НЕРАВЕНСТВА

ВВЕДЕНИЕ

Готовя данную работу, я ставила цель более глубокого изучения этой темы, выявления наиболее рационального решения, быстро приводящего к ответу. В моём реферате рассмотрены часто встречающиеся типы неравенств и их систем, и, я надеюсь, что знания, полученные мной в процессе работы, помогут мне при сдаче школьных экзаменов и при поступлении в ВУЗ.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- *Архимед указал границы числа П :*

  223/71<П>22/7.

- *В «Математике собрании» Паппа Александрийского(||| в.) доказывается, что если* $a/b>c/d$ *(*a,b,c,d *– положительные числа), то* $ad>bc$.
- *Знаки* $<$ *и* $>$ *ввёл английский математик Т. Гарриот (1560-1621), знаки* $\leq$ *и* $\geq$ *французский математик П. Буге (1698-1758).*

ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

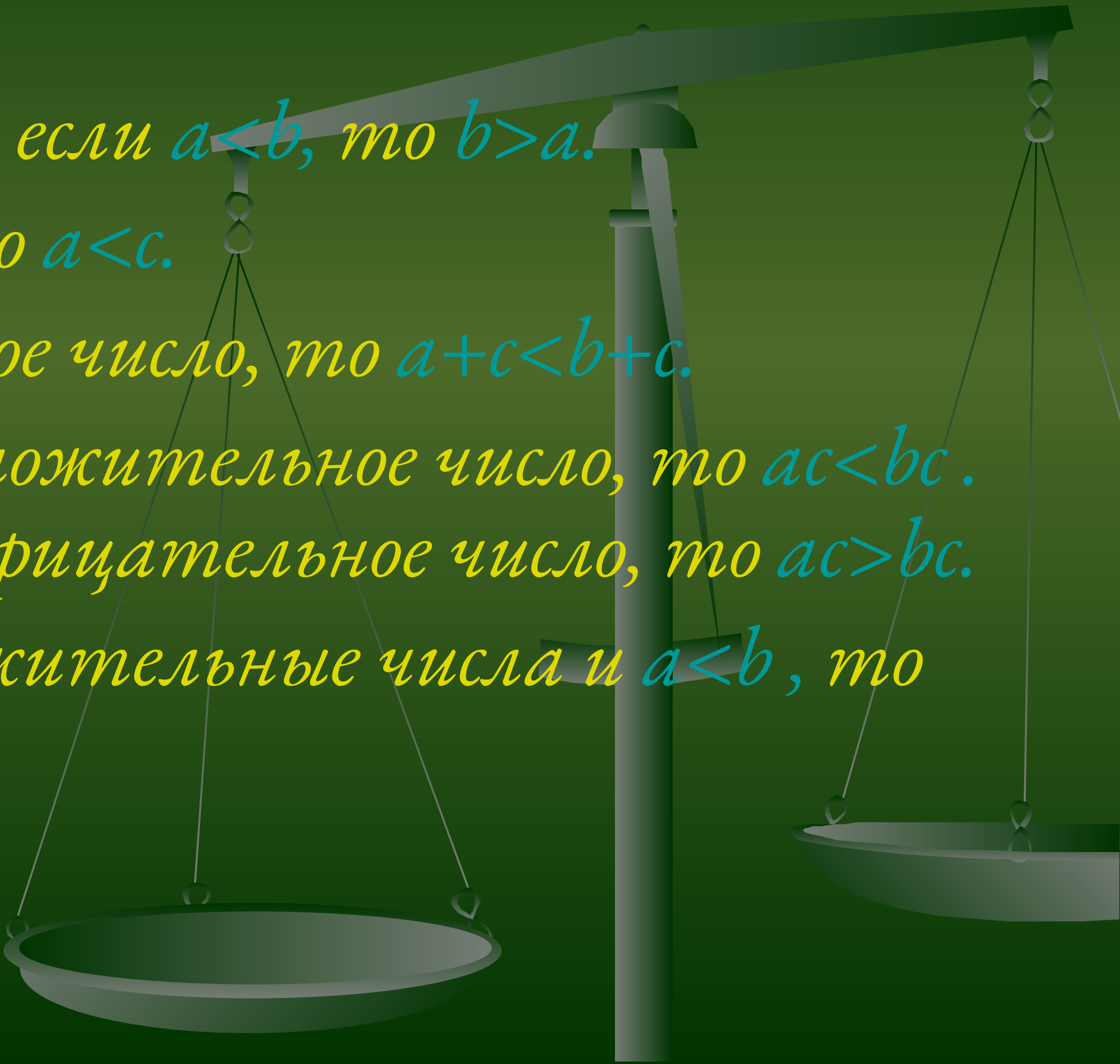
- *Для произвольных чисел a и b выполняется одно и только одно из соотношений: $a=b$, $a<b$, $a>b$.*
- *Число a больше числа b, если разность $a-b$ - положительное число; число a меньше числа b, если разность $a-b$ - отрицательное число.*

ПРИМЕРЫ

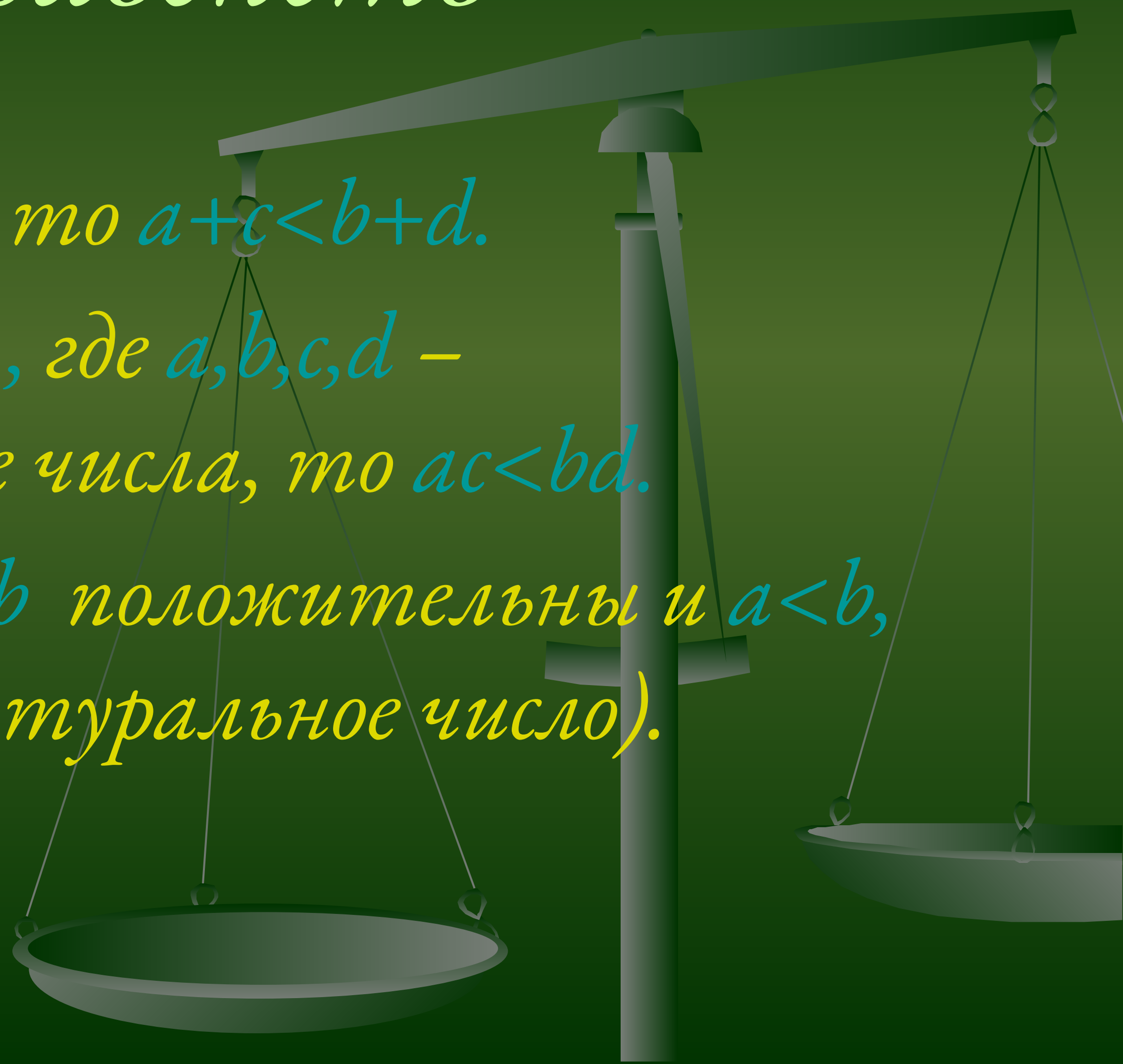
- *Сравним 5/8 и 4/7. Приведём их к общему знаменателю: 5/8=35/56; 4/7=32/56. Так как 35>32, то 5/8>4/7.*
- *Докажем, что при любых значениях a верно неравенство $(a-3)(a-5)<(a-4)(a-4)$. Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем её: $(a-3)(a-5)-(a-4)(a-4)=-1$. При любом a верно данное неравенство.*

СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

- *Если $a>b$, то $b<a$; если $a<b$, то $b>a$.*
- *Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.*
- *Если $a<b$ и c – любое число, то $a+c<b+c$.*
- *Если $a<b$ и c - положительное число, то $ac<bc$. Если $a<b$ и c - отрицательное число, то $ac>bc$.*
- *Если a и b - положительные числа и $a<b$, то $1/a > 1/b$.*



Сложение и умножение числовых неравенств



- Если $a<b$ и $c<d$, то $a+c<b+d$.
- Если $a<b$ и $c<d$, где a,b,c,d – положительные числа, то $ac<bd$.
- Если числа a и b положительны и $a<b$, то $a<b$ (n – натуральное число).

Решение неравенств с одной переменной

- Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.
- Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.
- Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.

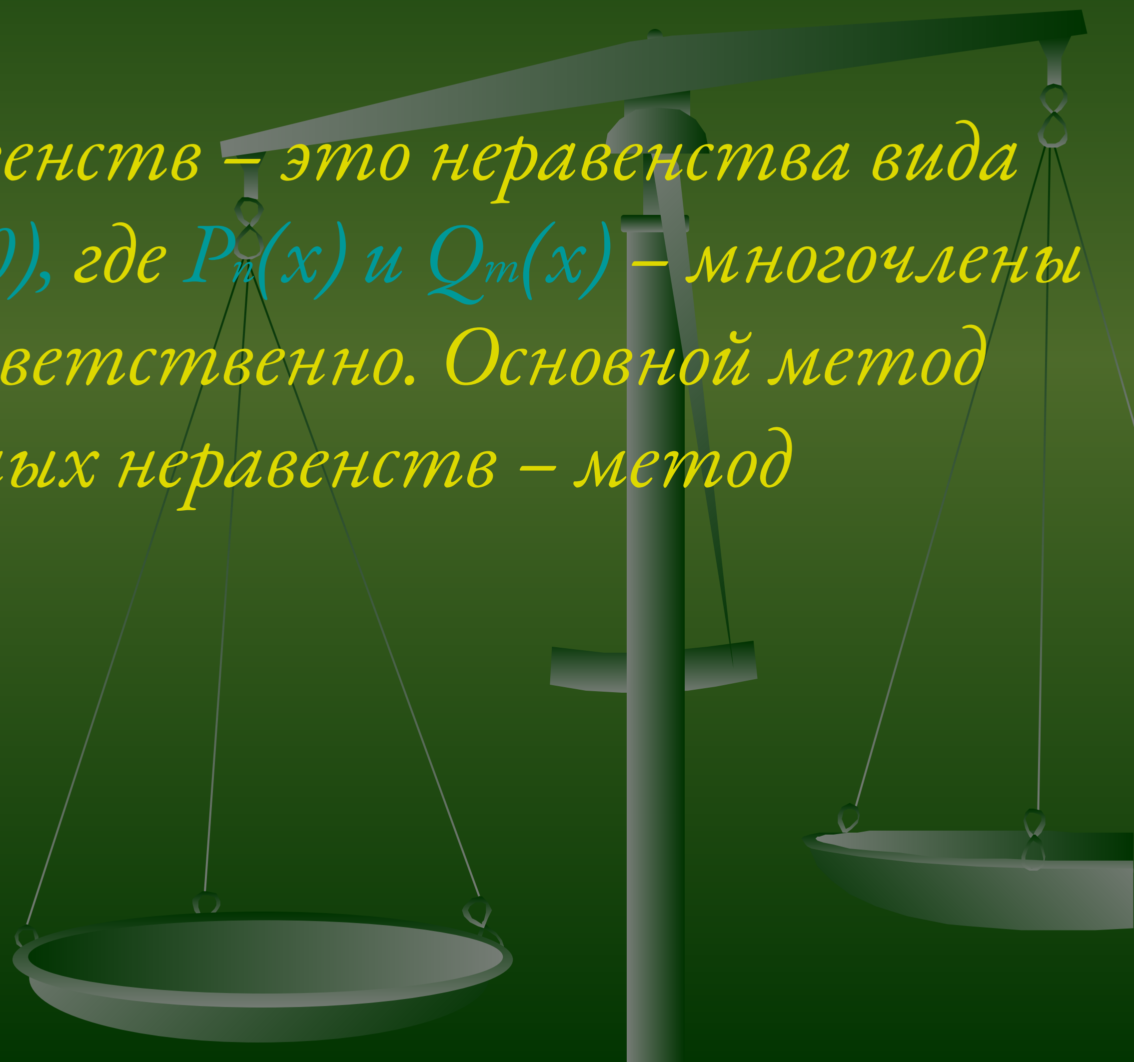
Решение систем неравенств с одной переменной

- Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.
- Решить систему - значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

ПРИМЕРЫ

- *Решим неравенство $16x>13x+45$. Перенесем слагаемое $13x$ с противоположным знаком в левую часть неравенства: $16x-13x>45$. Приведём подобные члены: $3x>45$. Умножим обе части на $1/3$: $x>15$.*
- *Решим неравенство $x/3 - x/2<2$. Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство, т.е. на 6. Получим: $6x/3 – 6x/2<12$; $2x – 3x<12$. Отсюда $-x<12$; $x> -12$.*

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА



Рациональные неравенств – это неравенства вида $P_n(x)/Q_m(x)>0(\geq,<,\leq 0)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно. Основной метод решения рациональных неравенств – метод интервалов.

ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР .Множество решений неравенства $(x^2-7x+12)/(2x^2+4x+5)>0$ *имеет вид*

1) $(-\infty; 3)\cup(4; \infty)$ 2) $(-\infty; 3)$ 3) $(3; 4)$ 4) $(4; \infty)$ 5) $(-\infty; 4)$.

РЕШЕНИЕ. Так как дискриминант знаменателя $D1=4^2-4*5*2$ *отрицателен и старший коэффициент положителен, то* $2x^2+4x+5>0$ *для любого значения* x. *Тогда заданное неравенство равносильно неравенству* $x^2-7x+12>0$ *или* $(x-3)(x-4)>0$.

Отметим корни и знаки квадратного трёхчлена

$x^2-7x+12$ *на соответствующих промежутках числовой оси.*

Решением неравенства является множество $(-\infty; 3)\cup(4; \infty)$.

ОТВЕТ: 1.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем.

ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР. Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0.$$

$D(f)=(-\infty;-1]\cup[2;+\infty).$

$X - 1 \geq 0;$

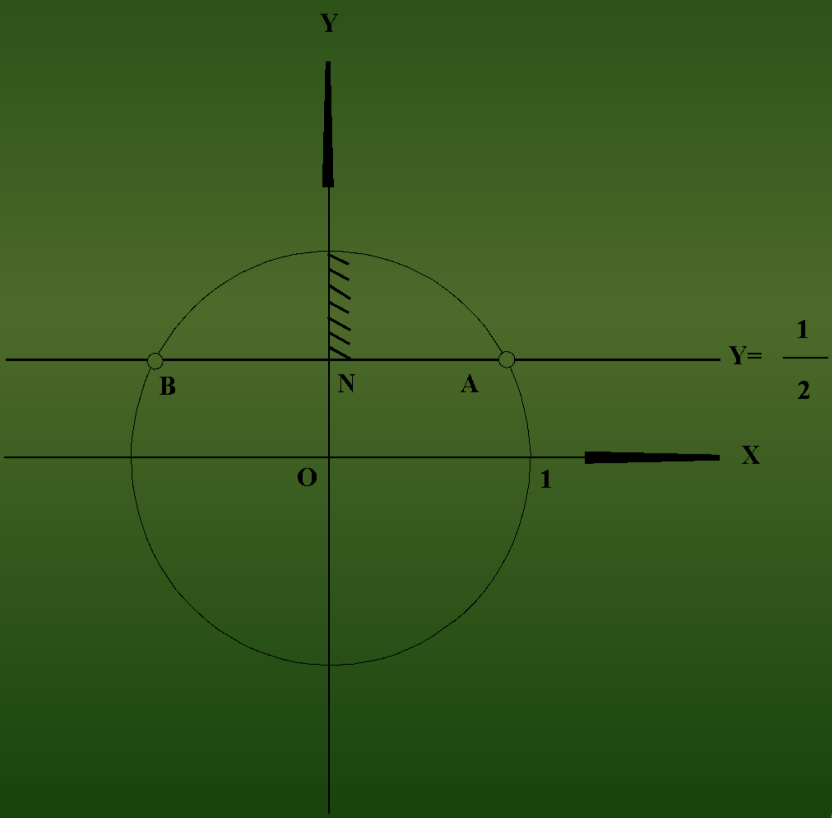
$X=1;\ X>2;$

Ответ: $X=1;\ X>2.$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

- *Два тригонометрических выражения, соединённых между собой знаками «>» или «<», называются тригонометрическими неравенствами.*
- *Решить тригонометрическое неравенство – это значит найти множество значений неизвестных, входящих в неравенство, при которых неравенство выполняется.*

ПРИМЕРЫ



Решим неравенство $\sin x > 1/2$. *Все значения у на промежутке* NM *больше* 1/2. NM *стягивает дугу* AB *с началом в точке* $A(\pi/6; \frac{1}{2})$ *и с концом в точке* $B(5\pi/6; \frac{1}{2})$. *Следовательно, решением неравенства будут все значения на* $(\pi/6; 5\pi/6)$ *с прибавлением* $2\pi n$, *т.е.* $\pi/6+2\pi n < x < 5\pi/6+2\pi n$, n *принадлежит* Z.

НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

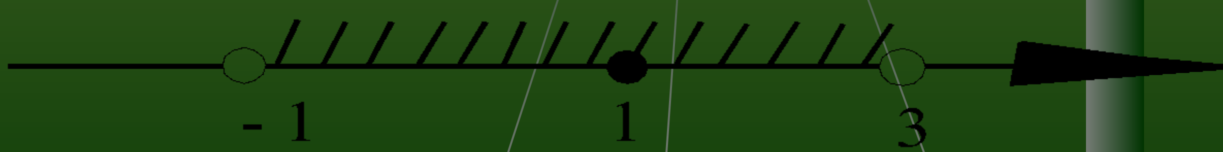
При решении неравенств, содержащих переменные под знаком модуля, используется определение модуля:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

ПРИМЕРЫ

Пример. Решить неравенство $|x - 1| < 2$.

С помощью координатной прямой устанавливаем, что множество решений неравенства есть интервал $(-1; 3)$.



ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении неравенств вида $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ следует помнить, что

показательная функция $y=a^x$ возрастает при $a>0$ и убывает при

$0<a<1$. Значит, в случае, когда $a>1$, от данного неравенства следует переходить к неравенству того же смысла $f(x)>g(x)$.

В случае же, когда $0<a<1$, от данного неравенства следует переходить к неравенству противоположного смысла $f(x)<g(x)$.

ПРИМЕРЫ

Пример . Решить неравенство

$$2^{3x+7} < 2^{2x-1}.$$

Решение. Здесь основание степени больше 1, *поэтому, сравнивая показатели, запишем неравенство того же смысла:* $3x+7<2x-1.$

$$3x - 2x < -1 - 7;$$

$$x < -8;$$

Ответ: $x < -8.$

НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ.

Неравенство

$(a, b, c, ..., k, x) > (a, b, c, ..., k, x)$,

где $a, b, c, ..., k$ – параметры, а x действительная переменная величина, называется неравенством с одним неизвестным, содержащим параметры.

ПРИМЕРЫ

Пример. Найти значение параметра a, при котором наименьшее решение неравенства $(ax - 10)/x \geq 1$ равно -2.

Решение. $(ax - 10)/x - 1 \geq 0 \Rightarrow ((a - 1)x - 10)/x \geq 0 \Rightarrow (a - 1)(x - 10/(a - 1))/x \geq 0$. Пусть $a - 1 > 0$. Тогда последнее неравенство пишется в виде $(x - 10/(a - 1))/x \geq 0$. Его решением является объединение множеств $(-\infty; 0) \cup [10/(a - 1); +\infty)$, которое не содержит наименьшего отрицательного числа. Следовательно, $a - 1 < 0$ и тогда решением неравенства будет множество $[10/(a - 1); 0)$. $10/(a - 1) = 2$; $a - 1 = 5$; $a = -4$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении неравенств вида $Log_a f(x) > Log_a g(x)$ следует помнить, что логарифмическая функция $y = Log_a x$ возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$. Значит , в случае, когда $a>1$, от исходного неравенства следует переходить к неравенству того же смысла $f(x)>g(x)$. В случае же когда $0<a<1$, от исходного неравенства следует переходить к неравенству противоположного смысла $f(x)<g(x)$.

ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР. Решить неравенство $Log1/3\ (2x+59)>-2.$

РЕШЕНИЕ. Так как $-2=Log1/3\ 9,$ то данное неравенство можно переписать в виде $Log1/3\ (2x+59)>Log1/3\ 9.$

Далее имеем:

$2x+59>0, \qquad x>-29{,}5,$

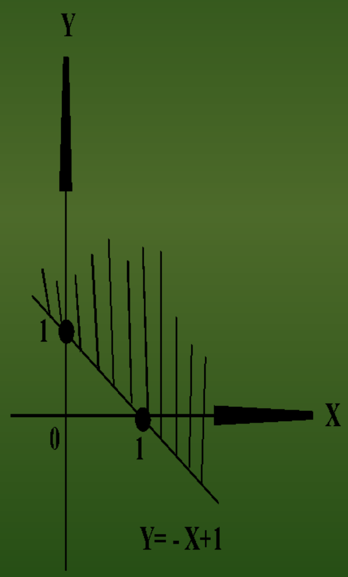
$2x+59<9; \qquad x<-25;$

откуда $-29{,}5<x<-25.$

НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим неравенство $f(x;y)>g(x;y)$. Решением неравенства с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая неравенство в верное числовое неравенство.

ПРИМЕРