НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ: СВОЙСТВА И МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

История возникновения интеграла

Неопределенный интеграл. Методы интегрирования

Свойства неопределенного интеграла

Табличные интегралы

Тест по теме : «Вычисление неопределенного интеграла»

История возникновения интеграла

Интегрирование прослеживается ещё в древнем Египте, примерно в 1800 г. до н. э., Московский математический папирус демонстрирует знание формулы объёма усечённой пирамиды. Первым известным методом для расчёта интегралов является метод исчерпывания Евдокса (примерно 370 до н. э.), который пытался найти площади и объёмы, разрывая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объём уже известны. Этот метод был подхвачен и развит Архимедом, и использовался для расчёта площадей парабол и приближенного расчёта площади круга. Аналогичные методы были разработаны независимо в Китае в 3-м веке н. э. Лю Хуэйем, который использовал их для нахождения площади круга. Этот метод был впоследствии использован Дзю Чонгши для нахождения объёма шара.

далее

Следующий крупный шаг в исчисление интегралов был сделан в Ираке, в XI веке, математиком Ибн ал-Хайсамом (известным как Alhazen в Европе), в своей работе «Об измерении параболического тела» он приходит к уравнению четвёртой степени. Решая эту проблему, он проводит вычисления, равносильные вычислению определённого интеграла, чтобы найти объём параболоида. Используя математическую индукцию, он смог обобщить свои результаты для интегралов от многочленов до четвёртой степени. Таким образом, он был близок к поиску общей формулы для интегралов от полиномов, но он не касается любых многочленов выше четвёртой степени.

далее

Следующий значительный прогресс в исчислении интегралов появится лишь в XVI веке. В работах Кавальери с его методом неделимых, а также в работах Ферма, были заложены основы современного интегрального исчисления. Дальнейшие шаги были сделаны в начале XVII века Барроу и Торричелли, которые представили первые намеки на связь между интегрированием и дифференцированием.

Понятие неопределенного интеграла

Неопределенным интегралом называется функция F(x) + C, содержащая произвольное постоянное C, дифференциал которой равен подынтегральному выражению f(x)dx, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

или

$$d(F(x) + C) = f(x)dx.$$

Методы интегрирования

1. Непосредственный, т.е. по таблице

2. Метод замены переменных или внесения под знак дифференциала

3. По частям

ТАБЛИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$$

Пример

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Пример

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Пример

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Пример

$$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, (a > 0)$$

Пример

$$\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + C$$

Пример

$$\int e^{x}dx = e^{x} + C$$

Пример

$$\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + C$$

Пример

далее

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

Пример

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

Пример

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$$

Пример

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

Пример

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$$

Пример

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Пример

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Пример

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

Пример

Вернуться
к методам

Свойства интеграла

1. $y = f(x) \Rightarrow F(x)$
$y = g(x) \Rightarrow G(x)$
$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) + G(x)$

$2.\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C$

$3.\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$

$4.\int dF(x) = F(x) + C;$ $\int dF(x) = \int F'(x) = \int f(x)dx = F(x) + c$

Зам.1. чтобы войти в поддифференциал необходимо от функции взять первообразную

$5.d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

В НАЧАЛО

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{6} x^6 + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \frac{dx}{x+5} = \ln|x+5| + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C,$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int e^{x+5}dx = e^{x+5} + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \frac{dx}{\sin^2 4x} = -\frac{1}{4} ctg 4x + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \frac{dx}{\cos^2 6x} = \frac{1}{6} tg 6x + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\arcsin x + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \frac{dx}{2+3x^2} = \int \frac{dx}{3(\frac{2}{3}+x^{2)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + x^2} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} arctg \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+1}} = \ln\left|3x+\sqrt{9x^2+1}\right| + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \frac{dx}{9x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right| + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \frac{dx}{\sqrt{49 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{7} + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \frac{dx}{64+x^2} = \frac{1}{8} arctg \frac{x}{8} + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right| + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \int \frac{dx}{x^2 - 3^2} = \frac{1}{2*3} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$$

вернуться
к табличным
интегралам

$$1.\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2|x|}} \left| \begin{array}{l} t=\ln|x| \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{array} \right| \Rightarrow \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \ln|x| + C$$

$$2.\int \frac{\sin xdx}{9+\cos^2 x} \left| \begin{array}{l} t=\cos x \\ dt=-\sin xdx \\ -dt=\sin xdx \end{array} \right| \Rightarrow \int -\frac{dt}{3^2+t^2} = -\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3} + C = -\frac{1}{3}arctg\frac{\cos x}{3} + C$$

$$3.\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} \left| \begin{array}{l} t=\frac{1}{x} \\ dt=-\frac{1}{x^2}dx \\ \frac{dx}{x^2}=-dt \end{array} \right| \Rightarrow \int -e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + c$$