

Математика 2 семестр.

Лекция № 1.

Неопределенный интеграл.

Первообразная.

В дифференциальном исчислении по заданной функции $f(x)$ отыскивали её производную $f'(x)$. Рассмотрим обратную задачу: по заданной функции $f'(x)$ восстановить функцию $f(x)$, для которой:

$$f'(x) = f'(x).$$

Функция $f(x)$ называется первообразной для функции $f'(x)$.

Пример. $f'(x) = \cos x$, найдём первообразные для функции $f'(x)$:
 $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sin x + 5$, $f(x) = \sin x + x$.

Из примера следует, что задача об отыскании первообразной имеет не единственное решение. Если $f(x)$ является первообразной для $f'(x)$, то и $f(x) + C$ также является первообразной ($C = \text{const}$).

Теорема о разности первообразных.

Теорема. Всякая непрерывная функция имеет бесчисленное множество первообразных, причём любые две из них отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.

Доказательство. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ - две первообразные функции для $f(x)$, докажем, что $G(x) = F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Предположим, что разность между функциями $F(x)$ и $G(x)$ является функцией: $H(x) = G(x) - F(x)$, по условию теоремы

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Тогда $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Зафиксируем значение переменной x_0 , пусть C - произвольное значение. По формуле Лагранжа

$$H(x) - H(x_0) = H'(c)(x - x_0), \quad x_0 < x < x_1,$$

$$H'(c) = 0, \text{ тогда } H(x) - H(x_0) = 0, \text{ значит } H(x) = H(x_0) = \text{const}$$

Следовательно, $G(x) = F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Неопределённый интеграл.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют **неопределённым интегралом** функции и обозначают $\int f(x)dx$;

$f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

x - переменная интегрирования.

Действие отыскания неопределённого интеграла или, что то же самое, нахождение всех первообразных от данной функции, называется **интегрированием** данной функции.

Интегральная кривая.

Пусть требуется найти кривую $y = F(x)$, зная, что тангенс угла наклона касательной в каждой её точке есть заданная функция $f(x)$. Согласно геометрическому смыслу производной, тангенс угла наклона касательной в данной точке кривой равен значению производной в этой точке. Значит, нужно найти такую функцию $F(x)$, для которой $F'(x) = f(x)$. Следовательно, задача свелась к нахождению первообразной. Таким образом, $y = \int f(x) dx$, или $y = F(x) + C$. Ясно, что условию задачи удовлетворяет не одна кривая, а семейство кривых. Причем, если $y = F(x)$ одна из таких кривых, то всякая другая может быть получена из неё параллельным переносом вдоль оси OY .

Для того чтобы из данного семейства кривых выделить одну определенную кривую, требуется дополнительное условие. Например, можно потребовать, чтобы кривая проходила через заданную точку (x_0, y_0) . Координаты этой точки должны удовлетворять уравнению искомой кривой: $y_0 = F(x_0) + C$. Отсюда

$$C = y_0 - F(x_0).$$

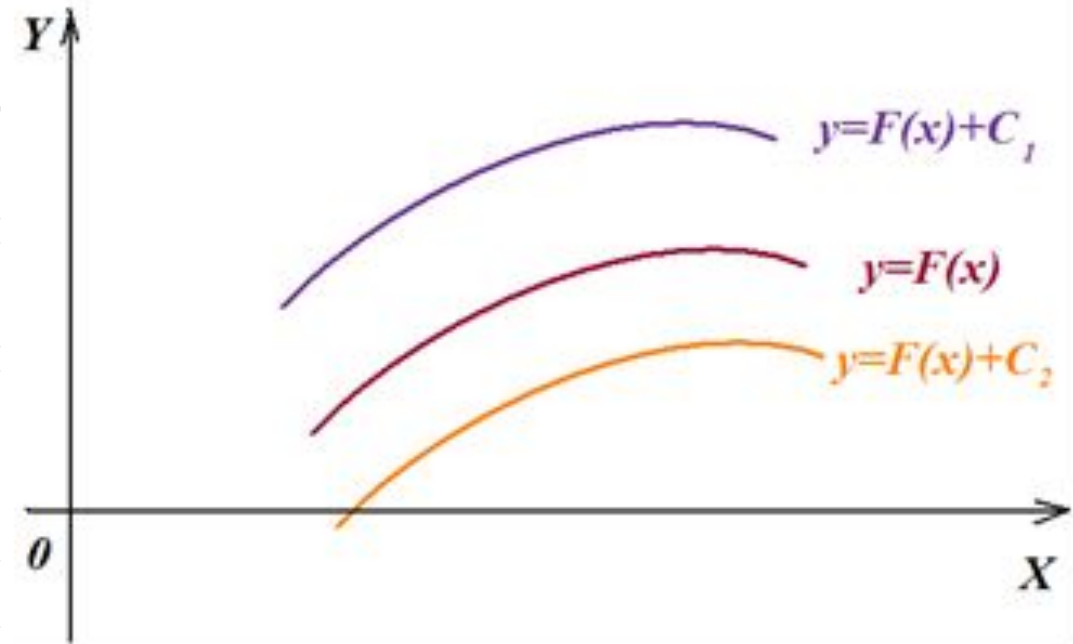


График первообразной функции от $f(x)$ называют **интегральной кривой**.

