

# Неопределённый интеграл

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{9 - (9 - 2x^2)}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{9}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = 3t, \\ dx = 3dt \end{array} \right\} = \int \frac{3dt}{\sqrt{9-9t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

$$\int \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \sqrt{9-x^2} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \\ = \int \sqrt{9-x^2} dx + \int x d(\sqrt{9-x^2}) = \\ = \int \sqrt{9-x^2} dx + x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2} dx = \\ = x\sqrt{9-x^2} + C.$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{1}{2} x\sqrt{9-x^2} + C.$$

Выполнил:  
студент группы К-11  
ХК ДУТ  
Божко Павел





# План

1. Неопределённый интеграл;
2. Подведение под знак дифференциала;
3. Основные методы интегрирования;
4. Таблица основных неопределённых интегралов;
5. Примеры решений;
6. Источники информации;





# Неопределённый интеграл

Неопределённый интеграл для функции  $f(x)$  — это совокупность всех первообразных данной функции.



Если функция определена и  
непрерывна на промежутке  $(a, b)$  и  $F(x)$  —  
её первообразная, то есть при  $F'(x) = f(x)$   
при  $a < x < b$  то  $\int f(x)dx = F(x) + C$ ,  
где  $C$  — произвольная постоянная.



$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

**Если**  $\int f(x)dx = F(x) + C$  , **то и**  $\int f(u)du = F(u) + C$  **где**  
 $u = \varphi(x)$  — **произвольная функция,**  
**имеющая непрерывную**  
**производную**

A vertical sidebar on the left side of the slide contains various school-related items: a green ruler, a spiral notebook, a yellow sticky note with the letter 'B', a purple binder ring, and a white notebook with a red 'C' and yellow sticky notes. In the top right corner, there are several colorful pushpins (blue, green, yellow, purple) pinned to the orange background.

# Подведение под знак дифференциала



При подведении под  
знак **дифференциала** используются  
следующие свойства:

$$du = d(u + C)$$

$$du = \frac{1}{a}d(au)$$

$$f'(u) \cdot du = d(f(u))$$





# Основные методы интегрирования

## 1. *Метод введения нового*

*аргумента.* Если  $\int g(x)dx = G(x) + C$ ,

то  $\int g(u)du = G(u) + C$ , где  $u = \varphi(x)$  —

непрерывно дифференцируемая  
функция.



## 2. Метод разложения.

Если  $y(x) = g_1(x) + g_2(x)$ , то  $\int g(x)dx = \int g_1(x)dx + \int g_2(x)dx$ .

## 3. Метод подстановки

Если  $y(x)$  — непрерывна, то, полагая  $x = \varphi(t)$ ,  
где  $\varphi(t)$  непрерывна вместе со своей  
производной  $\varphi'(t)$ , получим

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$



A vertical sidebar on the left side of the slide contains various school supplies: a green ruler, a spiral notebook, a yellow sticky note with the letter 'B', a purple binder ring, and an open book with a red 'C' and yellow 'M' on its pages. In the top right corner, there are several colorful pushpins (blue, green, yellow, purple) pinned to the orange background.

## 4. Метод интегрирования по частям

Если  $u$  и  $v$  — некоторые дифференцируемые функции  $x$

от

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

# Таблица основных неопределённых интегралов

$$\int 0 \cdot dx = C; \quad \int 1 \cdot dx = x + C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1);$$



$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C' \quad (C' = \frac{\pi}{2} + C); \quad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$



Слева в каждом равенстве стоит произвольная (но определённая) **первообразная** функция для соответствующей подынтегральной функции, справа же — одна определённая первообразная, к которой ещё прибавляется константа такая, чтобы выполнялось равенство между этими функциями.



**Первообразные функции в этих формулах определены и непрерывны на тех интервалах, на которых определены и непрерывны соответствующие подынтегральные функции. Эта закономерность не случайна: как отмечено выше, всякая непрерывная на интервале функция имеет на нем непрерывную первообразную.**

# Примеры решений

$$1. \int x^2 dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

$$2. \int (a^x + \cos x) dx = \int a^x dx + \int \cos x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \sin x + C$$

$$3. \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C = \arctg x + \arcsin x + C$$





# Источники информации

1. **Никольский С. М.** Глава 9. Определенный интеграл Римана // Курс математического анализа. — 1990. — Т. 1.
2. **Ильин В. А., Позняк, Э. Г.** Глава 6. Неопределенный интеграл // Основы математического анализа. — 1998. — Т. 1. — (Курс высшей математики и математической физики).
3. **Демидович Б.П.** Отдел 3. Неопределенный интеграл // Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — 1990. — (Курс высшей математики и математической физики).



**СПАСИБО**

**ЗА ВНИМАНИЕ!**