Непараметрический дисперсионный анализ

Лекция №10
для студентов 2 курса,
обучающихся по специальности 060609 – Медицинская кибернетика
доц. Шапиро Л.А.
Красноярск, 2015 г.

План лекции:

- Актуальность темы.
- Непараметрический дисперсионный анализ для зависимых выборок.
- Непараметрический дисперсионный анализ для независимых выборок.
- Критерий Колмогорова-Смирнова.
- Заключение.

Сравнение более двух зависимых выборок.

Критерий Фридмана (χ^2) - это непараметрический аналог дисперсионного анализа повторных измерений (ANOVA).

Проверяется гипотеза о различии более двух зависимых выборок по уровню выраженности изучаемого признака.

1. Результаты наблюдения у каждого объекта упорядочиваются (по строке). Причем отдельно упорядочиваем значения у каждого объекта независимо от всех остальных. Таким образом получается столько упорядоченных рядов, сколько объектов участвует в исследовании.
2. Вычисляется сумма рангов для каждого уровня фактора (по столбцам).
3. Вычисляется эмпирическое значение критерия **χ^2** - Фридмана

$$\chi^2 = \left[\frac{12}{Nk(k+1)} \sum_{i=1}^{k} R_i^2 \right] - 3N(k+1), \quad df = k-1$$

Чем больше различаются зависимые выборки по изучаемому признаку, тем больше эмпирическое значение критерия **χ^2** –Фридмана.

где N-число объектов, k-число уровней фактора (повторных измерений), R_i-сумма рангов для соответствующего уровня i.

4. Находится $\chi^2_{крит}$ для df=k-1 и α=0,05.

При k=3, N>9 или k>3, N>4 пользуются обычной таблицей распределения χ^2 .

При k=3, N<10 или k=4, N<5 пользуются дополнительной таблицей критических значений χ^2- Фридмана.

5. Определяется уровень значимости.

Если $\chi^2_{эмп} \geq \chi^2_{крит}$ нулевая гипотеза отвергается. Различия статистически значимы.

Если $\chi^2_{эмп} < \chi^2_{крит}$ нулевая гипотеза не отвергается. Различия статистически не значимы.

Если разброс сумм велик и различия статистически значимы, переходим к межгрупповым сравнениям по критерию Вилкоксона с поправкой Бонферрони.

Пример:

Результаты тестирования студентов по семестрам

№	1 семестр	2 семестр	3 семестр	4 семестр
1	6	14	5	14
2	11	5	4	12
3	12	8	7	10
4	8	10	11	12
5	5	14	10	14
6	10	7	6	12

H_0- результаты тестирования по семестрам статистически значимо не различаются

Ранжируем по строкам

№				
1	5	6	14	14
Ранг	1	2	3,5	3,5
2	4	5	11	12
Ранг	1	2	3	4
3	7	8	10	12
Ранг	1	2	3	4
4	8	10	11	12
Ранг	1	2	3	4
5	5	10	14	14
Ранг	1	2	3,5	3,5
6	6	7	10	12
Ранг	1	2	3	4

Вычислим сумму рангов для каждого семестра R_i

№	1сем	ранг	2 сем	ранг	3 сем	ранг	4 сем	ранг
1	6	2	14	3,5	5	1	14	3,5
2	11	3	5	2	4	1	12	4
3	12	4	8	2	7	1	10	3
4	8	1	10	2	11	3	12	4
5	5	1	14	3,5	10	2	14	3,5
6	10	3	7	2	6	1	12	4
Сумма рангов		14		15		9		22

Вычислим эмпирическое значение критерия χ^2 -Фридмана

$$\chi^2_{эмп} = \left[\frac{12}{6 \cdot 4(4+1)}\left(14^2 + 15^2 + 9^2 + 22^2\right)\right] - 3 \cdot 6(4+1) = 8{,}6$$

$$df = 4 - 1$$

Найдем $\chi^2_{крит}$ для df=3 и α=0,05. $\chi^2_{крит}$=7,815
Так как 8,6 > 7,815 нулевая гипотеза отвергается.

Различия результатов тестирования по семестрам статистически значимы на уровне α<0,05.

По каким семестрам результаты различаются, проверяем по критерию Вилкоксона с поправкой Бонферрони:

T_{12} T_{13} T_{14} T_{23} T_{24} T_{34}

Сравнение более двух независимых выборок. Критерий Краскэла-Уоллиса.

