

# *Непрерывность функций*

## Лекция 3

# Непрерывность

Функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $X$ , называется *непрерывной* в точке  $x_0$ , если  $x_0 \in X$

1) она определена в этой точке,

2) существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и

3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

# Условие непрерывности

Существование  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  равносильно тому,

что существуют равные друг другу левосторонний и правосторонний пределы функции при  $x \rightarrow x_0$ , равные к тому же и значению функции в точке, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

# **Непрерывность на множестве**

Говорят, что функция **непрерывна на множестве  $X$** , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если функция непрерывна в каждой точке отрезка  $[a, b]$ , то говорят, что она **непрерывна на этом отрезке**, причем непрерывность в точке  $a$  понимается как непрерывность справа, а непрерывность в точке  $b$  – как непрерывность слева.

# Непрерывность

Теперь переформулируем определение непрерывности в других терминах.

Обозначим  $x - x_0 = \Delta x$  и назовем его **приращением аргумента** в точке  $x_0$  ,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \Delta y$$

будем называть **приращением функции** в точке .

# Непрерывность

**Теорема.** Функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда бесконечно **малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции** в этой точке, то есть если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

# Теоремы о непрерывных функциях

## Теорема.

Пусть заданные на одном и том же множестве  $X$  функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ .

Тогда функции

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

непрерывны в точке  $x_0$ , если знаменатель не равен нулю в этой точке:

$$g(x_0) \neq 0$$

# ***Теоремы о непрерывных функциях***

***Теорема (о непрерывности сложной функции).*** Пусть функция  $y = \varphi(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , а функция  $Z = f(y)$  непрерывна в точке  $y_0 = f(x_0)$ . Тогда сложная функция  $Z = f(\varphi(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ .



# **Непрерывность элементарных функций**

Всевозможные арифметические комбинации простейших элементарных функций, которые рассматривают в школьном курсе алгебры и начал анализа, мы будем называть **элементарными функциями**. Например,

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - \sin^2 x$$

является элементарной.

**Все элементарные функции непрерывны в области определения**

# Разрывы функций

Дадим теперь **классификацию точек разрыва функций**. Возможны следующие случаи.

1. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$  существуют и конечны, но не равны друг другу, то точку  $x_0$  называют **точкой разрыва первого рода**. При этом величину  $[f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]$  называют скачком функции в точке  $x_0$ .

# Пример

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

Эта функция может претерпевать разрыв только в точке 0, где происходит переход от одного аналитического выражения к другому, а в остальных точках области определения функция непрерывна.

# Решение

Из условия непрерывности следует:

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} x^2 = 0,$$

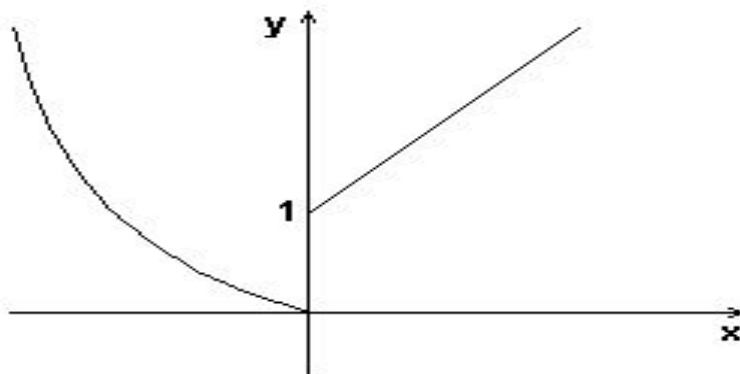
$$f(0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x + 1) = 1.$$

Таким образом, в точке 0 функция претерпевает разрыв 1-го рода со скачком 1.

# График функции

На рисунке изображена функция, имеющая разрыв 1-го рода в начале координат.



# Разрывы функций

2. Если в точке  $x_0$   $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ , но в точке  $x_0$  функция либо не определена, либо  $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , то эта точка является **точкой устранимого разрыва**.

Последнее объясняется тем, что если в этом случае **доопределить** или **видоизменить** функцию, положив

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x),$$

то получится непрерывная в точке функция.

