Муниципальное бюджетное образовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №32 «Ассоциированная школа ЮНЕСКО «Эврика-развитие»

Неопределённый и определённый интегралы

Выполнила
ученица 11б класса
Лысюк Марина

2013 г.

Теорема

Если $y = F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных и все они имеют вид $y = F(x) + C$.

Определение

- Если функция *y = f(x)* имеет на промежутке *X* первообразную *y = F(x)*, то множество всех первообразных, т. е. множество функций вида *y = F(x) + C* называют неопределённым интегралом от функции *y = f(x)* и обозначают

$$\int f(x)dx$$

Таблица основных неопределённых интегралов

•

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \ (r \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$$

$$\int sin\,x = -cos\,x + C$$

$$\int cos\,x = sin\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\,x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\,a} \ (a > 0, a \neq$$

Правило 1

- Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций.

$$\int \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \right) \boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx} + \int \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx}$$

Правило 2

-

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

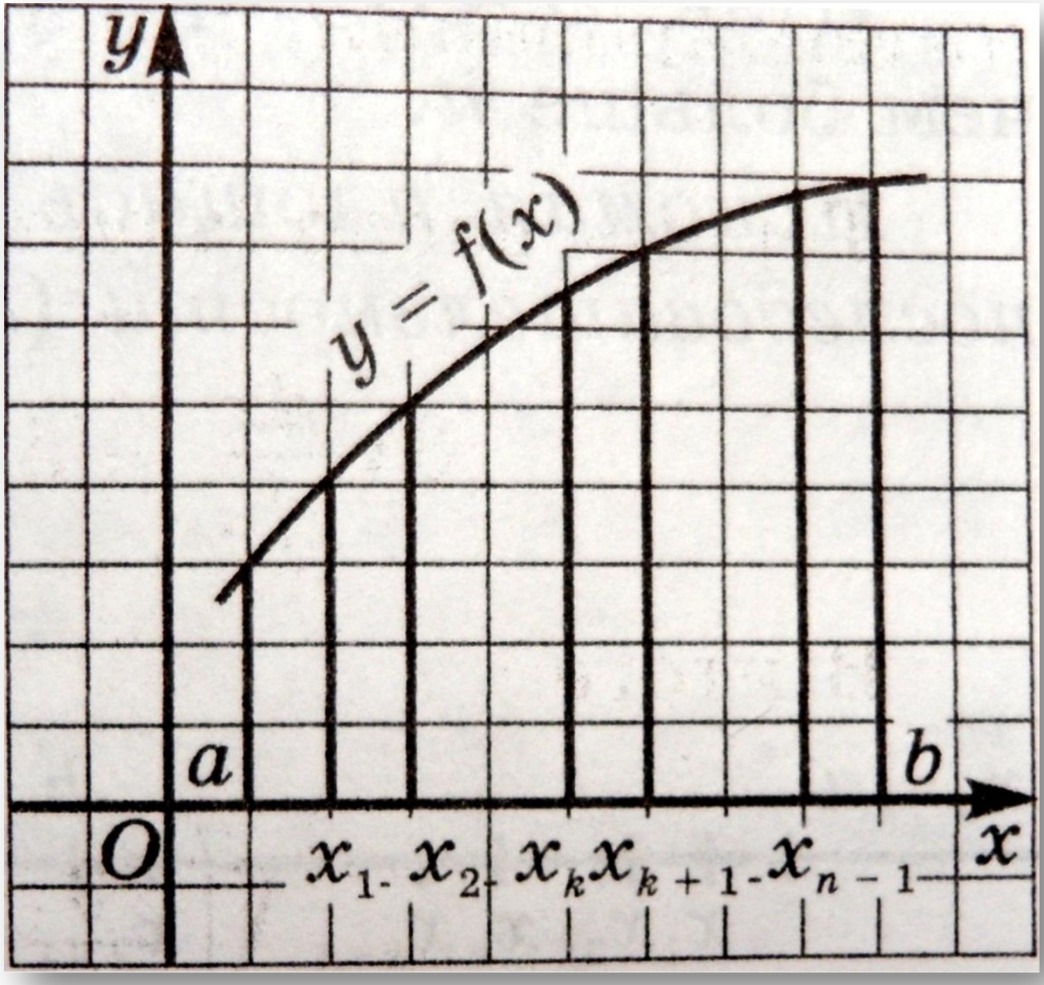
$$\int \boldsymbol{kf(x)dx} = \boldsymbol{k}\int \boldsymbol{f(x)dx}$$

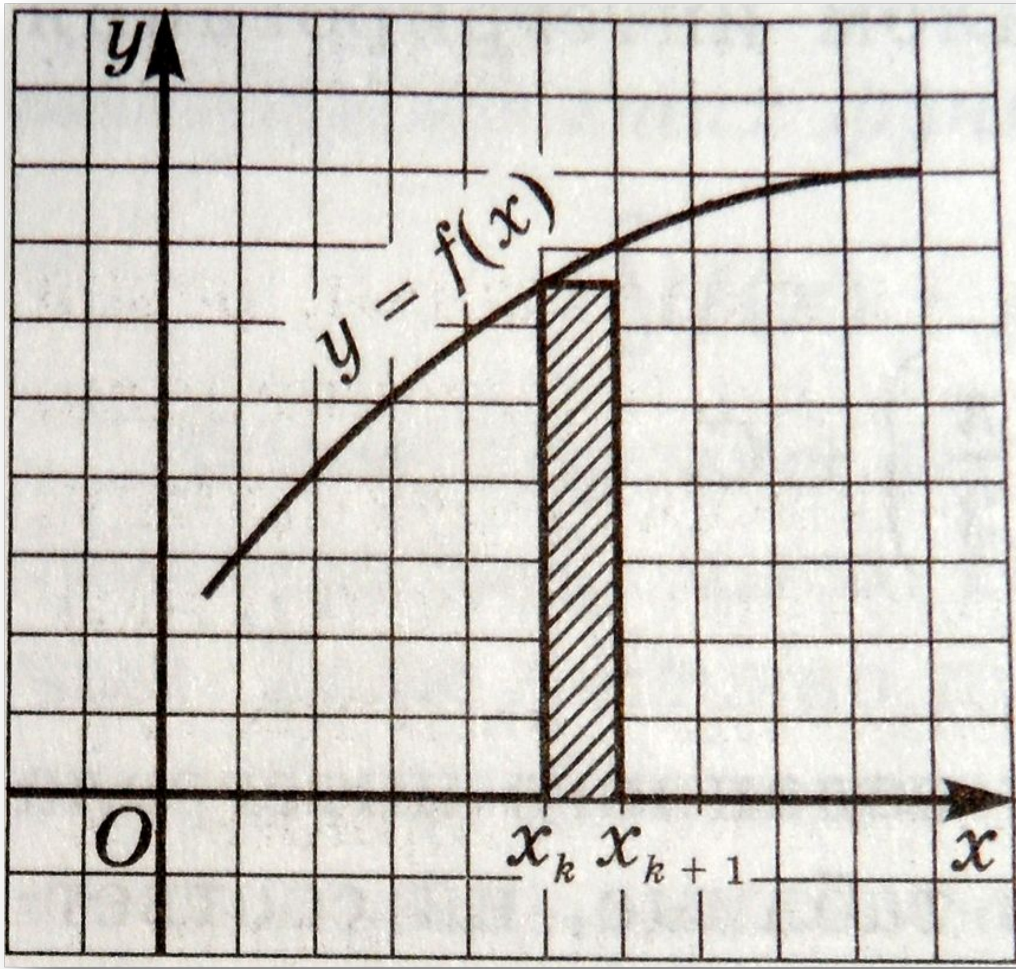
Правило 3

- Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

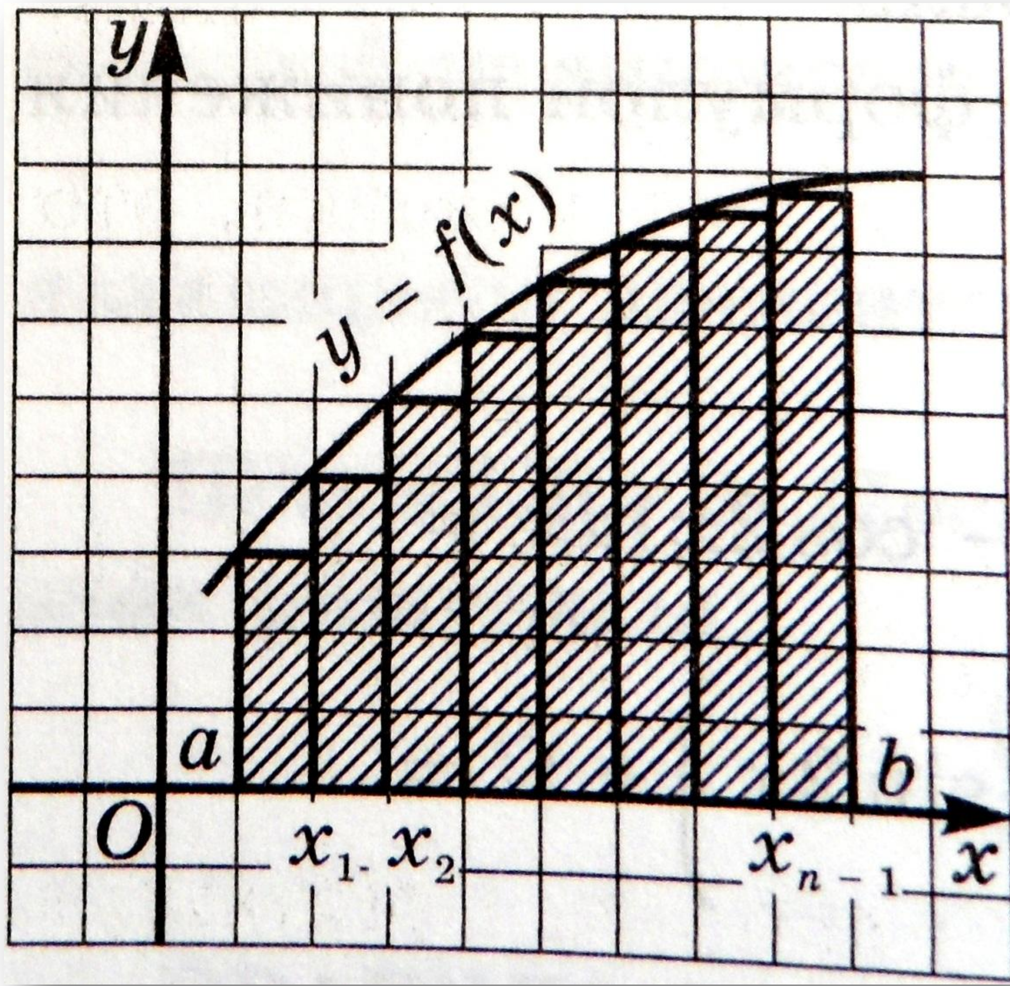
$$\int f(kx+m)dx = \frac{F(kx+m)}{k} + C$$

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции





$$S = f(x_k)\Delta x_k$$



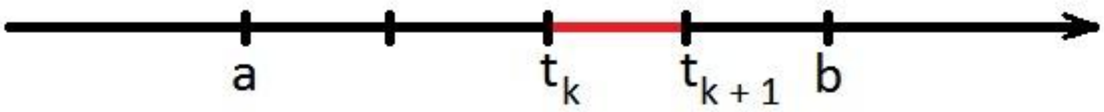
$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

Искомая площадь криволинейной трапеции равна пределу последовательности (S_n):

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Задача о перемещении точки

По прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $V = V(t)$. Найти перемещение точки за промежуток времени $[a; b]$.



$$S_k = V(t_k)\Delta t_k$$

$$S_n = V(t_0)\Delta t_0 + V(t_1)\Delta t_1 + .. + V(t_{n-1})\Delta t_{n-1}$$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Определённый интеграл

- В случае непрерывной или в случае кусочно-непрерывной функции *y = f(x)* предел S_n существует и называется определённым интегралом от функции *y = f(x)* по отрезку [*a*; *b*].

$$\int_a^b f(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбница

- Если функция *y = f(x)* непрерывна на отрезке [*a; b*], то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

где *F(x)* - первообразная для *f(x)*.

Пример 1

- Вычислить $\int_{-1}^{3} x^3 dx$.

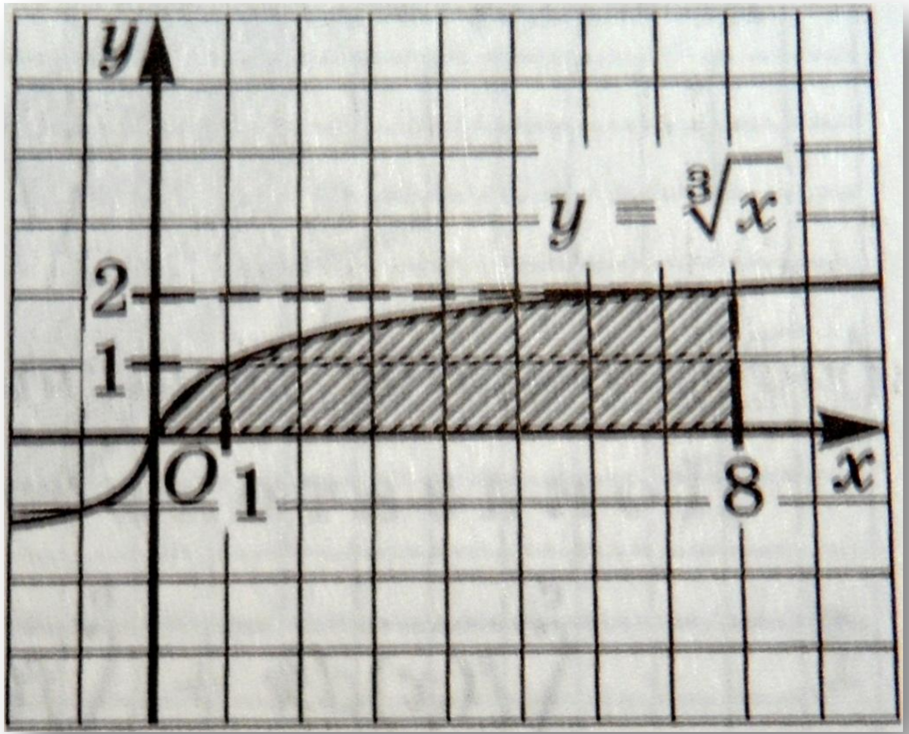
Решение.

Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$. Значит,

$$\int_{-1}^{3} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

Пример 2

- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt[3]{x}, y = 0, x = 8$.

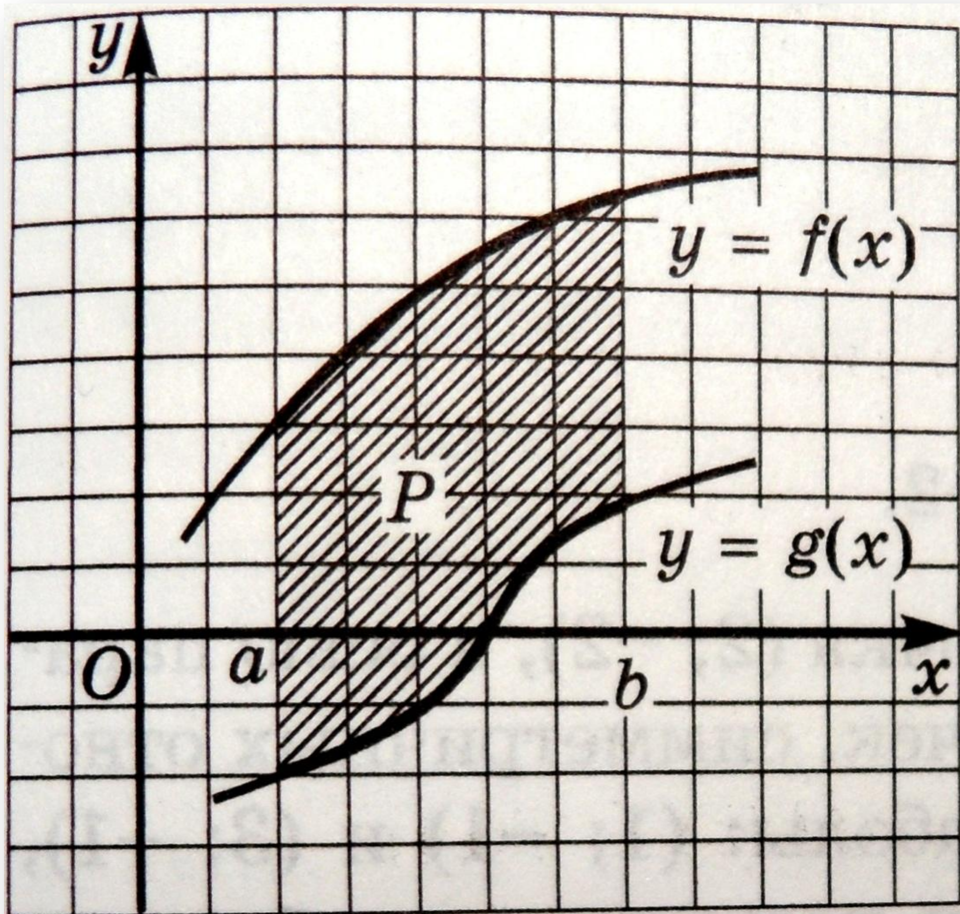


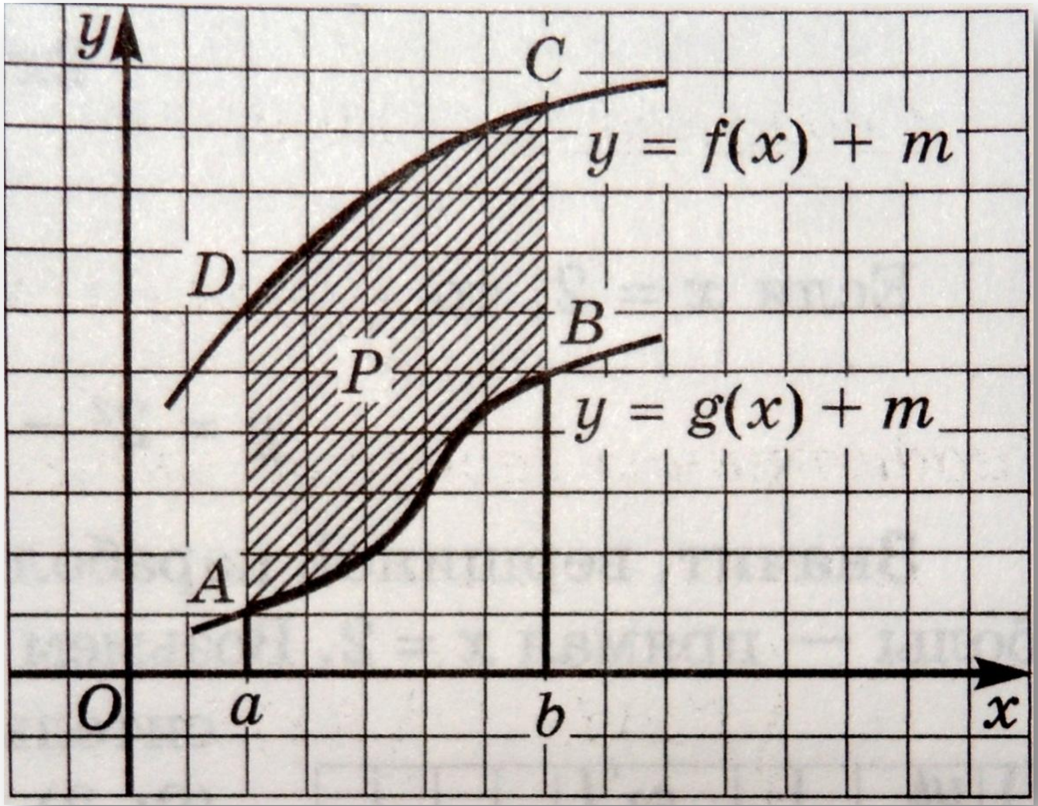
$$S = \int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \int_0^8 x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Bigg|_0^8 = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^8 =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(8^{\frac{4}{3}} - 0^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3}{4} \cdot (16 - 0) = 12.$$

Ответ: $S = 12$.

Вычисление площадей плоских фигур





$$S_P = S_{ABCD} = S_{aDCb} - S_{aABb} = \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)dx =$$

$$= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

- Площадь фигуры, ограниченной прямыми *x = a*, *x = b* и графиками функций *y = f(x), y = g(x),* непрерывных на отрезке [*a; b*] и таких, что для любого *x* из отрезка [*a; b*] выполняется неравенство *g(x) ≤ f(x),* вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$