделями с распределенным лагом и моделями авторегрессии существует определенная взаимосвязь, и в некоторых случаях необходимо осуществлять переход от одного типа моделей к другому.

- ***3. Лаги Алмон.*** Рассмотрим общую модель с распределенным лагом, имеющую конечную максимальную величину лага ***l***, которая описывается соотношением
  - $y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \dots + b_p x_{t-p} + \varepsilon_t$ (1)
- Эта модель говорит о том, что если в некоторый момент времени ***t*** происходит изменение независимой переменной ***x***, то это изменение будет влиять на значения переменной ***y*** в течение ***l*** следующих моментов времени.

- Коэффициент регрессии b_0 при переменной x_t характеризует среднее абсолютное изменение y_t при изменении x_t на ***1 ед.*** своего измерения в некоторый фиксированный момент времени t без учета воздействий лаговых значений фактора x. Этот коэффициент называют ***краткосрочным мультипликатором.***

- В момент (***t* + *1***) совокупное воздействие факторной переменной $\boldsymbol{x_t}$ на результат $\boldsymbol{y_t}$ составит ($\boldsymbol{b_0 + b_1}$) *усл. ед*., в момент (***t* + *2***) это воздействие составит ($\boldsymbol{b_0 + b_1 + b_2}$) и т.д. Полученные таким образом суммы называют ***промежуточными мультипликаторами.***

- С учетом конечной величины лага можно сказать, что изменение переменной x_t в момент t на ***1*** *усл. ед*. приведет к общему изменению результата через l моментов времени на $(b_0 + b_1 + \ldots + b_l)$ абсолютных единиц.
- Величину
- $b = b_0 + b_1 + \ldots + b_l$
- называют ***долгосрочным мультипликатором***.

- Он показывает абсолютное изменение результата ***y*** в долгосрочном периоде
- ***t + l*** под влиянием изменения фактора ***x*** на *1 ед*.

- Предположим, что было установлено, что в исследуемой модели имеет место ***полиномиальная*** структура лага, т.е. зависимость коэффициентов регрессии $\boldsymbol{b_i}$ от величины лага описывается полиномом ***k***-ой степени. Частным случаем полиномиальной структуры лага является линейная модель. ***Лаги, структуру которых можно описать с помощью полиномов, называют лагами Алмон***, по имени

Ш. Алмон, впервые обратившей внимание на такое представление лагов.

Формально модель зависимости коэффициентов b_j от величины лага j в форме полинома можно записать в следующем виде:

– для полинома ***1-***й степени:
  - $b_j = c_0 + c_1 j$;

– для полинома ***2-***й степени:
  - $b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2$;

– для полинома ***3-***й степени:
  - $b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + c_3 j^3$ и т.д.

В наиболее общем виде для полинома ***k***-ой степени имеем:

$$b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + \ldots + c_k j^k \ .$$

Тогда каждый из коэффициентов модели (1) можно выразить следующим образом:

- $b_0 = c_0;$
- $b_1 = c_0 + c_1 + \ldots + c_k;$
- $b_2 = c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \ldots + 2^k c_k;$
- $b_3 = c_0 + 3c_1 + 9c_2 + \ldots + 3^k c_k\ ;$

и т.д.

- $b_l = c_0 + lc_1 + l^2 c_2 + \ldots + l^k c_k \qquad (2)$

Подставив в (1) найденные соотношения для b_j, получим:

$$y_t = a + c_0 x_t + (c_0 + c_1 + \ldots + c_k)x_{t-1} + (c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \ldots + 2^k c_k)x_{t-2} + (c_0 + 3c_1 + 9c_2 + \ldots + 3^k c_k)x_{t-3} + \ldots + (c_0 + lc_1 + l^2 c_2 + \ldots + l^k c_k)x_{t-l} + \varepsilon_t . \qquad (3)$$

Перегруппируем слагаемые в (3):

$$y_t = a + c_0(x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \ldots + x_{t-l}) + c_1(x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + \ldots + lx_{t-l}) + c_2(x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + \ldots + l^2 x_{t-l}) + \ldots + c_k(x_{t-1} + 2^k x_{t-2} + 3^k x_{t-3} + \ldots + l^k x_{t-l}) + \varepsilon_t . \qquad (4)$$

Обозначим слагаемые в скобках при $\boldsymbol{c_i}$ как новые переменные:

$$z_0 = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-l} = \sum_{j=0}^{l} x_{t-j};$$

$$z_1 = x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + \dots + lx_{t-l} = \sum_{j=1}^{l} jx_{t-j};$$

$$z_2 = x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + \dots + l^2x_{t-l} = \sum_{j=1}^{l} j^2 x_{t-j}; \quad (5)$$

....

$$z_k = x_{t-1} + 2^k x_{t-2} + 3^k x_{t-3} + \dots + l^2 x_{t-l} = \sum_{j=1}^{l} j^k x_{t-j}$$

Перепишем модель (4) с учетом соотношений (5):

$$y_t = a + c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_k z_k + \varepsilon_t \quad 6)$$

Процедура применения метода Алмон для расчета параметров модели с распределенным лагом

- 1. Определяется максимальная величина лага l.
- 2. Определяется степень полинома k, описывающего структуру лага.
- 3. По соотношениям (5) рассчитываются значения переменных

$z_0, \dots, z_k$.

