

# Лекция № 4

на тему: *Нелинейные модели  
регрессии. Модели  
распределенным лагом*

# ***1. Нелинейные модели регрессии***

**Во многих практических случаях моделирование экономических зависимостей линейными уравнениями дает вполне удовлетворительный результат и может использоваться для анализа и прогнозирования. Однако в силу многообразия и сложности экономических процессов ограничиться рассмотрением лишь линейных регрессионных моделей невозможно.**

**Многие экономические зависимости не являются линейными по своей сути, и поэтому их моделирование линейными функциями, безусловно, не даст положительного результата. Так, например, нелинейными являются производственные функции (зависимости между объемом произведенной продукции и основными факторами производства - трудом, капиталом и т.п.), функции спроса (зависимость между спросом на товары или услуги и их ценами или доходом) и др.**

Различают два класса нелинейных регрессий:

1) регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам.

К таким функциям относятся квазилинейные функции.

Например, это полиномы различных степеней

$$y = a + bx + cx^2 + \varepsilon,$$

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \varepsilon$$

# Равносторонняя гиперболола

$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$$

**2) регрессии нелинейные по оцениваемым параметрам. К таким регрессиям относятся нелинейные функции второго класса.**

**Например, степенная функция**

$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$$

## Показательная

$$y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$$

## Экспоненциальная

$$y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon.$$

**Нелинейная регрессия по включенным переменным не таит каких-либо сложностей в оценке ее параметров.**

**Она определяется, как и в линейной регрессии, методом наименьших квадратов, так как эти функции линейны по параметрам.**

**Так, например, в полиноме второй степени**

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \varepsilon$$

**заменив  $x = x_1$ ,  $x^2 = x_2$ , получим двухфакторное уравнение линейной регрессии:  $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \varepsilon$ .**

**Применив метод наименьших квадратов для оценки коэффициентов исходного полинома второй степени, получим следующую систему нормальных уравнений:**

\*

$$\begin{cases} \sum y = na_0 + b \sum x + c \sum x^2 \\ \sum yx = a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 \\ \sum yx^2 = a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 \end{cases}$$

**Ее решение можно найти методом Крамера.**



**Среди класса нелинейных функций, параметры которых легко оцениваются с помощью МНК, следует назвать хорошо известную в эконометрике равностороннюю гиперболу:**

$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon.$$

**Она может быть использована для характеристики связи удельных расходов сырья, материалов, топлива с объемом выпускаемой продукции, времени обращения товаров от величины товарооборота.**

**Заменив в уравнении равносторонней гиперболы  $1/x$  на  $z$ , получим уравнение линейной регрессии  $y = a + bz + e$ , оценка параметров которого может быть дана с помощью МНК.**

**Система нормальных уравнений для этого случая примет вид:**

$$\begin{cases} \sum y = na + b \sum \frac{1}{x}, \\ \sum \frac{y}{x} = a \sum \frac{1}{x} + b \sum \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

## Модели вида

$$\ln Y = a + bx + \varepsilon,$$

$$y = a + b \ln x + \varepsilon$$

**называются полулогарифмическими моделями. Эти модели также относятся к нелинейным моделям относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейным по параметрам.**

**Система нормальных уравнений, например, для второй модели будет иметь вид:**

$$\begin{cases} \sum y = na + b \sum \ln x , \\ \sum y \ln x = a \sum \ln x + b \sum (\ln x)^2 . \end{cases}$$

**Возможны и другие модели, нелинейные относительно объясняющих переменных.**

**Например,**

$$y = a + b\sqrt{x} + \varepsilon .$$

**В этом случае система нормальных уравнений для оценки параметров примет вид:**

$$\begin{cases} \sum y = na + b \sum \sqrt{x} , \\ \sum y \cdot \sqrt{x} = a \sum \sqrt{x} + b \sum (\sqrt{x})^2 . \end{cases}$$

**Иначе обстоит дело с регрессией, *нелинейной по оцениваемым параметрам.* Данный класс нелинейных моделей подразделяется на два типа: **нелинейные модели внутренне линейные и нелинейные модели внутренне нелинейные.****