Неопределенный интеграл геометрически представляется семейством всех интегральных кривых.

Таблица интегралов.

Формулы интегрирования прямо вытекают из формул дифференцирования основных элементарных функций, каждая из них легко проверяется дифференцированием.

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, \int 0 dx = C, \int dx = x + C$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$3. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a > -1, a \neq -1, \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$6. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$7. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$8. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$9. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$10. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$11. \int \frac{1}{x^2 \pm a^2} dx = \ln|x| + \int \frac{1}{x^2 \pm a^2} dx + C$$

Взаимно - обратные действия дифференцирования и интегрирования.

Возведение в степень и извлечение корня дают примеры взаимно – обратных математических операций:

$$\sqrt[n]{x^n} = x, (\sqrt[n]{x})^n = x, x > 0.$$

Операции дифференцирования и интегрирования являются взаимно – обратными :

$$\begin{aligned} (\int f(x) dx)' &= f(x), \\ f(x) (\int f(x) dx)' &= (f(x) f'(x))' \int f(x) dx = f(x) f'(x) \int f(x) dx, \\ \int f'(x) \int f(x) dx &= \int f(x) f'(x) dx = \int f(x) dx + C. \end{aligned}$$

Основные правила интегрирования.

1. Интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx \quad (C = \text{const}).$$

3. Вид формул интегрирования не изменится, если независимую переменную x заменить любой дифференцируемой функцией от x (свойство инвариантности) :

$$x = u(x), \quad \int f(x) dx = \int f(u) du + C \rightarrow \int f(u) du = \int f(x) dx + C.$$

Методы интегрирования.

Интегрирование подстановкой.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна, функция $g(x)$ непрерывна и дифференцируема, $g'(x) \neq 0$. Заменяем переменную интегрирования $x = g(t)$:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Пример.

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \int \sin x \sin x dx = \int \sin x dx = -\cos x = -\cos x = -\frac{x^2}{2} + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C$$

Методы интегрирования.

Интегрирование по частям.

Возьмём формулу дифференциала произведения :

$$du \cdot v = u dv + v du, \quad u = u(x), \quad v = v(x),$$
$$u dv = d uv - v du,$$

Проинтегрируем последнее равенство : $\int u dv = uv - \int v du$.

Эта формула определяет метод интегрирования по частям.

Метод используют в том случае, когда функция $u = u(x)$ упрощается после дифференцирования (например, функции $\ln x$, $P_n(x)$, $\arcsin x$, $\arctg x$ и т.д.).

Пример.

$$\int x \cdot \sin 2x \cdot dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin 2x, \quad v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right\} =$$
$$-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \left(-x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C.$$

Примеры интегрирования.

Пример 1. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{x} dx$.

Используем формулу для квадрата суммы, операции с алгебраическими дробями, свойство линейности неопределённого интеграла и таблицу интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{x} dx &= \int \frac{1 + 2\sqrt{x} + x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx = \\ &= \int dx + 2 \int x^{-1/2} dx + \int dx = \ln|x| + 4\sqrt{x} + x + C. \end{aligned}$$

Примеры интегрирования.

Пример 2. Найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

Применим выделение полного квадрата, формулу линейной замены переменной и табличные интегралы:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 4} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{2} + C.$$

Пример 3. Найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} &= \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) - 4} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 - 2^2} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x + 1 - 2}{x + 1 + 2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 3} \right| + C. \end{aligned}$$

Два рассмотренных примера похожи по методу нахождения, но в итоге сводятся к разным табличным интегралам.

Интегралы от тригонометрических функций часто можно найти, применяя формулы тригонометрии для упрощения подынтегрального выражения.

Пример 4. Найдем неопределенный интеграл $\int \cos^2 x \, dx$.

Применим для упрощения подынтегрального выражения формулу понижения степени. Затем используем свойство линейности неопределенного интеграла.

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Пример 5. Найдем неопределенный интеграл $\int \sin 4x \cos 3x \, dx$.

Применим формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность.

$$\begin{aligned} \int \sin 4x \cos 3x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(4x + 3x) + \sin(4x - 3x)] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin x) \, dx = -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{2} \cos x + C. \end{aligned}$$

*Примеры интегрирования методом замены переменной.
При применении метода замены переменной следует в
последней выкладке перейти к исходной переменной.*

Пример.6. Найдем неопределенный интеграл $\int \sin^2 x \cos x dx$.