- Определяются параметры уравнения линейной регрессии (6).
- С помощью соотношений (2) рассчитываются параметры исходной модели с распределенным лагом.

- Применение метода Алмон сопряжено с рядом ***проблем***.

1. Величина лага ***l*** должна быть известна заранее. При ее определении лучше исходить из максимально возможного лага, чем ограничиваться лагами небольшой длины. Выбор меньшего лага, чем его реальное значение, приведет к тому, что в модели регрессии не будет учтен фактор, оказывающий значительное влияние на результат, т.е. к неверной спецификации модели.

Влияние этого фактора в такой модели будет выражено в остатках. Тем самым в модели не будут соблюдаться предпосылки МНК о случайности остатков, а полученные оценки ее параметров окажутся неэффективными и смещенными.

Выбор большей величины лага по сравнением с ее реальным значением будет означать включение в модель статистически незначимого фактора и снижение эффективности полученных оценок, однако эти оценки все же будут несмещенными.

Наиболее простым способом определения реальной величины лага является измерение тесноты связи между результатом и лаговыми значениями фактора. Кроме того, оптимальную величину лага можно приближенно определить на основе априорной информации экономической теории или проведенных ранее эмпирических исследований.

2. Необходимо установить степень полинома ***k***. Обычно на практике ограничиваются рассмотрением полиномов 2-й и 3-й степени, применяя следующее правило: выбранная степень полинома должна быть на единицу больше числа экстремумов в структуре лага. Если априорную информацию о структуре лага получить невозможно, величину ***k*** проще всего получить путем сравнения моделей, построенных для различных значений ***k***, и выбора наилучшей модели.

- 3. Переменные ***z***, которые определяются как линейные комбинации исходных переменных ***x***, будут коррелировать между собой в случаях, когда наблюдается высокая связь между самими исходными переменными. Поэтому оценку параметров модели (6) приходится проводить в условиях мультиколлинеарности факторов.

- Однако мультиколлинеарность факторов $\boldsymbol{z_0, \ldots , z_k}$ в модели (6) сказывается на оценках параметров
- $\boldsymbol{b_0, \ldots , b_l}$ в несколько меньшей степени, чем если бы эти оценки были получены путем применения обычного МНК непосредственно к модели (1) в условиях мультиколлинеарности факторов $\boldsymbol{x_t, \ldots , x_{t-l}}$.

- ***Метод Алми имеет два преимущества.***
- 1. Он достаточно универсален и может быть применен для моделирования процессов, которые характеризуются разнообразными структурами лагов.
- 2. При относительно небольшом количестве переменных в (6) (обычно выбирают ***k = 2*** или ***k = 3***), которое не приводит к потере значительного числа степеней свободы, с помощью метода Алмон можно построить модели с распределенным лагом любой длины.

4. Модель Койка. Рассмотренные модели были построены в предположении конечной длины лага $\boldsymbol{l}$.

Предположим, что для описания некоторого процесса используется модель с бесконечным лагом вида

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t. \quad (7)$$

- Параметры такой модели обычным МНК определить нельзя из-за бесконечного числа факторов. Однако, приняв определенные допущения относительно структуры лага, оценки ее параметров все же можно получить. Эти допущения состоят в наличии геометрической структуры лага, т.е. такой структуры, когда воздействия лаговых значений фактора на результат уменьшаются с увеличением величины лага в геометрической прогрессии.

- Впервые такой подход к оценке параметров моделей с распределенным лагом был предложен Л.М. Койком. Койк предположил, что существует некоторый постоянный темп $\boldsymbol{\lambda}$ ***(0 < λ < 1)*** уменьшения во времени лаговых воздействий фактора на результат. Если, например, в период $\boldsymbol{t}$ результат изменялся под воздействием изменения фактора в этот же период времени на $\boldsymbol{b_0}$ ед., то под воздействием изменения фактора, имевшего место в период ***(t – 1)***, результат изменится на $\boldsymbol{b_0\lambda}$ ед.; в период ***(t – 2)*** – на $\boldsymbol{b_0\lambda^2}$ ед., и т.д.