**Если нелинейная модель внутренне линейна, то она с помощью соответствующих преобразований может быть приведена к линейному виду. Например, в экономических исследованиях при изучении эластичности спроса от цен широко используется степенная функция**

$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$$

**где  $y$  – спрашиваемое количество;  
 $x$  – цена;  
 $\varepsilon$  – случайная ошибка.**

**Данная модель нелинейна относительно оцениваемых параметров, так как включает параметры  $a$  и  $b$  неаддитивно. Однако ее можно считать внутренне линейной, так как логарифмирование данного уравнения, например, по основанию  $e$  приводит его к виду**

$$\ln y = \ln a + b \ln x + \ln \varepsilon .$$

**Оценка параметров  $a$  и  $b$  в полученном уравнении может быть произведена с помощью МНК. При этом решается система нормальных уравнений:**

$$\begin{cases} \sum \ln y = n \ln a + b \sum \ln x , \\ \sum \ln y \cdot \ln x = \ln a \sum \ln x + b \sum (\ln x)^2 . \end{cases}$$



**Параметр  $b$  определяется непосредственно из системы, а параметр  $a$  – косвенным путем после потенцирования величины  $\ln a$ .**

**Наибольшее распространение степенной функции в эконометрике связано с тем, что параметр  $b$  имеет четкое экономическое истолкование, – он является коэффициентом эластичности. Это значит, что коэффициент  $b$  показывает, на сколько % в среднем изменится результат, если фактор изменится на 1%.**

**Для степенной функции коэффициент эластичности будет рассчитываться следующим образом**

$$\mathcal{E} = f'(x) \frac{x}{y} = a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot \frac{x}{ax^b} = b$$

**При  $b < 0$  характеризуется эластичность спроса, а при  $b > 0$  – предложения.**

**В других функциях коэффициент эластичности зависит от значений фактора  $x$ . В силу этого для них обычно рассчитывается средний показатель эластичности**

$$\tilde{\varepsilon} = f'(\bar{x}) \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

**Если же модель степенной регрессии представить в виде**

$$y = ax^b + \varepsilon ,$$

**то она становится внутренне нелинейной, так как ее невозможно превратить в линейный вид. В этом случае, то есть, если модель внутренне нелинейна по параметрам, используются итеративные процедуры, успешность которых зависит от вида уравнений и особенностей применяемого итеративного подхода.**

**Модели внутренне нелинейные по параметрам могут иметь место в эконометрических исследованиях, однако гораздо большее распространение получили модели, приводимые к линейному виду.**

**Среди них, в частности, можно назвать модель обратной зависимости вида**

$$y = \frac{1}{a + bx + \varepsilon}.$$

**Линеаризовать эту модель можно относительно переменной  $\frac{1}{y}$ .**

**Для этого нужно просто «перевернуть» дробь:**

$$\frac{1}{y} = a + bx + \varepsilon .$$

**Вводя новую переменную  $Y = \frac{1}{y}$ , получим линейное уравнение:**

$$Y = a + bx + \varepsilon .$$

**Так называемая логистическая функция также может быть приведена к линейному виду:**

$$y = \frac{a}{1 + be^{-cx+\varepsilon}} .$$

**Переходя к обратным величинам, получим:**

$$\frac{a}{y} = 1 + be^{-cx+\varepsilon} .$$

**Перенесем единицу в левую часть и прологарифмируем по основанию  $e$ , получим:**

$$\ln b - cx + \varepsilon = \ln\left(\frac{a}{y} - 1\right)$$

**или**

$$z = B - cx + \varepsilon, \quad \text{где} \quad z = \ln\left(\frac{a}{y} - 1\right), \quad B = \ln b.$$



## ***2. Модели с распределенным лагом.***

Будем рассматривать динамические эконометрические модели.

Эконометрическая модель является динамической, если в данный момент времени  $t$  она учитывает значения входящих в нее переменных, относящиеся как к текущим, так и к предыдущим моментам времени, т.е. если эта модель отражает динамику исследуемых переменных в каждый момент времени.

