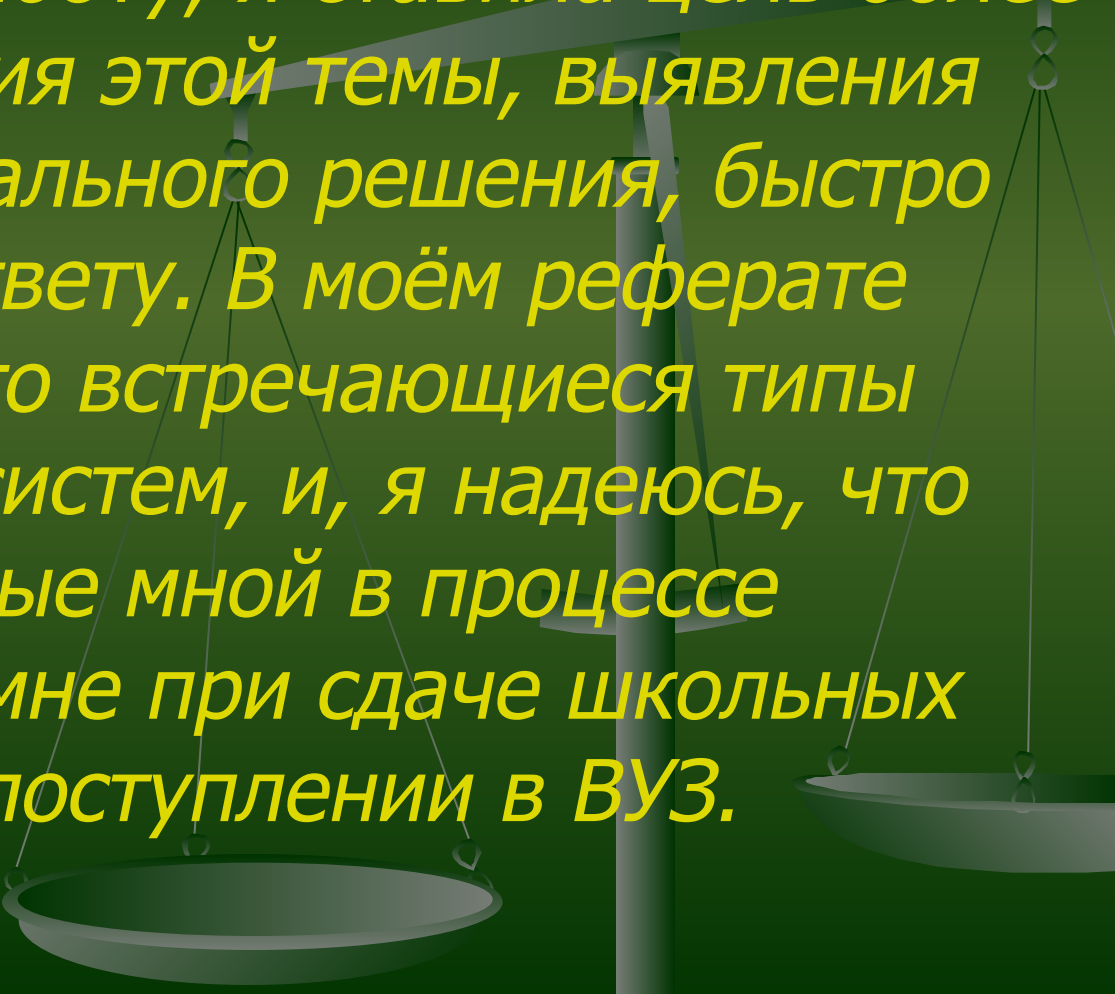


*НЕРАВЕНСТВА*



# ВВЕДЕНИЕ

Готовя данную работу, я ставила цель более глубокого изучения этой темы, выявления наиболее рационального решения, быстро приводящего к ответу. В моём реферате рассмотрены часто встречающиеся типы неравенств и их систем, и, я надеюсь, что знания, полученные мной в процессе работы, помогут мне при сдаче школьных экзаменов и при поступлении в ВУЗ.



# ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- Архимед указал границы числа  $\pi$ :  
 $223/71 < \pi < 22/7$ .
- В «Математике собрания» Паппа Александрийского (III в.) доказывается, что если  $a/b > c/d$  ( $a, b, c, d$  – положительные числа), то  $ad > bc$ .
- Знаки  $<$  и  $>$  ввёл английский математик Т. Гарриот (1560-1621), знаки  $\leq$  и  $\geq$  французский математик П. Буге (1698-1758).

# ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

- Для произвольных чисел  $a$  и  $b$  выполняется одно и только одно из соотношений:  $a=b$ ,  $a<b$ ,  $a>b$ .
- Число  $a$  больше числа  $b$ , если разность  $a-b$  - положительное число; число  $a$  меньше числа  $b$ , если разность  $a-b$  - отрицательное число.