Для некоторого периода $(t - l)$ это изменение результата составит $b_0\lambda^l$ ед. В более общем виде можно записать:

$$b_j = b_0 \lambda; \; j = 0, 1, 2, \dots, \; 0<\lambda<1 \qquad (8)$$

Ограничение на значения $\lambda > 0$ обеспечивает одинаковые знаки для всех коэффициентов $b_j > 0$, а ограничение $b_j < 1$ означает, что с увеличением лага значения параметров модели (7) убывают в геометрической прогрессии.

Чем ближе $\boldsymbol{\lambda}$ к нулю, тем выше темп снижения воздействия фактора на результат во времени и тем большая доля воздействия на результат приходится на текущие значения фактора $\boldsymbol{x_t}$.

Выразим с помощью (8) все коэффициенты $\boldsymbol{b_j}$ в модели (7) через $\boldsymbol{b_0}$ и $\boldsymbol{\lambda}$:

$$y_t = a + b_0 x_t + b_0 \lambda x_{t-1} + b_0 \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t \quad (9)$$

Тогда для периода ***(t – 1)*** модель (9) можно записать следующим образом:

$$y_{t-1} = a + b_0 x_{t-1} + b_0 \lambda x_{t-2} + b_0 \lambda^2 x_{t-3} + \ldots + \varepsilon_{t-1} \quad 10)$$

Умножим обе части (10) на $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\lambda y_{t-1} = \lambda a + b_0 \lambda x_{t-1} + b_0 \lambda^2 x_{t-2} + b_0 \lambda^3 x_{t-3} + \ldots + \lambda \varepsilon_{t-1} \quad (11)$$

Вычтем найденное соотношение (11) из соотношения (9):

$$\boldsymbol{y_t - \lambda y_{t-1} = a - \lambda a + b_0 x_t + \varepsilon_{t-1} - \lambda\, \varepsilon_{t-1}} \quad (12)$$

Преобразовав (12), получим ***модель Койка***:

$$\boldsymbol{y_t = a(1 - \lambda) + b_0 x_t + (1 - \lambda)y_{t-1} + u_t}, \quad (13)$$

где $\boldsymbol{u_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}}$.

Полученная модель есть модель двухфакторной линейной регрессии (точнее – авторегрессии). Определив ее параметры, мы найдем λ и оценки параметров $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b_0}$ исходной модели. Далее с помощью соотношений (8) можно определить параметры $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, … модели (7). Отметим, что применение обычного МНК к оценке параметров модели (13) приведет к получению смещенных оценок ее параметров ввиду наличия в этой модели в качестве фактора лаговой результативной переменной $\boldsymbol{y_{t-1}}$.

Описанный алгоритм получил название преобразования ***Койка***. Это преобразование позволяет перейти от модели с бесконечными распределенными лагами к модели авторегрессии, содержащей две независимые переменные: x_t и y_{t-1}.

Несмотря на бесконечное число лаговых переменных в модели (7), геометрическая структура лага позволяет определить величины среднего и медианного лагов в модели Койка. Поскольку сумма коэффициентов регрессии в модели (7) есть сумма геометрической прогрессии, т.е.

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j = b_0 + b_0\lambda + b_0\lambda^2 + b_0\lambda^3 + \ldots = b_0\left(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots\right) = b_0 \frac{1}{1-\lambda}$$

(14)

то средний лаг определяется как

$$\bar{l} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j b_j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j} = \frac{b_0 \lambda \left(1 + 2\lambda^2 + 3\lambda^3 + \dots\right)}{b_0 \dfrac{1}{1-\lambda}} = \frac{b_0 \lambda \dfrac{1}{\left(1-\lambda\right)^2}}{b_0 \dfrac{1}{1-\lambda}} = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

(15)

Нетрудно заметить, что при ***λ = 0,5*** средний лаг , $\bar{l} = 1$

а при ***l < 0,5*** средний лаг $\bar{l} < 1$,

т.е. воздействие фактора на результат в среднем занимает менее одного периода времени. Величину (***1 – λ***) интерпретируют обычно как скорость, с которой происходит адаптация результата во времени к изменению факторного признака. Для расчета медианного лага необходимо выполнение следующего условия:

$$\sum_{j=0}^{l_{me}-1}\beta_j = \sum_{j=0}^{l_{me}-1}\frac{b_j}{\sum_{j=0}^{\infty}b_j} = \sum_{j=0}^{l_{me}-1}\frac{b_0\lambda^j}{b_0\dfrac{1}{1-\lambda}} = \sum_{j=0}^{l_{me}-1}\lambda^j\left(1-\lambda\right) = 0{,}5\,.$$

Поэтому медианный лаг в модели Койка равен

$$l_{me} = \frac{\ln 0{,}5}{\ln\lambda}$$

*

*

*

*

*

*

*

*