- Будем рассматривать модели, в которых значения переменных за прошлые периоды времени (лаговые переменные) непосредственно включены в модель (присутствуют в явном виде). Это модели с распределенным лагом.

- Если значение результативного признака в текущий момент времени  $t$  формируется под воздействием ряда факторов, действовавших в прошлые моменты времени  $t - 1, t - 2, \dots, t - l$ , то величину  $l$ , характеризующую запаздывание в воздействии фактора на результат, называют **лагом**, а временные ряды самих факторных переменных, сдвинутые на один или более моментов времени, – **лаговыми переменными**.

- Разработка экономической политики как на макро-, так и на микроуровне требует решения обратного типа задач, т.е. задач, определяющих, какое воздействие окажут значения управляемых переменных текущего периода на будущие значения экономических показателей.

- Эконометрическое моделирование охарактеризованных выше процессов осуществляется с применением моделей, содержащих не только текущие, но и лаговые значения факторных переменных. Эти модели называются **моделями с распределенным лагом**.
- Например,
- $y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$  –
- модель с распределенным лагом.

- Наряду с лаговыми значениями независимых, или факторных, переменных на величину зависимой переменной текущего периода могут оказывать влияние ее значения в прошлые моменты или периоды времени. Эти процессы обычно описывают с помощью моделей регрессии, содержащих в качестве факторов лаговые значения зависимой переменной, которые называются **моделями авторегрессии**. Например, модель вида

$$\bullet y_t = a + b_0 x_t + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t -$$

- модель авторегрессии.

- Построение моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии имеет свою **специфику**. **Во-первых**, оценка параметров модели авторегрессии, а в большинстве случаев и моделей с распределенным лагом не может быть произведена с помощью обычного МНК ввиду нарушения его предпосылок и требует специальных статистических методов.

- **Во-вторых**, исследователям приходится решать проблемы выбора оптимальной величины лага и определения его структуры.
- Наконец, **в-третьих**, между моделями с распределенным лагом и моделями авторегрессии существует определенная взаимосвязь, и в некоторых случаях необходимо осуществлять переход от одного типа моделей к другому.



- **3. Лаги Алмон.** Рассмотрим общую модель с распределенным лагом, имеющую конечную максимальную величину лага  $l$ , которая описывается соотношением

- $$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \dots + b_p x_{t-p} + \varepsilon_t \quad (1)$$

- Эта модель говорит о том, что если в некоторый момент времени  $t$  происходит изменение независимой переменной  $x$ , то это изменение будет влиять на значения переменной  $y$  в течение  $l$  следующих моментов времени.

- Коэффициент регрессии  $b_0$  при переменной  $x_t$  характеризует среднее абсолютное изменение  $y_t$  при изменении  $x_t$  на **1 ед.** своего измерения в некоторый фиксированный момент времени  $t$  без учета воздействий лаговых значений фактора  $x$ . Этот коэффициент называют ***краткосрочным мультипликатором.***

- В момент  $(t + 1)$  совокупное воздействие факторной переменной  $x_t$  на результат  $y_t$  составит  $(b_0 + b_1)$  усл. ед., в момент  $(t + 2)$  это воздействие составит  $(b_0 + b_1 + b_2)$  и т.д. Полученные таким образом суммы называют ***промежуточными мультипликаторами.***

- С учетом конечной величины лага можно сказать, что изменение переменной  $x_t$  в момент  $t$  на  $1$  усл. ед. приведет к общему изменению результата через  $l$  моментов времени на  $(b_0 + b_1 + \dots + b_l)$  абсолютных единиц.
- Величину
- $b = b_0 + b_1 + \dots + b_l$
- называют **долгосрочным мультипликатором**.

- Он показывает абсолютное изменение результата  $y$  в долгосрочном периоде
- $t + l$  под влиянием изменения фактора  $x$  на 1 ед.

- Предположим, что было установлено, что в исследуемой модели имеет место **полиномиальная** структура лага, т.е. зависимость коэффициентов регрессии  $b_i$  от величины лага описывается полиномом  $k$ -ой степени. Частным случаем полиномиальной структуры лага является линейная модель. **Лаги, структуру которых можно описать с помощью полиномов, называют лагами Алмон**, по имени Ш. Алмон, впервые обратившей внимание на такое представление лагов.

Формально модель зависимости коэффициентов  $b_j$  от величины лага  $j$  в форме полинома можно записать в следующем виде:

– для полинома **1-й** степени:

$$\bullet b_j = c_0 + c_1 j;$$

– для полинома **2-й** степени:

$$\bullet b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2;$$

– для полинома **3-й** степени:

$$\bullet b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + c_3 j^3 \text{ и т.д.}$$

В наиболее общем виде для полинома  $k$ -ой степени имеем:

$$b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + \dots + c_k j^k .$$

Тогда каждый из коэффициентов модели (1) можно выразить следующим образом:



- $b_0 = c_0;$
- $b_1 = c_0 + c_1 + \dots + c_k;$
- $b_2 = c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \dots + 2^k c_k;$
- $b_3 = c_0 + 3c_1 + 9c_2 + \dots + 3^k c_k;$

И т.д.

- $b_l = c_0 + l c_1 + l^2 c_2 + \dots + l^k c_k \quad (2)$

Подставив в (1) найденные соотношения для  $b_j$ , получим:

$$y_t = a + c_0 x_t + (c_0 + c_1 + \dots + c_k) x_{t-1} + (c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \dots + 2^k c_k) x_{t-2} + (c_0 + 3c_1 + 9c_2 + \dots + 3^k c_k) x_{t-3} + \dots + (c_0 + 1^k c_1 + 1^2 c_2 + \dots + 1^k c_k) x_{t-l} + \varepsilon_t. \quad (3)$$

Перегруппируем слагаемые в (3):

$$y_t = a + c_0(x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-l}) + c_1(x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + \dots + 1x_{t-l}) + c_2(x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + \dots + 1^2 x_{t-l}) + \dots + c_k(x_{t-1} + 2^k x_{t-2} + 3^k x_{t-3} + \dots + 1^k x_{t-l}) + \varepsilon_t. \quad (4)$$

Обозначим слагаемые в скобках при  $c_i$  как новые переменные:

$$z_0 = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-l} = \sum_{j=0}^l x_{t-j};$$

$$z_1 = x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + \dots + lx_{t-l} = \sum_{j=1}^l jx_{t-j};$$

$$z_2 = x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + \dots + l^2x_{t-l} = \sum_{j=1}^l j^2x_{t-j};$$

(5)

$$\dots$$

$$z_k = x_{t-1} + 2^kx_{t-2} + 3^kx_{t-3} + \dots + l^kx_{t-l} = \sum_{j=1}^l j^kx_{t-j}$$

Перепишем модель (4) с учетом соотношений (5):

$$y_t = a + c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_k z_k + \varepsilon_t \quad 6)$$

## ***Процедура применения метода Алмон для расчета параметров модели с распределенным лагом***

- 1. Определяется максимальная величина лага  $l$ .
- 2. Определяется степень полинома  $k$ , описывающего структуру лага.
- 3. По соотношениям (5) рассчитываются значения переменных

$z_0, \dots, z_k$

- Определяются параметры уравнения линейной регрессии (6).
- С помощью соотношений (2) рассчитываются параметры исходной модели с распределенным лагом.

- Применение метода Алмон сопряжено с рядом **проблем**.
1. Величина лага  $l$  должна быть известна заранее. При ее определении лучше исходить из максимально возможного лага, чем ограничиваться лагами небольшой длины. Выбор меньшего лага, чем его реальное значение, приведет к тому, что в модели регрессии не будет учтен фактор, оказывающий значительное влияние на результат, т.е. к неверной спецификации модели.

Влияние этого фактора в такой модели будет выражено в остатках. Тем самым в модели не будут соблюдаться предпосылки МНК о случайности остатков, а полученные оценки ее параметров окажутся неэффективными и смещенными.



Выбор большей величины лага по сравнению с ее реальным значением будет означать включение в модель статистически незначимого фактора и снижение эффективности полученных оценок, однако эти оценки все же будут несмещенными.

Наиболее простым способом определения реальной величины лага является измерение тесноты связи между результатом и лаговыми значениями фактора. Кроме того, оптимальную величину лага можно приблизительно определить на основе априорной информации экономической теории или проведенных ранее эмпирических исследований.

2. Необходимо установить степень полинома  $k$ . Обычно на практике ограничиваются рассмотрением полиномов 2-й и 3-й степени, применяя следующее правило: выбранная степень полинома должна быть на единицу больше числа экстремумов в структуре лага. Если априорную информацию о структуре лага получить невозможно, величину  $k$  проще всего получить путем сравнения моделей, построенных для различных значений  $k$ , и выбора наилучшей модели.

- 3. Переменные  $\mathbf{z}$ , которые определяются как линейные комбинации исходных переменных  $\mathbf{x}$ , будут коррелировать между собой в случаях, когда наблюдается высокая связь между самими исходными переменными. Поэтому оценку параметров модели (6) приходится проводить в условиях мультиколлинеарности факторов.

- Однако мультиколлинеарность факторов  $\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_k$  в модели (6) сказывается на оценках параметров  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_l$  в несколько меньшей степени, чем если бы эти оценки были получены путем применения обычного МНК непосредственно к модели (1) в условиях мультиколлинеарности факторов  $\mathbf{x}_t, \dots, \mathbf{x}_{t-l}$

- **Метод Алми имеет два преимущества.**
- 1. Он достаточно универсален и может быть применен для моделирования процессов, которые характеризуются разнообразными структурами лагов.
- 2. При относительно небольшом количестве переменных в (6) (обычно выбирают  $k = 2$  или  $k = 3$ ), которое не приводит к потере значительного числа степеней свободы, с помощью метода Алмон можно построить модели с распределенным лагом любой длины.

**4. Модель Койка.** Рассмотренные модели были построены в предположении конечной длины лага  $l$ .

Предположим, что для описания некоторого процесса используется модель с бесконечным лагом вида

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \dots + \varepsilon_t \quad (7)$$

- Параметры такой модели обычным МНК определить нельзя из-за бесконечного числа факторов. Однако, приняв определенные допущения относительно структуры лага, оценки ее параметров все же можно получить. Эти допущения состоят в наличии геометрической структуры лага, т.е. такой структуры, когда воздействия лаговых значений фактора на результат уменьшаются с увеличением величины лага в геометрической прогрессии.



- Впервые такой подход к оценке параметров моделей с распределенным лагом был предложен Л.М. Койком. Койк предположил, что существует некоторый постоянный темп  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) уменьшения во времени лаговых воздействий фактора на результат. Если, например, в период  $t$  результат изменялся под воздействием изменения фактора в этот же период времени на  $b_0$  ед., то под воздействием изменения фактора, имевшего место в период  $(t - 1)$ , результат изменится на  $b_0\lambda$  ед.; в период  $(t - 2)$  – на  $b_0\lambda^2$  ед., и т.д.

Для некоторого периода  $(t - l)$  это изменение результата составит  $b_0 \lambda^l$  ед. В более общем виде можно записать:

$$b_j = b_0 \lambda; j = 0, 1, 2, \dots, 0 < \lambda < 1 \quad (8)$$

Ограничение на значения  $\lambda > 0$  обеспечивает одинаковые знаки для всех коэффициентов  $b_j > 0$ , а ограничение  $b_j < 1$  означает, что с увеличением лага значения параметров модели (7) убывают в геометрической прогрессии.

Чем ближе  $\lambda$  к нулю, тем выше темп снижения воздействия фактора на результат во времени и тем большая доля воздействия на результат приходится на текущие значения фактора  $x_t$ .