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

Пример 7. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Примеры интегрирования методом замены переменной.

Пример 8. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin e^x + C.$$

Пример 9. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2}$.

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

Пример 10. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}}$.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}} = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{3\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{3} \ln|t + \sqrt{1+t^2}| + C = \frac{1}{3} \ln|x^3 + \sqrt{1+x^6}| + C$$

*Примеры интегрирования методом
интегрирования по частям.*

Пример 11. Найдем неопределенный интеграл $\int x e^{2x} dx$.

$$\int x e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = e^{2x} dx \\ du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

Пример 12. Найдем неопределенный интеграл $\int \ln(x-1) dx$.

$$\begin{aligned} \int \ln(x-1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x-1) \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{x-1} \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(x-1) - \int \frac{x}{x-1} dx = \\ &= x \ln(x-1) - \int \frac{x-1+1}{x-1} dx = x \ln(x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = x \ln(x-1) - x - \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

Примеры интегрирования методом интегрирования по частям.

Пример 13. Найдем неопределенный интеграл

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} \quad v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C.\end{aligned}$$

Пример 14. Найдем неопределенный интеграл

$$\int x^2 \sin \frac{x}{3} dx .$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin \frac{x}{3} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \sin \frac{x}{3} \\ du = 2x dx \quad v = -3 \cos \frac{x}{3} \end{array} \right| = -3x^2 \cos \frac{x}{3} + 6 \int x \cos \frac{x}{3} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \cos \frac{x}{3} \\ du = dx \quad v = 3 \sin \frac{x}{3} \end{array} \right| = -3x^2 \cos \frac{x}{3} + 6 \left(3x \sin \frac{x}{3} - \int 3 \sin \frac{x}{3} dx \right) = \\ &= -3x^2 \cos \frac{x}{3} + 18x \sin \frac{x}{3} + 54 \cos \frac{x}{3} + C.\end{aligned}$$

В заключение заметим, что в дифференциальном исчислении производная от любой элементарной функции есть функция элементарная. Другое дело операция, обратная дифференцированию, - интегрирование. Можно привести многочисленные примеры таких элементарных функций, первообразные от которых хотя и существуют, но не являются элементарными функциями. Так, например, хотя для функций e^{-x^2} ; $\frac{\sin x}{x}$; $\frac{\cos x}{x}$; $\frac{1}{\ln x}$ существуют первообразные, но они не выражаются в элементарных функциях. Несмотря на это, все эти первообразные хорошо изучены и для них составлены подробные таблицы, помогающие практически использовать эти функции.

Если первообразная для некоторой функции не является элементарной функцией, то говорят, что *интеграл не берется в элементарных функциях*.

Интегралы от рациональных дробей.

Пример 15. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{4dx}{5x+3}$.

Используем линейную замену переменных.

$$\int \frac{4dx}{5x+3} = 4 \cdot \frac{1}{5} \int \frac{5dx}{5x+3} = \left| \begin{array}{l} u = 5x + 3 \\ du = 5dx \end{array} \right| = \frac{4}{5} \int \frac{du}{u} = \frac{4}{5} \ln|u| + C = \frac{4}{5} \ln|5x+3| + C$$

Пример 16. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{7dx}{(3x-2)^2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{7dx}{(3x-2)^2} &= 7 \cdot \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{(3x-2)^2} = \left| \begin{array}{l} u = 3x - 2 \\ du = 3dx \end{array} \right| = \frac{7}{3} \int \frac{du}{u^2} = \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{1}{u} \right) + C = \\ &= -\frac{7}{3(3x-2)} + C = -\frac{7}{9x-6} + C. \end{aligned}$$

Интегралы от рациональных дробей.

Пример 17. Найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{2x+1}{x^2+16} dx.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+16} dx &= \int \frac{2x}{x^2+16} dx + \int \frac{dx}{x^2+16} = \int \frac{d(x^2+16)}{x^2+16} + \int \frac{dx}{x^2+4^2} = \\ &= \ln|x^2+16| + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C. \end{aligned}$$

Пример 18. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{x^2}{x+1} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x+1} dx &= \int \frac{x^2-1+1}{x+1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} dx = \int \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \int x dx - \int dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Литература.

- Боронина Е.Б. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Боронина Е.Б.— Электрон. Текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/6298>. — ЭБС «IPRbooks»
- Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс [Текст] : [учебное пособие] / Д. Т. Письменный. - 9-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2010. - 603 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-4073-9
- Шипачев, В. С. Курс высшей математики [Текст] : учебник для вузов / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова ; - 4-е изд., испр. - Москва : Оникс, 2009. - 600 с. : ил. - ISBN 978-5-488-02067-2