# Разрывы функций

3. Точка разрыва функции, не являющаяся точкой разрыва первого рода или точкой устранимого разрыва, является **точкой разрыва второго рода**.

Очевидно, что точки разрыва второго рода - это точки, в которых функция стремится к бесконечности. Например, в точке  $x=1$  имеет разрыв 2-го рода функция  $y = \frac{1}{x-1}$ .

# Пример

Исследуем функцию  $f(x) = 3^{\frac{1}{1-x}}$ . Как элементарная функция она всюду непрерывна, кроме точки  $x=1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 3^{\frac{1}{1-x}} = 3^{\frac{1}{1-1+0}} = 3^{+\infty} = +\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} 3^{\frac{1}{1-x}} = 3^{\frac{1}{1-1-0}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = 0$$

Имеем разрыв 2-го рода с бесконечным скачком.



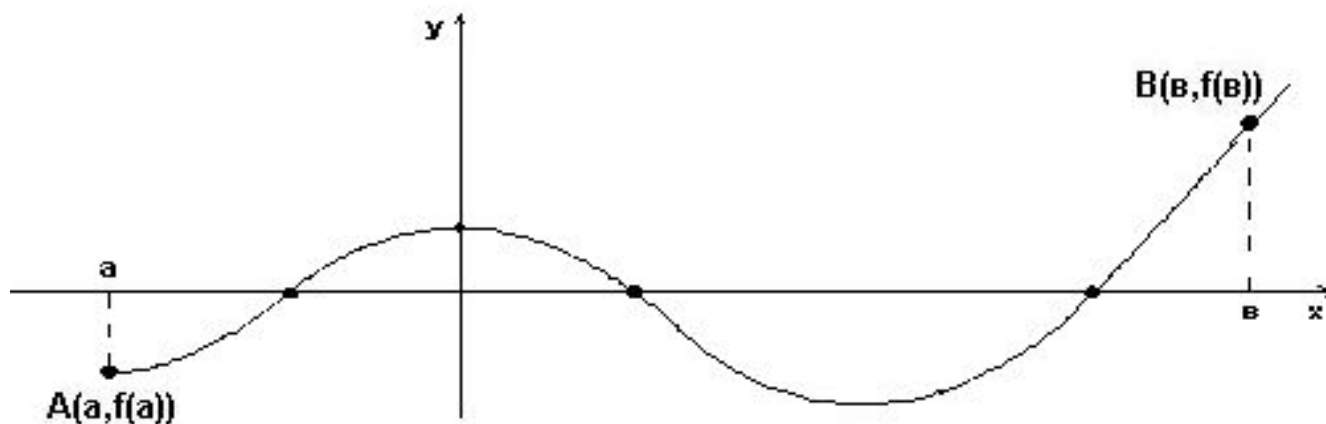
***Первая теорема Больцано-Коши об  
обращении функции в нуль.*** Пусть

функция  $f(x)$  определена и  
непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и на  
концах этого отрезка принимает  
значения различных знаков, т. е.

$f(a) \cdot f(b) < 0$ . Тогда существует точка  
 $c \in (a, b)$  такая, что  $f(c) = 0$ .

Проиллюстрируем теорему.

Из рисунка видно, что функция имеет три нуля, то есть три точки, в которых она обращается в нуль.



## **Вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении функции.**

Пусть функция определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и на концах этого отрезка принимает неравные значения  $f(a) \neq f(b)$ . Тогда, каково бы ни было число  $\mu$  между числами  $f(a)$  и  $f(b)$ , найдется точка  $c \in (a, b)$  такая, что  $f(c) = \mu$ .

## ***Теорема 1 Вейерштрасса.***

Если функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она на этом отрезке ограничена, то есть существуют числа  $m$  и  $M$  такие, что  $m \leq f(x) \leq M$  для любого  $x \in [a, b]$

## ***Теорема 2 Вейерштрасса.***

Если функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она достигает на этом отрезке своих наименьшего и наибольшего значений (то есть существуют такие  $x_1$  и  $x_2$  на отрезке  $[a, b]$ , что для любого  $x \in [a, b]$ , т. е. для  $a \leq x \leq b$ , выполняется условие

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad .$$