Выразим с помощью (8) все коэффициенты  $b_j$  в модели (7) через  $b_0$  и  $\lambda$ :

$$y_t = a + b_0 x_t + b_0 \lambda x_{t-1} + b_0 \lambda^2 x_{t-2} + \dots + \varepsilon_t \quad (9)$$

Тогда для периода  $(t - 1)$  модель (9) можно записать следующим образом:

$$y_{t-1} = a + b_0 x_{t-1} + b_0 \lambda x_{t-2} + b_0 \lambda^2 x_{t-3} + \dots + \varepsilon_{t-1} \quad (10)$$

Умножим обе части (10) на  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \lambda y_{t-1} &= \lambda a + b_0 \lambda x_{t-1} + b_0 \lambda^2 x_{t-2} + b_0 \lambda^3 x_{t-3} + \dots \\ &+ \lambda \varepsilon_{t-1} \end{aligned} \quad (11)$$

Вычтем найденное соотношение (11) из соотношения (9):

$$y_t - \lambda y_{t-1} = a - \lambda a + b_0 x_t + \varepsilon_{t-1} - \lambda \varepsilon_{t-1} \quad (12)$$

Преобразовав (12), получим **модель**

***Койка:***

$$y_t = a(1 - \lambda) + b_0 x_t + (1 - \lambda)y_{t-1} + u_t, \quad (13)$$

где  $u_t = \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}$ .

Полученная модель есть модель двухфакторной линейной регрессии (точнее – авторегрессии). Определив ее параметры, мы найдем  $\lambda$  и оценки параметров  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}_0$  исходной модели. Далее с помощью соотношений (8) можно определить параметры  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots$  модели (7). Отметим, что применение обычного МНК к оценке параметров модели (13) приведет к получению смещенных оценок ее параметров ввиду наличия в этой модели в качестве фактора лаговой результативной переменной  $Y_{t-1}$ .

Описанный алгоритм получил название преобразования *Койка*. Это преобразование позволяет перейти от модели с бесконечными распределенными лагами к модели авторегрессии, содержащей две независимые переменные:  $x_t$  и  $y_{t-1}$ .

Несмотря на бесконечное число лаговых переменных в модели (7), геометрическая структура лага позволяет определить величины среднего и медианного лагов в модели Койка. Поскольку сумма коэффициентов регрессии в модели (7) есть сумма геометрической прогрессии, т.е.

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j = b_0 + b_0\lambda + b_0\lambda^2 + b_0\lambda^3 + \dots = b_0(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots) = b_0 \frac{1}{1-\lambda}$$

(14)



то средний лаг определяется как

$$\bar{l} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j b_j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j} = \frac{b_0 \lambda (1 + 2\lambda^2 + 3\lambda^3 + \dots)}{b_0 \frac{1}{1-\lambda}} = \frac{b_0 \lambda \frac{1}{(1-\lambda)^2}}{b_0 \frac{1}{1-\lambda}} = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

(15)

Нетрудно заметить, что при  $\lambda = 0,5$   
средний лаг ,  $\bar{l} = 1$   
а при  $\lambda < 0,5$  средний лаг  $\bar{l} < 1$  ,  
т.е. воздействие фактора на результат в  
среднем занимает менее одного  
периода времени. Величину  $(1 - \lambda)$   
интерпретируют обычно как скорость, с  
которой происходит адаптация  
результата во времени к изменению  
факторного признака. Для расчета  
медианного лага необходимо

выполнение следующего условия:

$$\sum_{j=0}^{l_{me}-1} \beta_j = \sum_{j=0}^{l_{me}-1} \frac{b_j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j} = \sum_{j=0}^{l_{me}-1} \frac{b_0 \lambda^j}{b_0 \frac{1}{1-\lambda}} = \sum_{j=0}^{l_{me}-1} \lambda^j (1-\lambda) = 0,5.$$

Поэтому медианный лаг в модели Койка равен

$$l_{me} = \frac{\ln 0,5}{\ln \lambda}$$

\*

\*

\*

\*

\*



\*

\*

\*