

Неопределённый интеграл

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{9 - (9 - 2x^2)}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{9}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = 3t, \\ dx = 3dt \end{array} \right\} = \int \frac{3dt}{\sqrt{9-9t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

$$\int \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \sqrt{9-x^2} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \\ = \int \sqrt{9-x^2} dx + \int x d(\sqrt{9-x^2}) = \\ = \int \sqrt{9-x^2} dx + x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2} dx = \\ = x\sqrt{9-x^2} + C.$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{1}{2} x\sqrt{9-x^2} + C.$$

Выполнил:
студент группы К-11
ХК ДУТ
Божко Павел





План

1. Неопределённый интеграл;
2. Подведение под знак дифференциала;
3. Основные методы интегрирования;
4. Таблица основных неопределённых интегралов;
5. Примеры решений;
6. Источники информации;





Неопределённый интеграл

Неопределённый интеграл для функции $f(x)$ — это совокупность всех первообразных данной функции.



Если функция определена и
непрерывна на промежутке (a, b) и $F(x)$ —
её первообразная, то есть при $F'(x) = f(x)$
при $a < x < b$ то $\int f(x)dx = F(x) + C$,
где C — произвольная постоянная.


$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$


$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, **то и** $\int f(u)du = F(u) + C$ **где**

$u = \varphi(x)$ — **произвольная функция,**
имеющая непрерывную
производную

A vertical sidebar on the left side of the slide contains various school-related items: a green ruler, a spiral notebook, a yellow sticky note with the letter 'B', a purple binder ring, and an open book with a red 'C' and a yellow 'M' on its pages. In the top right corner, there are several colorful pushpins (blue, green, yellow, purple) pinned to the orange background.



Подведение под знак дифференциала

При подведении под
знак **дифференциала** используются
следующие свойства:

$$du = d(u + C)$$

$$du = \frac{1}{a}d(au)$$

$$f'(u) \cdot du = d(f(u))$$



Основные методы интегрирования

1. *Метод введения нового*

аргумента. Если $\int g(x)dx = G(x) + C$,

то $\int g(u)du = G(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ —

непрерывно дифференцируемая
функция.



2. Метод разложения.

Если $y(x) = g_1(x) + g_2(x)$, то $\int g(x)dx = \int g_1(x)dx + \int g_2(x)dx$.

3. Метод подстановки

Если $y(x)$ — непрерывна, то, полагая $x = \varphi(t)$,
где $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей
производной $\varphi'(t)$, получим

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

A vertical sidebar on the left side of the slide contains various school supplies: a green ruler, a spiral notebook, a yellow sticky note with the letter 'B', a purple binder ring, and an open book with a red 'C' and yellow 'M' on its pages. In the top right corner, there are several colorful pushpins (blue, green, yellow, purple) pinned to the orange background.

4. Метод интегрирования по частям

Если u и v — некоторые дифференцируемые функции x

от

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Таблица основных неопределённых интегралов

$$\int 0 \cdot dx = C; \quad \int 1 \cdot dx = x + C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1);$$



$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C' \quad (C' = \frac{\pi}{2} + C); \quad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$



Слева в каждом равенстве стоит произвольная (но определённая) **первообразная** функция для соответствующей подынтегральной функции, справа же — одна определённая первообразная, к которой ещё прибавляется константа такая, чтобы выполнялось равенство между этими функциями.



Первообразные функции в этих формулах определены и непрерывны на тех интервалах, на которых определены и непрерывны соответствующие подынтегральные функции. Эта закономерность не случайна: как отмечено выше, всякая непрерывная на интервале функция имеет на нем непрерывную первообразную.

Примеры решений

$$1. \int x^2 dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

$$2. \int (a^x + \cos x) dx = \int a^x dx + \int \cos x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \sin x + C$$

$$3. \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C = \operatorname{arctg} x + \arcsin x + C$$



Источники информации

1. **Никольский С. М.** Глава 9. Определенный интеграл Римана // Курс математического анализа. — 1990. — Т. 1.
2. **Ильин В. А., Позняк, Э. Г.** Глава 6. Неопределенный интеграл // Основы математического анализа. — 1998. — Т. 1. — (Курс высшей математики и математической физики).
3. **Демидович Б.П.** Отдел 3. Неопределенный интеграл // Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — 1990. — (Курс высшей математики и математической физики).

СПАСИБО

ЗА ВНИМАНИЕ!