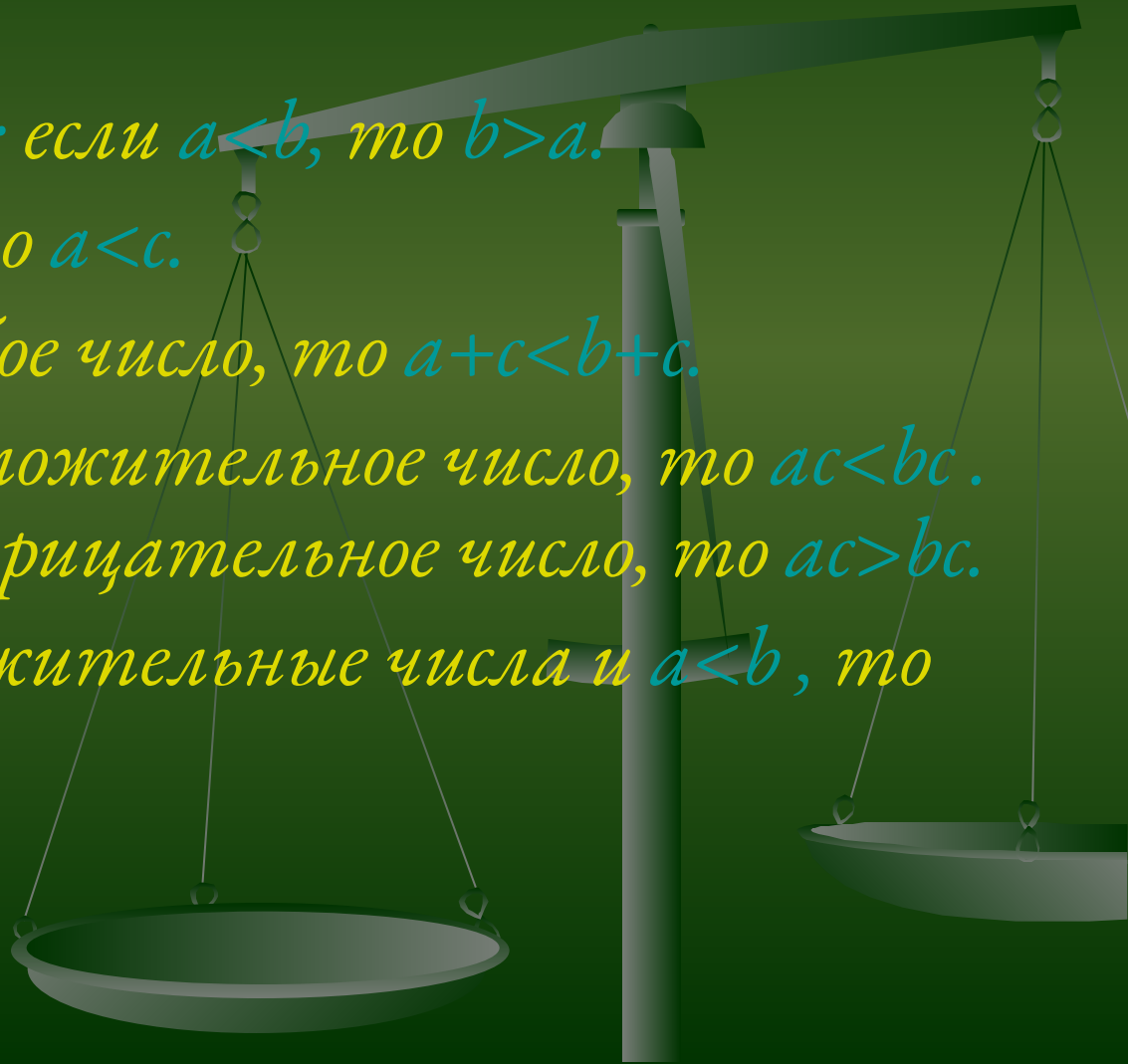


# ПРИМЕРЫ

- Сравним  $\frac{5}{8}$  и  $\frac{4}{7}$ . Приведём их к общему знаменателю:  $\frac{5}{8} = \frac{35}{56}$ ;  $\frac{4}{7} = \frac{32}{56}$ . Так как  $35 > 32$ , то  $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$ .
- Докажем, что при любых значениях  $a$  верно неравенство  $(a-3)(a-5) < (a-4)(a-4)$ . Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем её:  $(a-3)(a-5) - (a-4)(a-4) = -1$ . При любом  $a$  верно данное неравенство.

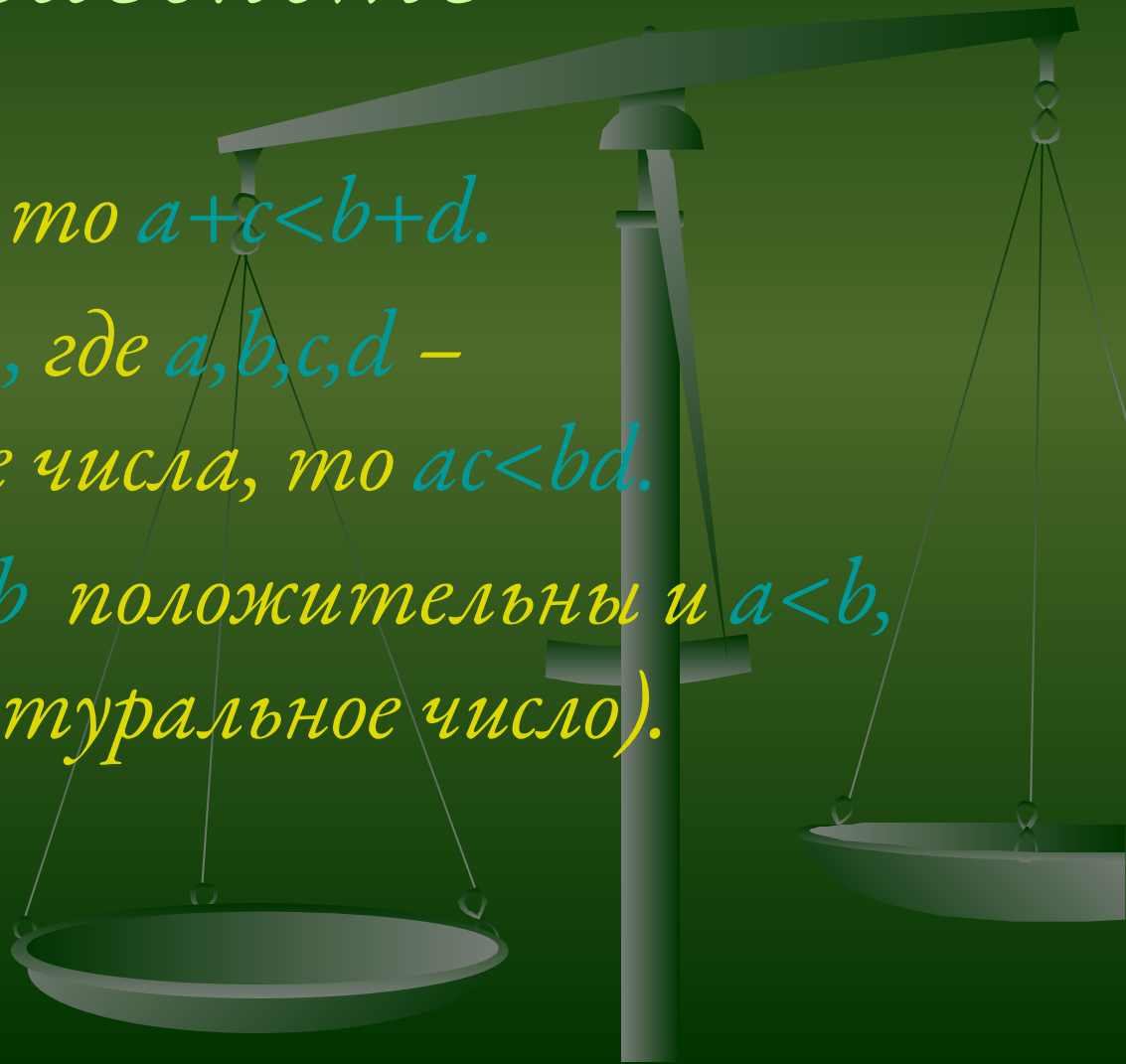
# СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

- Если  $a > b$ , то  $b < a$ ; если  $a < b$ , то  $b > a$ .
- Если  $a < b$  и  $b < c$ , то  $a < c$ .
- Если  $a < b$  и  $c$  – любое число, то  $a + c < b + c$ .
- Если  $a < b$  и  $c$  – положительное число, то  $ac < bc$ .  
Если  $a < b$  и  $c$  – отрицательное число, то  $ac > bc$ .
- Если  $a$  и  $b$  – положительные числа и  $a < b$ , то  $1/a > 1/b$ .



