Неопределённый интегра́л

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{9-(9-2x^2)}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{9}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \left\{ \begin{matrix} x = 3t, \\ dx = 3dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{3dt}{\sqrt{9-9t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{3} + C.$$

$$\int \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \sqrt{9-x^2}dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx =$$

$$= \int \sqrt{9-x^2}dx + \int xd\left(\sqrt{9-x^2}\right) =$$

$$= \int \sqrt{9-x^2}dx + x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}dx =$$

$$= x\sqrt{9-x^2} + C.$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C.$$

Выполнил:

тудент группы К-11

ХК ДУТ

Божко Павел

План

1. Неопределённый интегра́л;
2. Подведение под знак дифференциала;
3. Основные методы интегрирования;
4. Таблица основных неопределённых интегралов;
5. Примеры решений;
6. Источники информации;

Неопределённый интегра́л

Неопределённый интегра́л для функции $f(x)$ — это совокупность всех первообразных данной функции.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке (a,b) и $F(x)$ — её первообразная, то есть при $F'(x)=f(x)$, то

при $a < x < b$ то $\int f(x)dx = F(x) + C,$

где C — произвольная постоянная.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$ где

$u = \varphi(x)$ **— произвольная функция, имеющая непрерывную производную**

Подведение под знак дифференциала

При подведении под знак дифференциала используются следующие свойства:

$$du = d(u + C)$$

$$du = \frac{1}{a} d(au)$$

$$f'(u) \cdot du = d(f(u))$$

Основные методы интегрирования

1. ***Метод введения нового аргумента***. **Если** $\int g(x)dx = G(x) + C,$

то $\int g(u)du = G(u) + C,$ **где** $u = \varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

2. *Метод разложения.*

Если $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$, **то** $\int g(x)dx = \int g_1(x)dx + \int g_2(x)dx.$

3. *Метод подстановки*

Если $g(x)$ — **непрерывна, то, полагая** $x = \varphi(t)$,

где $\varphi(t)$ **непрерывна вместе со своей производной** $\varphi'(t)$ **, получим**

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

4. Метод интегрирования по частям

Если u и v — некоторые дифференцируемые функции от x

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Таблица основных неопределённых интегралов

$$\int 0 \cdot dx = C;$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ (a > 0, a \neq 1);$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C; \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + C; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C' (C' = \frac{\pi}{2} + C); \quad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

Слева в каждом равенстве стоит произвольная (но определённая) первообразная функция для соответствующей подынтегральной функции, справа же — одна определённая первообразная, к которой ещё прибавляется константа такая, чтобы выполнялось равенство между этими функциями.

Первообразные функции в этих формулах определены и непрерывны на тех интервалах, на которых определены и непрерывны соответствующие подынтегральные функции. Эта закономерность не случайна: как отмечено выше, всякая непрерывная на интервале функция имеет на нем непрерывную первообразную.

Примеры решений

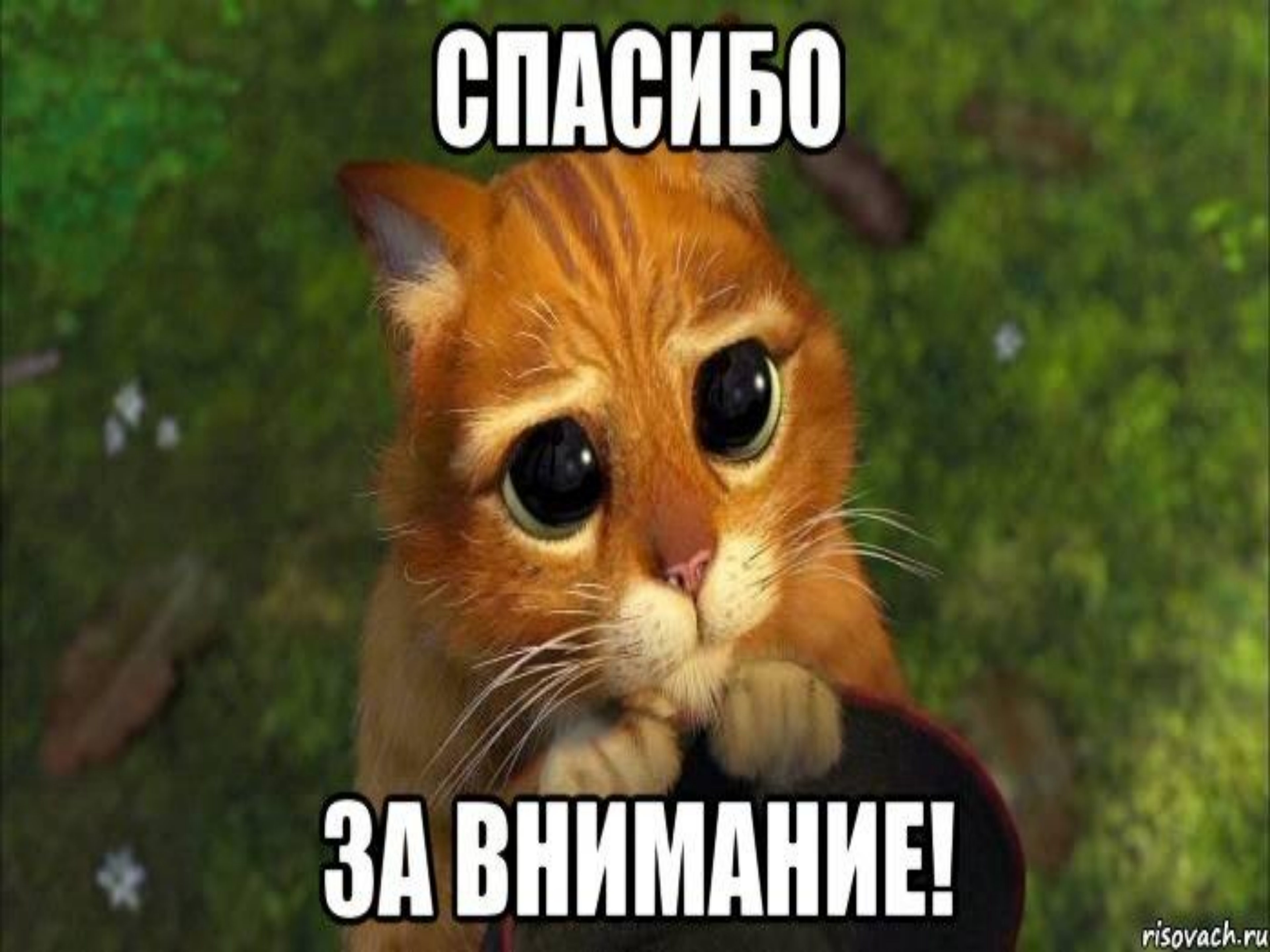
1. $$\int x^2\,dx = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

2. $$\int (a^x + \cos x)\,dx = \int a^x\,dx + \int \cos x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + \sin x + C$$

3. $$\int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C = \operatorname{arctg} x + \arcsin x + C$$

Источники информации

1. *Никольский С. М.* Глава 9. Определенный интеграл Римана // Курс математического анализа. — 1990. — Т. 1.
2. *Ильин В. А., Позняк, Э. Г.* Глава 6. Неопределенный интеграл // Основы математического анализа. — 1998. — Т. 1. — (Курс высшей математики и математической физики).
3. *Демидович Б.П.* Отдел 3. Неопределенный интеграл // Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — 1990. — (Курс высшей математики и математической физики).


СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!
risovach.ru