Неопределенный интеграл

Первообразной функции $f(x)$ на промежутке X называется дифференцируемая на X функция $F(x)$, такая, что для всех $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где C – произвольная константа, и называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$. Обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$, стоящая под знаком интеграла $\int$, называется подынтегральной функцией, выражение $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением, при этом dx – дифференциал независимой переменной x.

Свойства неопределенного интеграла

1) $\int df(x) = f(x) + C.$

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

3) $\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx.$

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Таблица первообразных

1. $\int 0dx = C$
2. $\int 1dx = x + C$
3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| +$ $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$
5. $\int e^x dx = e^x +$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$
13. $\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$
14. $\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$
15. $\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C$
16. $\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C$
17. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$
18. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$
20. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
21. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Пример 1. $\int\left(3x^3-\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

Р е ш е н и е. Применим теорему об арифметике интегралов (интеграл от суммы функций равен сумме интегралов, числовой множитель можно вынести за знак интеграла)

$$\int\left(3x^3-\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx=3\int x^3dx-\int\sqrt[3]{x}dx+\int\frac{dx}{x^3}=$$

Воспользуемся таблицей интегралов (в данном случае формулой первообразной степенной функции для показателей $\alpha=3$, $\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha=-3$)

$$=3\frac{x^{3+1}}{4}-\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{4}{3}}+\frac{x^{-3+1}}{-2}=3\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{2x^2}+C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{2x^2}\right)'=\frac{3}{4}\cdot 4x^3-\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\cdot(-2)x^{-3}=3x^3-\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^3}.$$

Пример 2. $\int(1+2x)^2dx$

Р е ш е н и е. Возведем в квадрат выражение $(1+2x)$ по формуле сокращенного умножения

$$\int(1+2x)^2dx=\int(1+4x+4x^2)dx=$$

перейдем к сумме интегралов по теореме об арифметике

$$=\int dx+4\int xdx+4\int x^2dx=$$

и найдем первообразные по формуле интеграла от степенной функции

$$=x+4\frac{x^2}{2}+4\frac{x^3}{3}+c=x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+C.$$

Результат проверим дифференцированием:

$$\left(x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+C\right)'=1+2\cdot 2x+\frac{4}{3}\cdot 3x^2=1+4x+4x^2=(1+2x)^2.$$

Пример 3. $\int \frac{(1+x)}{x^5}dx$

Р е ш е н и е. Почленно разделим числитель на знаменатель, и, не переходя к сумме интегралов, найдем первообразную каждого слагаемого по формуле первообразной степенной функции (для показателей –5 и –4):

$$\int \frac{(1+x)}{x^5}dx = \int \left(\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4}\right)dx = \frac{x^{-5+1}}{-4} + \frac{x^{-4+1}}{-3} + C = -\frac{1}{4}x^{-4} - \frac{1}{3}x^{-3} + C.$$

Пример 4. $\int \frac{1-x-x^2 \cdot \sin x}{3x^2} dx$

Р е ш е н и е. Почленно разделим числитель на знаменатель и перейдем к сумме интегралов, при этом постоянные коэффициенты вынесем за знаки интегралов:

$$\int \frac{1-x-x^2 \cdot \sin x}{3x^2} dx = \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} - \int \sin x dx\right) =$$

воспользуемся таблицей первообразных для степенной функции, функции $\frac{1}{x}$ и $\sin x$:

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x} - \ln|x| + \cos x\right) + C = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \ln|x| - \cos x\right) + C.$$

Пример 5. $\int \mathrm{tg}^2 x dx$

Р е ш е н и е. Выразим тангенс через отношение синуса к косинусу $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

квадрат синуса заменим на $1 - \cos^2 x$ по основному тригонометрическому тождеству:

$$= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

почленно разделим числитель на знаменатель и перейдем к сумме интегралов:

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$$

применим формулы первообразных для $\frac{1}{\cos^2 x}$ и 1:

$$= \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

Пример 6. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

Р е ш е н и е. По формуле понижения степени $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ перепишем подынтегральную функцию:

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx =$$

перейдем к сумме интегралов, при этом коэффициент $\frac{1}{2}$ вынесем за знаки интегралов:

$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx =$$

воспользуемся таблицей интегралов для 1 и для $\cos x$:

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C.$$

Найти интеграл $\int \frac{5dx}{\sqrt{5-5x^2}}$

- $\arcsin\sqrt{5}x + C$
- $\arcsin x + C$
- $\arcsin 5x + C$
- $\sqrt{5}\arcsin x + C$