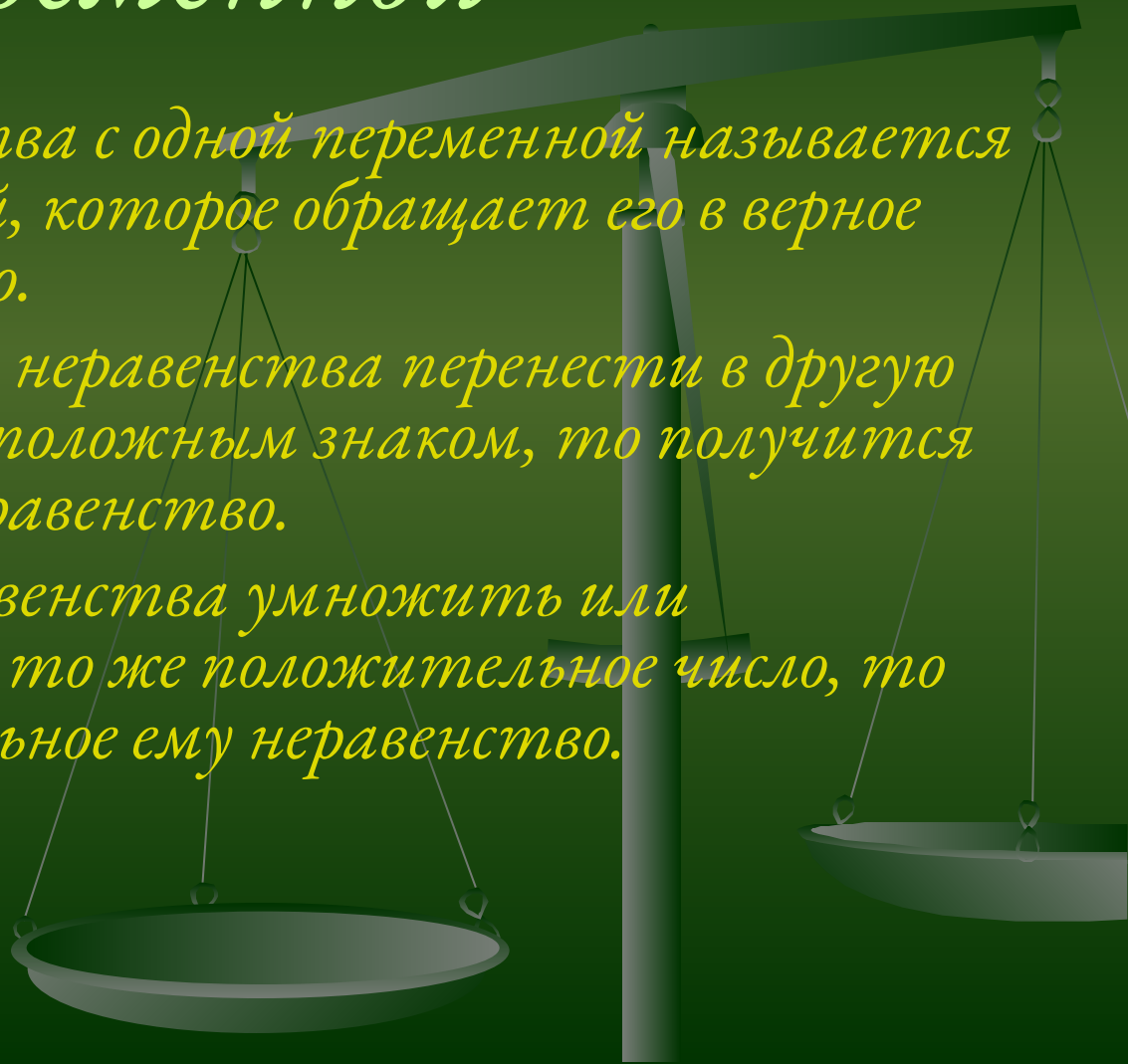
# Сложение и умножение числовых неравенств

- Если  $a < b$  и  $c < d$ , то  $a + c < b + d$ .
- Если  $a < b$  и  $c < d$ , где  $a, b, c, d$  – положительные числа, то  $ac < bd$ .
- Если числа  $a$  и  $b$  положительны и  $a < b$ , то  $a^n < b^n$  ( $n$  – натуральное число).



# Решение неравенств с одной переменной

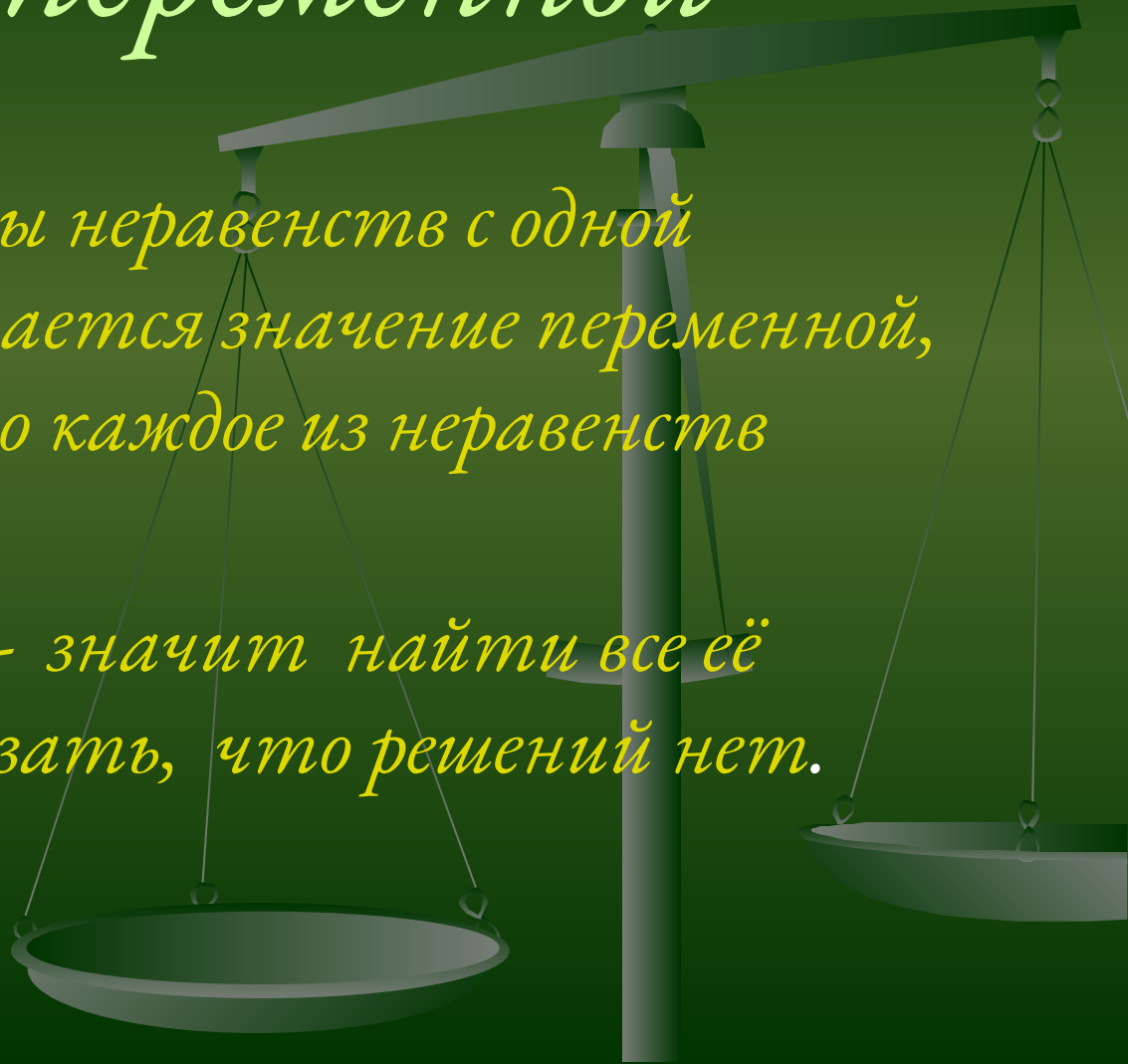
- Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.
- Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.
- Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.





# Решение систем неравенств с одной переменной

- *Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.*
- *Решить систему - значит найти все её решения или доказать, что решений нет.*

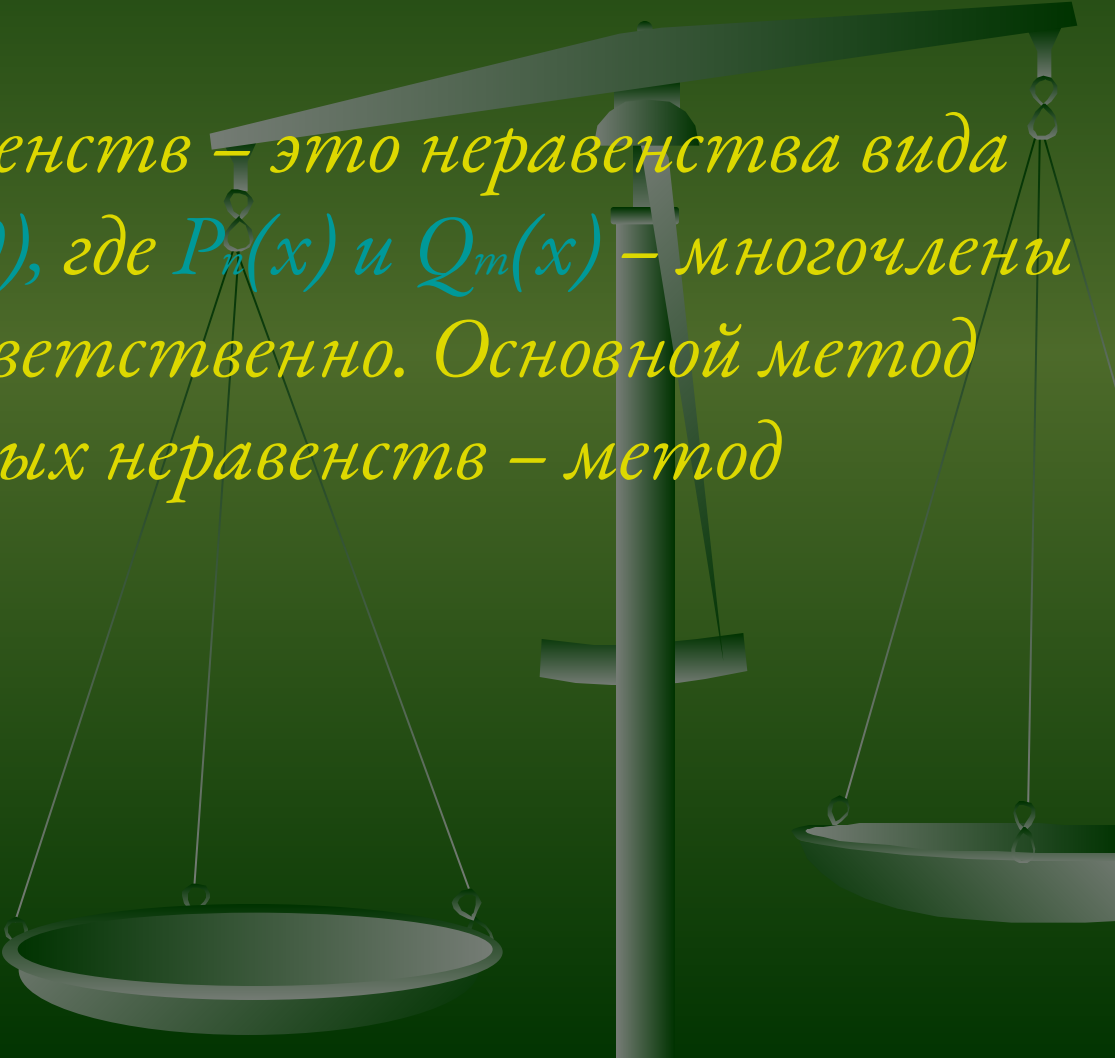


# ПРИМЕРЫ

- Решим неравенство  $16x > 13x + 45$ . Перенесем слагаемое  $13x$  с противоположным знаком в левую часть неравенства:  $16x - 13x > 45$ . Приведём подобные члены:  $3x > 45$ . Умножим обе части на  $1/3$ :  $x > 15$ .
- Решим неравенство  $x/3 - x/2 < 2$ . Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство, т.е. на 6. Получим:  $6x/3 - 6x/2 < 12$ ;  $2x - 3x < 12$ . Отсюда  $-x < 12$ ;  $x > -12$ .

# РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Рациональные неравенств – это неравенства вида  $P_n(x)/Q_m(x) > 0 (\geq, <, \leq 0)$ , где  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$  – многочлены степеней  $n$  и  $m$  соответственно. Основной метод решения рациональных неравенств – метод интервалов.



# ПРИМЕРЫ

**ПРИМЕР.** Множество решений неравенства  $(x^2 - 7x + 12)/(2x^2 + 4x + 5) > 0$  имеет вид

1)  $(-\infty; 3) \cup (4; \infty)$  2)  $(-\infty; 3)$  3)  $(3; 4)$  4)  $(4; \infty)$  5)  $(-\infty; 4)$ .

**РЕШЕНИЕ.** Так как дискриминант знаменателя  $D_1 = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2$  отрицателен и старший коэффициент положителен, то  $2x^2 + 4x + 5 > 0$  для любого значения  $x$ . Тогда заданное неравенство равносильно неравенству  $x^2 - 7x + 12 > 0$  или  $(x - 3)(x - 4) > 0$ .

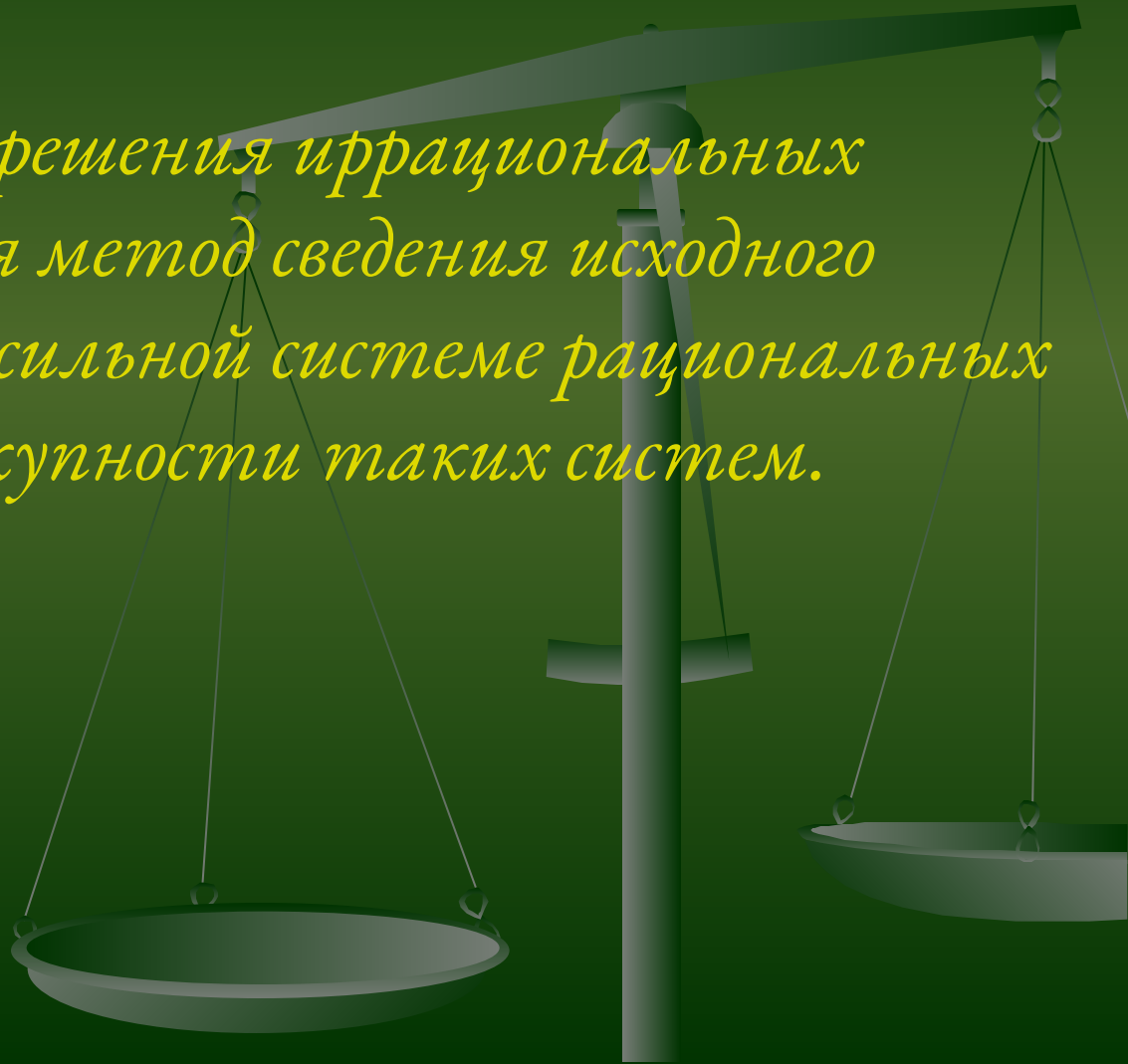
Отметим корни и знаки квадратного трёхчлена  $x^2 - 7x + 12$  на соответствующих промежутках числовой оси.

Решением неравенства является множество  $(-\infty; 3) \cup (4; \infty)$ .

**ОТВЕТ:** 1.

# ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

*Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.*



# ПРИМЕРЫ

*ПРИМЕР. Решить неравенство*

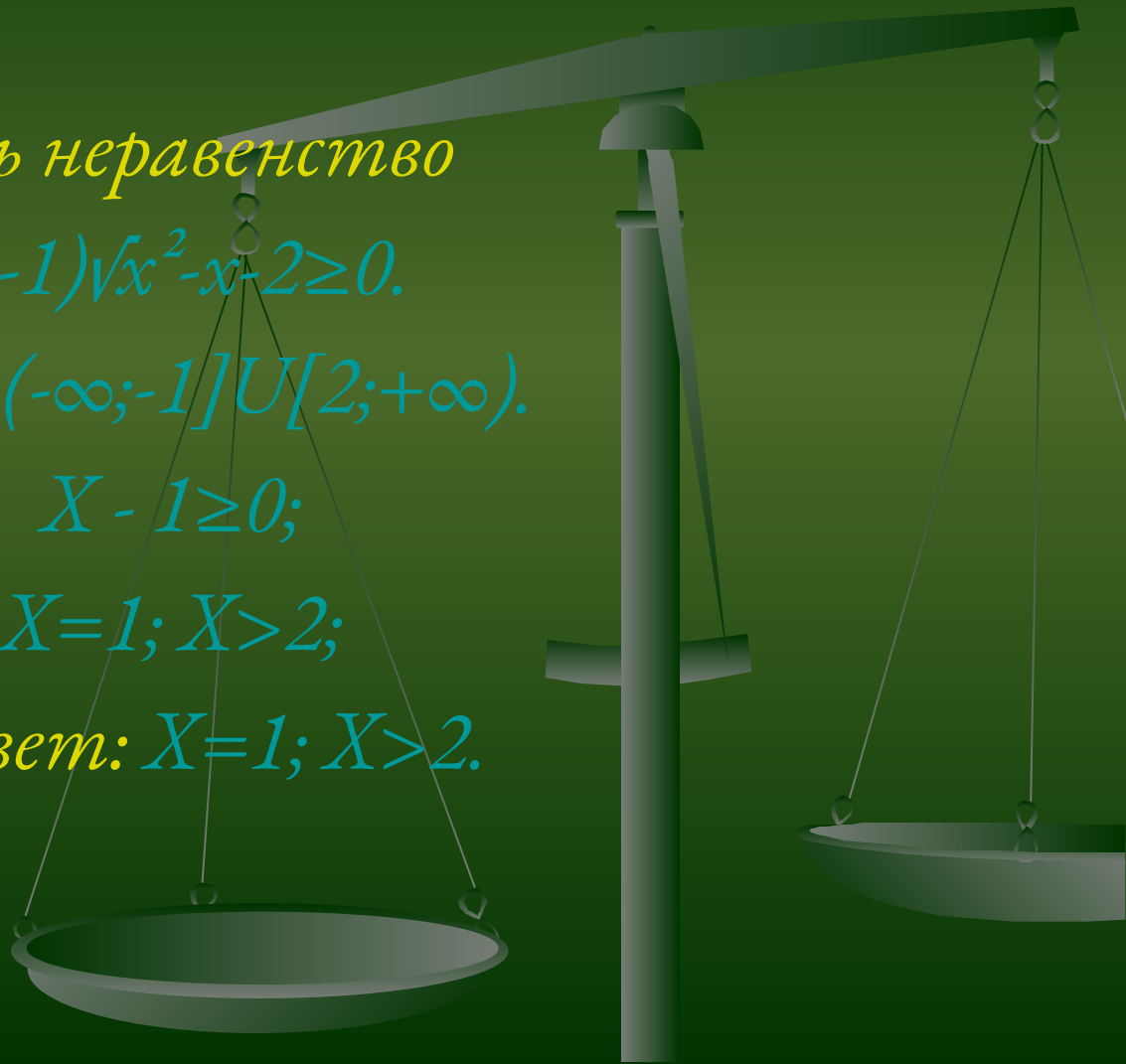
$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0.$$

$$D(f)=(-\infty;-1]\cup[2;+\infty).$$

$$X-1\geq 0;$$

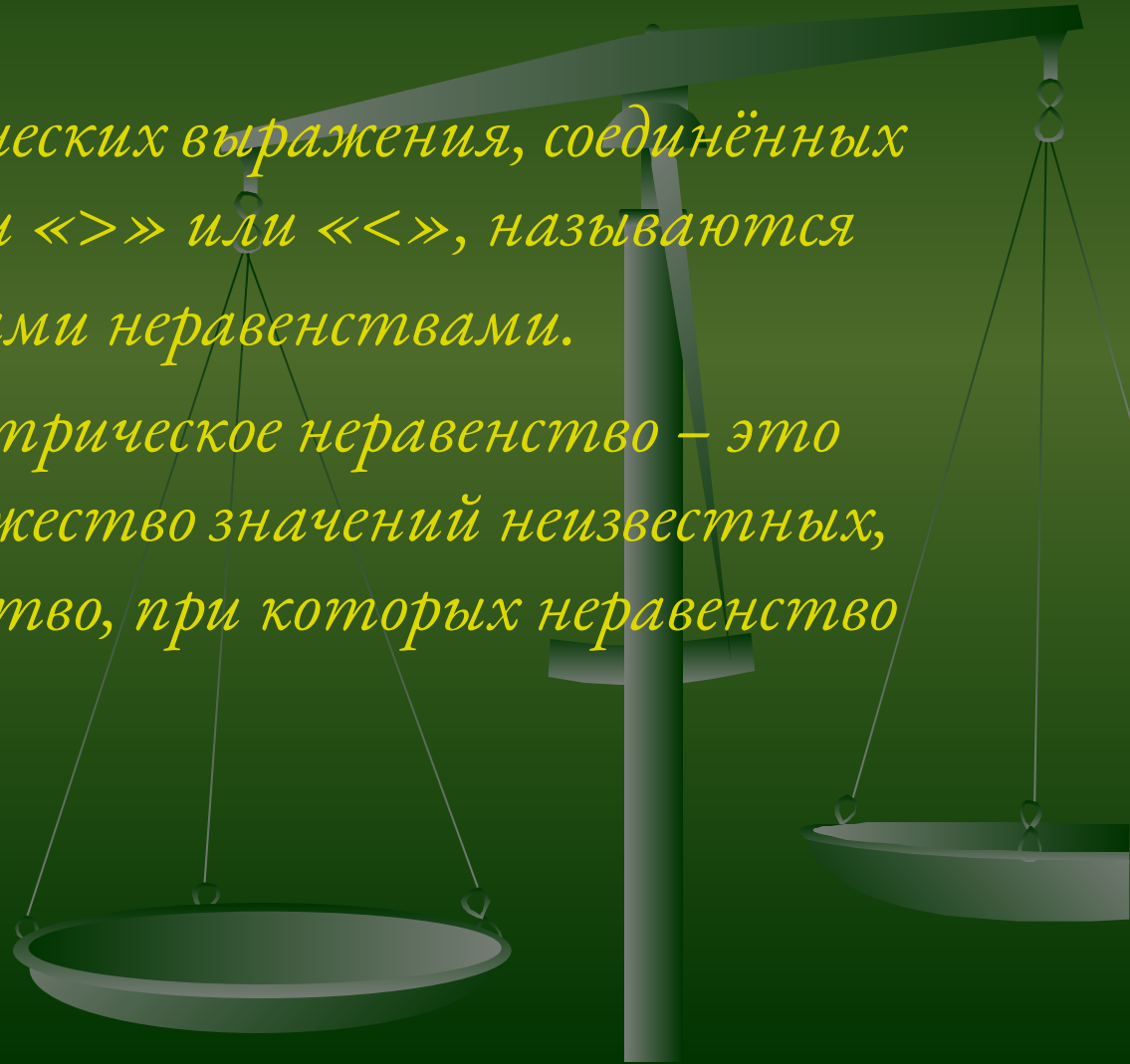
$$X=1; X>2;$$

*Ответ:  $X=1; X>2.$*

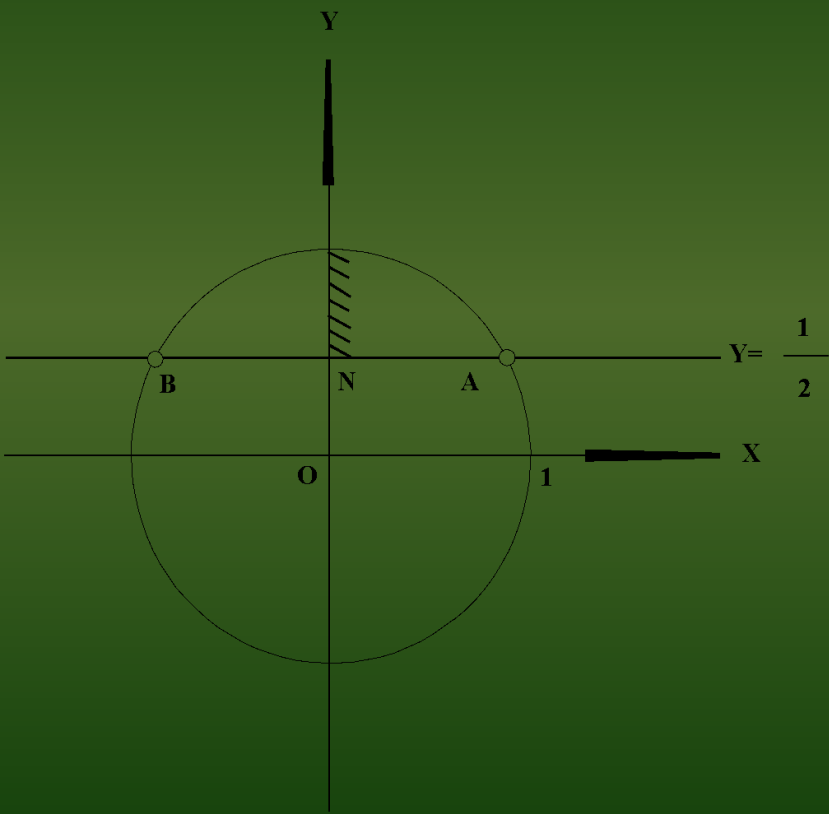


# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

- Два тригонометрических выражения, соединённых между собой знаками « $>$ » или « $<$ », называются тригонометрическими неравенствами.
- Решить тригонометрическое неравенство – это значит найти множество значений неизвестных, входящих в неравенство, при которых неравенство выполняется.



# ПРИМЕРЫ



Решим неравенство  $\sin x > 1/2$ . Все значения  $y$  на промежутке NM больше  $1/2$ . NM стягивает дугу AB с началом в точке  $A(\pi/6; 1/2)$  и с концом в точке  $B(5\pi/6; 1/2)$ .

Следовательно, решением неравенства будут все значения на  $(\pi/6; 5\pi/6)$  с прибавлением  $2\pi n$ , т.е.  $\pi/6 + 2\pi n < x < 5\pi/6 + 2\pi n$ ,  $n$  принадлежит  $Z$ .



# НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

При решении неравенств, содержащих переменные под знаком модуля, используется определение модуля:

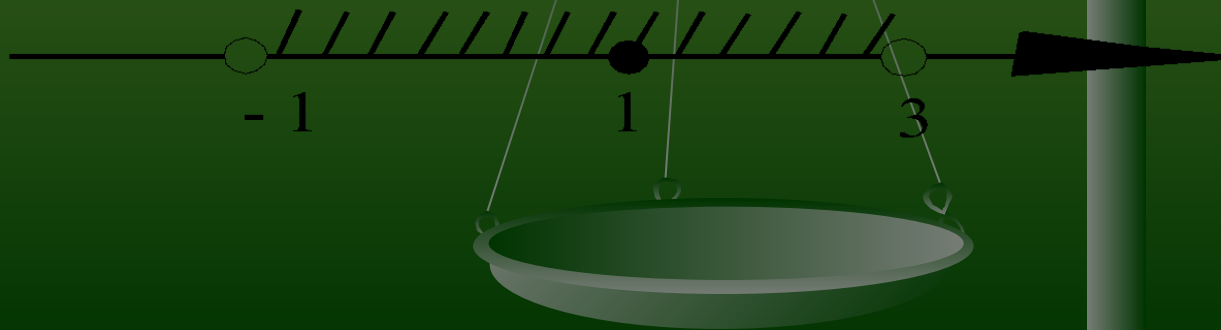
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$



# ПРИМЕРЫ

Пример. Решить неравенство  $|x - 1| < 2$ .

С помощью координатной прямой устанавливаем, что множество решений неравенства есть интервал  $(-1; 3)$ .



# ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении неравенств вида  $a^x > a^g$  следует помнить, что показательная функция  $y = a^x$  возрастает при  $a > 1$  и убывает при  $0 < a < 1$ . Значит, в случае, когда  $a > 1$ , от данного неравенства следует переходить к неравенству того же смысла  $f(x) > g(x)$ . В случае же, когда  $0 < a < 1$ , от данного неравенства следует переходить к неравенству противоположного смысла  $f(x) < g(x)$ .

# ПРИМЕРЫ

Пример. Решить неравенство  $3x+7 < 2x-1$

$$2 < 2.$$

Решение. Здесь основание степени больше 1, поэтому, сравнивая показатели, запишем неравенство того же смысла:  $3x+7 < 2x-1$ .

$$3x - 2x < -1 - 7;$$

$$x < -8;$$

Ответ:  $x < -8$ .

# НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ.

*Неравенство*

$$(a, b, c, \dots, k, x) > (a, b, c, \dots, k, x),$$

*где  $a, b, c, \dots, k$  – параметры, а  $x$  действительная переменная величина, называется неравенством с одним неизвестным, содержащим параметры.*



# ПРИМЕРЫ

Пример. Найти значение параметра  $a$ , при котором наименьшее решение неравенства  $(ax - 10)/x \geq 1$  равно  $-2$ .

Решение.  $(ax - 10)/x - 1 \geq 0 \Rightarrow ((a - 1)x - 10)/x \geq 0$   
 $\Rightarrow (a - 1)(x - 10/(a - 1))/x \geq 0$ . Пусть  $a - 1 > 0$ . Тогда последнее неравенство пишется в виде  $(x - 10/(a - 1))/x \geq 0$ . Его решением является объединение множеств  $(-\infty; 0) \cup [10/(a - 1); +\infty]$ , которое не содержит наименьшего отрицательного числа. Следовательно,  $a - 1 < 0$  и тогда решением неравенства будет множество  $[10/(a - 1); 0)$ .  $10/(a - 1) = -2$ ;  $a - 1 = 5$ ;  $a = 6$ .

# ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении неравенств вида  $\text{Log}_a f(x) > \text{Log}_a g(x)$  следует помнить, что логарифмическая функция  $y = \text{Log}_a x$  возрастает при  $a > 1$  и убывает при  $0 < a < 1$ . Значит, в случае, когда  $a > 1$ , от исходного неравенства следует переходить к неравенству того же смысла  $f(x) > g(x)$ . В случае же когда  $0 < a < 1$ , от исходного неравенства следует переходить к неравенству противоположного смысла  $f(x) < g(x)$ .

# ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР. Решить неравенство  $\text{Log}_{1/3}(2x+59) > -2$ .

РЕШЕНИЕ. Так как  $-2 = \text{Log}_{1/3} 9$ , то данное неравенство можно переписать в виде  $\text{Log}_{1/3}(2x+59) > \text{Log}_{1/3} 9$ .

Далее имеем:

$$2x+59 > 0,$$

$$2x+59 < 9;$$

откуда  $-29,5 < x < -25$ .

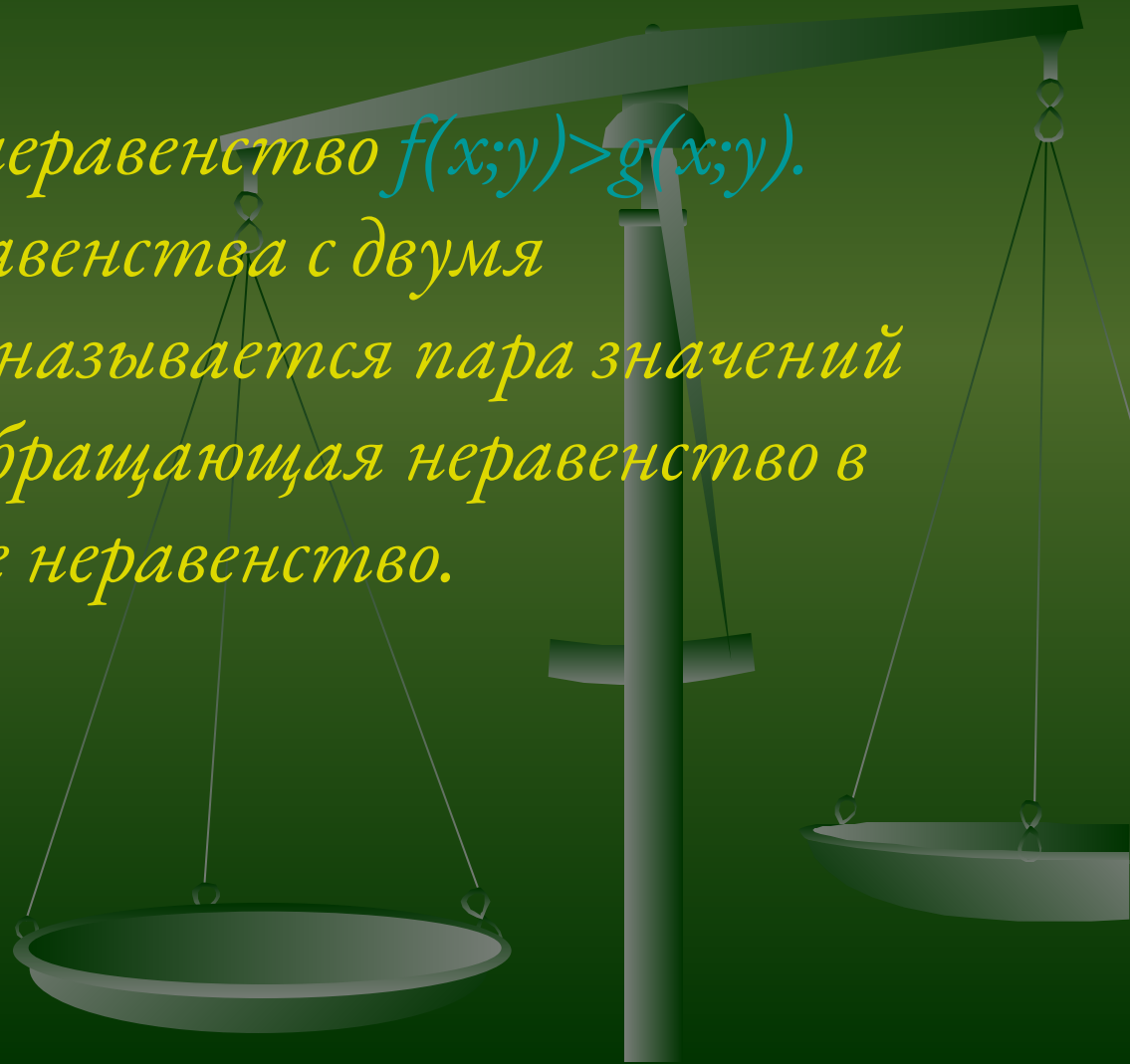
$$x > -29,5,$$

$$x < -25;$$

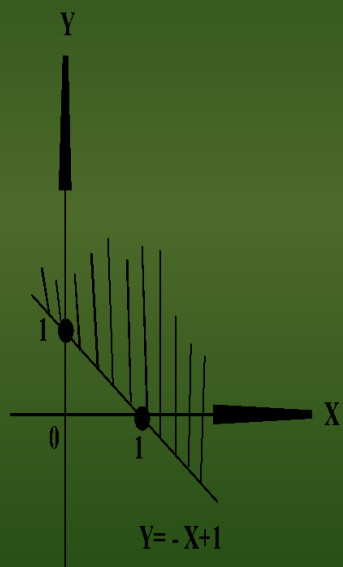


# НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

*Рассмотрим неравенство  $f(x;y) > g(x;y)$ .  
Решением неравенства с двумя  
переменными называется пара значений  
переменных, обращающая неравенство в  
верное числовое неравенство.*

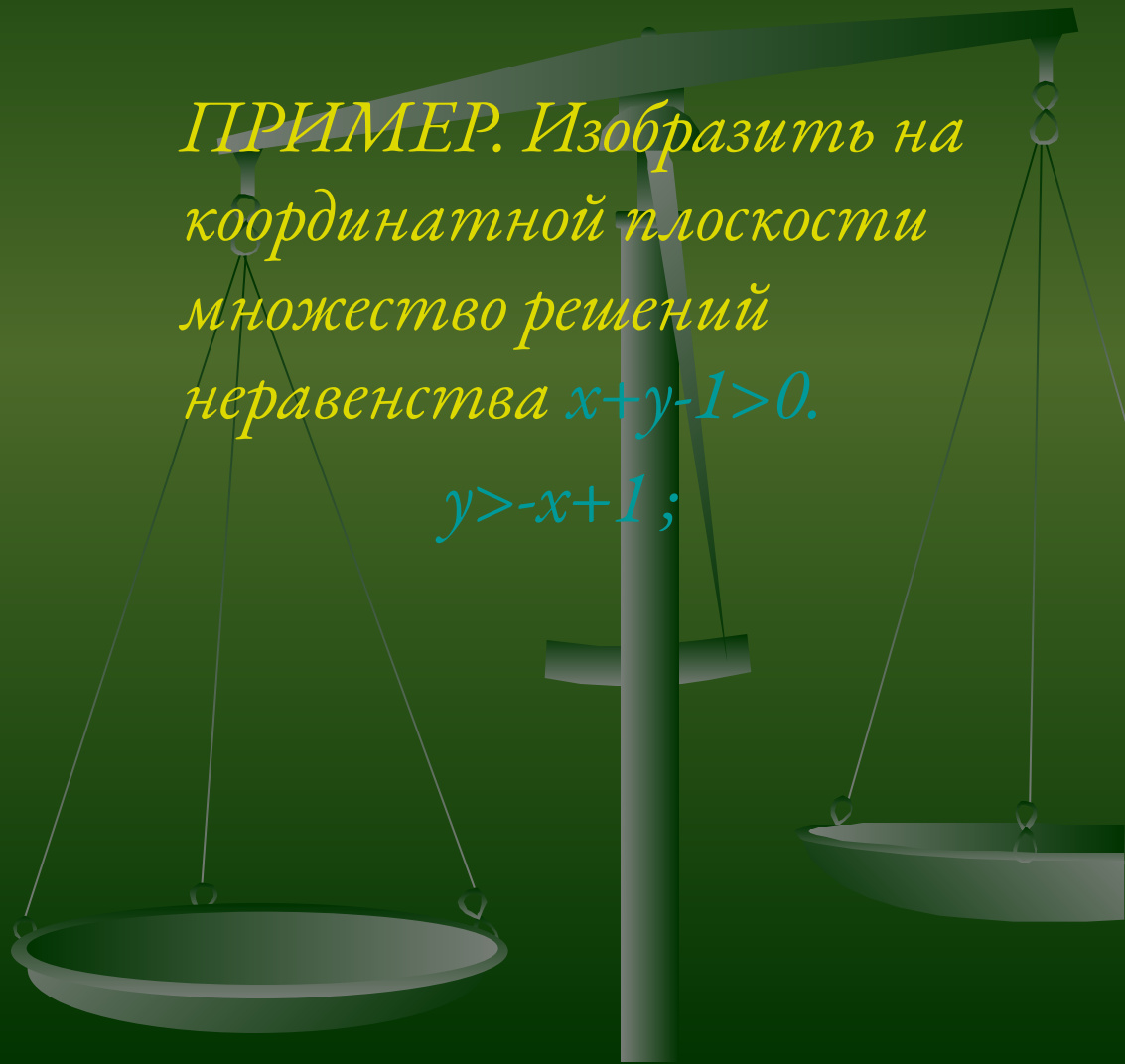


# ПРИМЕРЫ



*ПРИМЕР. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства  $x + y - 1 > 0$ .*

$$y > -x + 1;$$



# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

*ТРИ МЕТОДА ДОКАЗАТЕЛЬСТВ  
НЕРАВЕНСТВ:*

- 1) Метод оценки знака разности;*
- 2) Синтетический метод;*
- 3) Метод от противного.*