Критерий Краскэла-Уоллиса (H) - это непараметрический аналог однофакторного дисперсионного анализа для независимых выборок.

Так же как критерий Манна-Уитни U показывает насколько совпадают (пересекаются) несколько рядов значений измеренного признака. Чем меньше совпадений, тем больше различаются ряды, соответствующие сравниваемым выборкам.

1. Значения выборок объединяются в один упорядоченный ряд.
2. Значения объединенного ряда ранжируются.
3. Записываются ранги отдельно для каждой выборки.
4. Вычисляются суммы рангов для каждой выборки.
5. Вычисляется эмпирическое значение критерия $H_{эмп}$ по формуле:

$$H_{эмп} = \left[\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} \right] - 3(N+1)$$

N-суммарная численность всех выборок, k-количество сравниваемых выборок, R_i-сумма рангов для выборки i, n_i-численность выборки i.

Чем сильнее различаются выборки, тем больше критерий H и тем меньше уровень значимости.

6. Находится критическое значение критерия $H_{крит}$ (α=0,05, df=k-1)

Если сравниваются 3 выборки и объем каждой выборки меньше 5, пользуются таблицами критических значений H-Краскэла-Уоллиса.

Если объем каждой выборки больше 5 и число выборок больше трех, пользуются таблицами распределения χ^2 .

7. Определяем уровень значимости.

Если $\chi^2_{эмп} \geq \chi^2_{крит}$ нулевая гипотеза отвергается. Различия статистически значимы.

Если $\chi^2_{эмп} < \chi^2_{крит}$ нулевая гипотеза не отвергается. Различия статистически не значимы.

Пример:

№	1 группа		2 группа		3 группа	
1	3	1	5	3	14	12
2	4	2	9	7	16	14
3	6	4	12	10	17	15
4	7	5	15	13		
5	8	6	19	16		
6	10	8				
7	11	9				
8	13	11				
		R_1=46		R_2=49		R_3=41

группа	Балл	Ранг
1	3	1
1	4	2
2	5	3
1	6	4
1	7	5
1	8	6
2	9	7
1	10	8
1	11	9
2	12	10
1	13	11
3	14	12
2	15	13
3	16	14
3	17	15
2	19	16

Проверяем правильность расчетов.

Общая сумма рангов должна равняться: $N(N+1)/2=16 \cdot 17/2=136$

$R_1+R_2+R_3=46+49+41=136$

Вычисляем H:

$$H_{эмп}=\left[\frac{12}{16(16+1)}\left(\frac{46^2}{8}+\frac{49^2}{5}+\frac{41^2}{3}\right)\right]-3(16+1)=6,575$$

По таблице критических значений находим χ^2 для $\alpha=0,05$ и $df=3-1=2$ $\chi^2_{крит}=5,992$

Так как 6,575 > 5,992 нулевая гипотеза отвергается. Различия в группах статистически значимы.

По каким группам результаты различаются, проверяем по критерию Манна-Уитни с поправкой Бонферрони:

U_{12} U_{13} U_{23}

Критерий Колмогорова-Смирнова

Критерий Колмогорова-Смирнова используется для сравнения эмпирического распределения с теоретическим или двух эмпирических распределений друг с другом.

При применении этого критерия сравниваются теоретическая $F(x)$ и эмпирическая $F_n(x)$ функции распределения случайной величины (накопленные частоты).

Если разность накопленных частот в двух распределениях оказывается большой, то различия между двумя распределениями являются существенными.

В качестве меры расхождения между теоретической $F(x)$ и эмпирической $F_n(x)$ функциями распределения непрерывной случайной величины X используется модуль максимальной разности

$D_n = \max|F(x) - F_n(x)|$.

Процедура расчетов

1. Данные в выборке ранжируются по возрастанию.

2. Вычисляются кумулятивные разности:

$$D_i = F(x_i) - F_n(x_i)$$

3. Находится абсолютное наибольшее значение кумулятивных разностей $\left|D_i\right|_{max}$

4. Вычисляется значение D критерия Колмогорова-Смирнова и сравнивается с соответствующим табличным значением.

$$D = \left|D_i\right|_{max} / n$$

Пример 1. Равномерное распределение.

У студентов в возрасте от 19 до 22 лет проводился тест Люшера в 8-цветном варианте. Установлено, что желтый цвет предпочитается чаще, чем отвергается. Можно ли утверждать, что распределение желтого цвета по 8 позициям у здоровых испытуемых отличается от равномерного? Сумма эмпирических частот равна 112.

Следовательно, $f_{теор}$ =112/8=14

Градации цвета	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{эмп}$	24	25	13	8	15	10	9	8
$f_{теор}$	14	14	14	14	14	14	14	14

Упорядочим эмпирические частоты по возрастанию:

8 8 9 10 13 15 24 25

Найдем функции распределения вероятностей (накопленные частоты):

Градации цвета	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_{теор}$	14	28	42	56	70	84	98	112
$F_{эмп}$	8	16	25	35	48	63	87	112
$\lvert F_{теор}-F_{эмп} \rvert$	6	12	17	21	22	21	11	

Эмпирическое значение критерия равно:

$$D_{эмп} = \left|D_i\right|_{\max} / n = 22/112 = 0{,}196$$

Критическое значение критерия находим по таблице.

Если число элементов выборки больше 100, критические значения критерия Колмогорова-Смирнова вычисляются по формулам:

для $\alpha=0{,}05$ $D_{кр}=1{,}36/\sqrt{n}$

для $\alpha=0{,}01$ $D_{кр}=1{,}63/\sqrt{n}$

Так как $D_{кр}=1{,}36/\sqrt{112}=0{,}128$; $D_{кр}=1{,}63/\sqrt{112}=0{,}154$

$D_{эмп} > D_{кр}$ $0{,}196>0{,}154$. Нулевая гипотеза отвергается, распределение желтого цвета по 8 позициям отличается от равномерного.

Для применения критерия необходимо выполнение следующих условий:

1. Измерения должны быть проведены в шкале интервалов и отношений
2. Выборки должны быть случайными и независимыми
3. Эмпирические данные должны допускать упорядочение по возрастанию или убыванию
4. Суммарный объем двух выборок ≥ 50. С увеличением объема выборки точность критерия повышается.

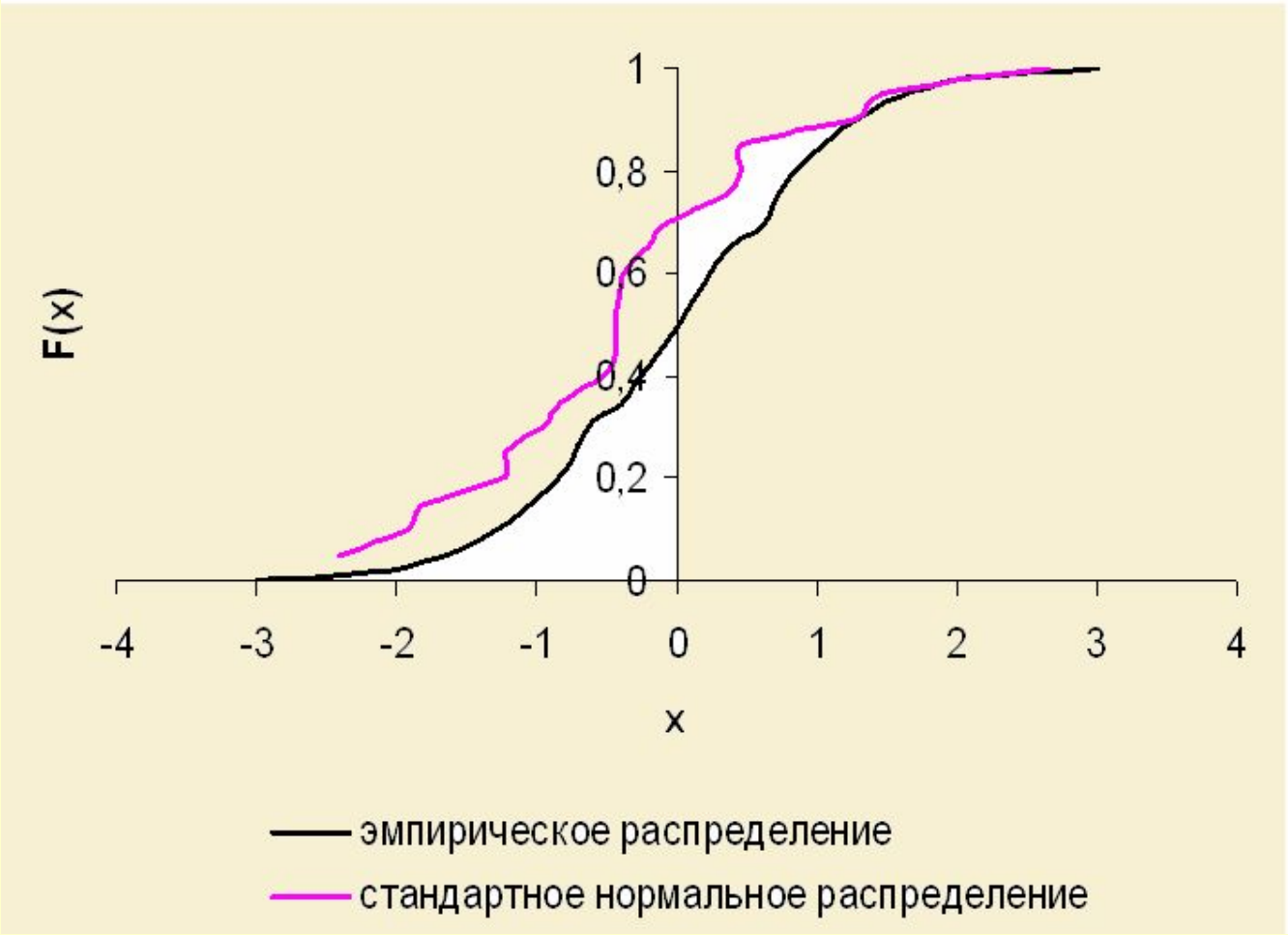
Пример 2: Нормальное распределение

0,33	**-0,52**	**-2,41**	**-1,93**	**0,46**	**-0,44**	**-0,07**
-0,38	**0,48**	**1,29**	**-1,82**	**-1,23**	**-0,21**	**2,66**
-1,22	**-0,41**	**-0,95**	**1,47**	**-0,83**	**-0,43**	

Среднее арифметическое = -0,308; дисперсия = 1,47, стандартное отклонение = 1,28.

Нулевая гипотеза: рассматриваемое распределение F(x) является нормальным с нулевым средним и единичной дисперсией.

Функции распределения



Процедура расчетов

1. Данные в выборке ранжируются по возрастанию.

2. Вычисляются кумулятивные разности:

$$D_i = R_i - n\Phi(x_i)$$

3. Находится абсолютное наибольшее значение кумулятивных разностей $\left|D_i\right|_{max}$

4. Вычисляется значение D критерия Колмогорова-Смирнова и сравнивается с соответствующим табличным значением.

$$D = \left|D_i\right|_{max} / n$$

Наблюде-ние	Ранг (R_i)	Ожидаемое $n \cdot \Phi(x_i)$	Раз-ность	Наблюде-ние	ранг	Ожида-емое	разность
-2,41	1	0,16	0,84	-0,41	11	6,82	4,18
-1,93	2	0,54	1,46	-0,38	12	7,04	4,96
-1,82	3	0,69	2,31	-0,21	13	8,34	4,66
-1,23	4	2,19	1,81	-0,07	14	9,44	4,56
-1,22	5	2,22	2,78	0,33	15	12,59	2,41
-0,95	6	3,42	2,58	0,46	16	13,54	2,46
-0,83	7	4,07	3,93	0,48	17	13,69	3,31
-0,52	8	6,03	2,97	1,29	18	18,03	-0,03
-0,44	9	6,6	3,4	1,47	19	18,58	0,42
-0,43	10	6,67	3,33	2,66	20	19,92	0,08

$D=4,96/20 =0,248 < D_{крит} = 0,304$ ($\alpha=0,05$); нулевая гипотеза не отклоняется. Данные подчиняются нормальному закону распределения.

Заключение

Таким образом, нами рассмотрены основы непараметрического дисперсионного анализа, применение критерия Колмогорова-Смирнова

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

Основная литература:

- Попов А.М. Теория вероятней и математическая статистика /А.М. Попов, В.Н. Сотников. – М.: ЮРАЙТ, 2011. – 440 с.
- Герасимов А. Н. Медицинская статистика: учебное пособие / А. Н. Герасимов. – М. : Мед. информ. агентство, 2007. – 480 с.
- Балдин К. В. Основы теории вероятностей и математической статистики : учебник / К. В. Балдин. – М. : Флинта, 2010. – 488с.

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