Непрерывность функций

Лекция 3

Непрерывность

Функция *f(x),* определенная на множестве *X*, называется *непрерывной в точке* x_0 , если $x_0 \in X$

1)она определена в этой точке,

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Условие непрерывности

Существование $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ равносильно тому,

что существуют равные друг другу левосторонний и правосторонний пределы функции при $x \to x_0$, равные к тому же и значению функции в точке, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Непрерывность на множестве

Говорят, что функция ***непрерывна на множестве X,*** если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если функция непрерывна в каждой точке отрезка [*a*, *b*], то говорят, что она ***непрерывна на этом отрезке***, причем непрерывность в точке *a* понимается как непрерывность справа, а непрерывность в точке *b* – как непрерывность слева.

Непрерывность

Теперь переформулируем определение непрерывности в других терминах. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$ и назовем его ***приращением аргумента*** в точке x_0 ,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \Delta y$$

будем называть ***приращением функции*** в точке .

Непрерывность

Теорема. Функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда бесконечно ***малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции*** в этой точке, то есть если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Теоремы о непрерывных функциях

Теорема.

Пусть заданные на одном и том же множестве X функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

непрерывны в точке x_0, если знаменатель не равен нулю в этой точке:

$$g(x_0) \neq 0.$$

Теоремы о непрерывных функциях

Теорема (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $Z = f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $Z = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Непрерывность элементарных функций

Всевозможные арифметические комбинации простейших элементарных функций, которые рассматривают в школьном курсе алгебры и начал анализа, мы будем называть ***элементарными функциями.*** Например,

$$y = \sqrt{x^2+1} - \sin^2 x$$

является элементарной.

Все элементарные функции непрерывны в области определения

Разрывы функций

Дадим теперь ***классификацию точек разрыва функций.*** Возможны следующие случаи.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ существуют и конечны, но не равны друг другу, то точку x_0 называют ***точкой разрыва первого рода.*** При этом величину $\left[f(x_0+0)-f(x_0-0)\right]$ называют скачком функции в точке x_0.

Пример

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x^2, если \ x \le 0 \\ x+1, если \ x > 0 \end{cases}$$

Эта функция может претерпевать разрыв только в точке 0, где происходит переход от одного аналитического выражения к другому, а в остальных точках области определения функция непрерывна.

Решение

Из условия непрерывности следует:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} x^2 = 0,$$

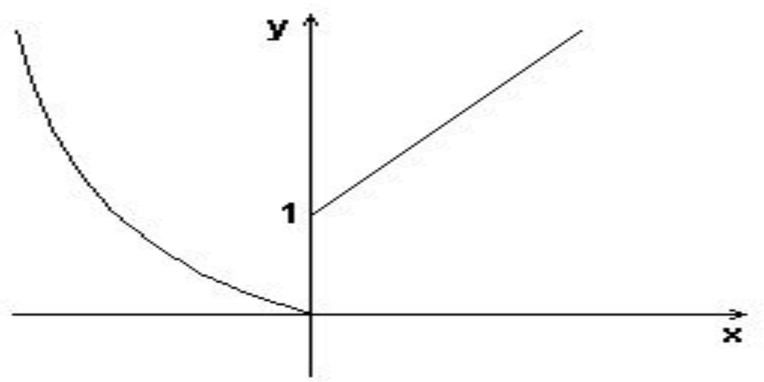
$$f(0) = 0,$$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} (x+1) = 1.$$

Таким образом, в точке 0 функция претерпевает разрыв 1-го рода со скачком 1.

График функции

На рисунке изображена функция, имеющая разрыв 1-го рода в начале координат.



Разрывы функций

2.Если в точке x_0 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, но в точке x_0 функция либо не определена, либо $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то эта точка является ***точкой устранимого разрыва.*** Последнее объясняется тем, что если в этом случае ***доопределить*** или ***видоизменить*** функцию , положив

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) ,$$

то получится непрерывная в точке функция.

Разрывы функций

3. Точка разрыва функции, не являющаяся точкой разрыва первого рода или точкой устранимого разрыва, является ***точкой разрыва второго рода.***

Очевидно, что точки разрыва второго рода - это точки, в которых функция стремится к бесконечности. Например, $y=\frac{1}{x-1}$ в точке $x=1$ имеет разрыв 2-го рода.

Пример

Исследуем функцию $f(x)=3^{\frac{1}{1-x}}$. Как элементарная функция она всюду непрерывна, кроме точки x=1.

$$\lim_{x\to 1-0} 3^{\frac{1}{1-x}} = 3^{\frac{1}{1-1+0}} = 3^{+\infty} = +\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to 1+0} 3^{\frac{1}{1-x}} = 3^{\frac{1}{1-1-0}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = 0$$

Имеем разрыв 2-го рода с бесконечным скачком.

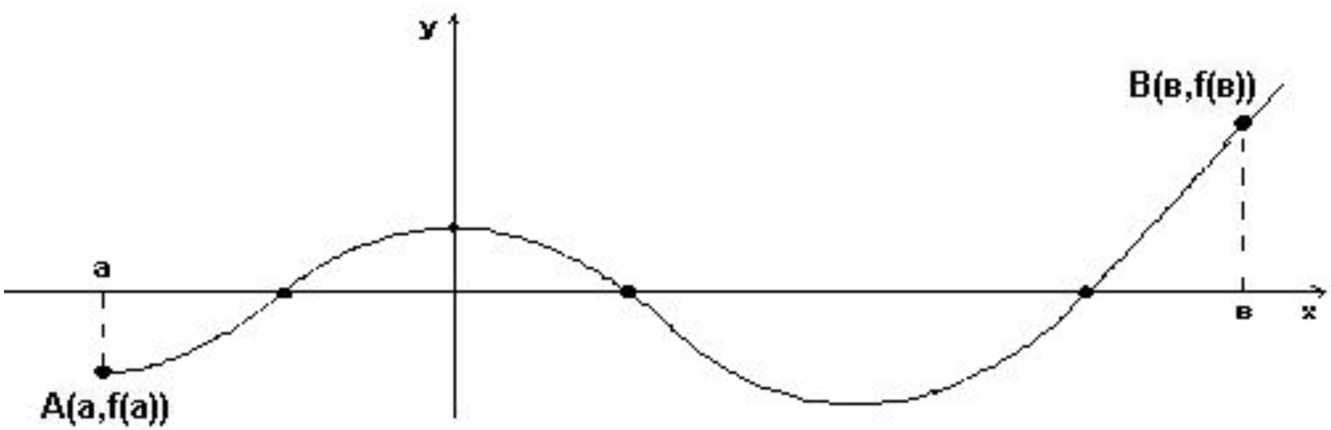
Первая теорема Больцано-Коши об обращении функции в нуль. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке [a, b] и на концах этого отрезка принимает значения различных знаков, т. е.

$f(a)\cdot f(b)<0.$ Тогда существует точка

$c\in(a,b)$ такая, что $f(c)=0.$

Проиллюстрируем теорему.

Из рисунка видно, что функция имеет три нуля, то есть три точки, в которых она обращается в нуль.



Вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении функции. Пусть функция определена и непрерывна на отрезке [*a, b*] и на концах этого отрезка принимает неравные значения $f(a) \neq f(b)$. Тогда, каково бы ни было число μ между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(c) = \mu$

.

Теорема 1 Вейерштрасса.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она на этом отрезке ограничена, то есть существуют числа m и M такие, что $m \le f(x) \le M$ для любого $x \in [a,b]$.

Теорема 2 Вейерштрасса.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке [*a,b*], то она достигает на этом отрезке своих наименьшего и наибольшего значений (то есть существуют такие x_1 *и* x_2 на отрезке [*a,b*], что для любого $x \in [a,b]$, т. е. для $a \le x \le b$, выполняется условие

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$

.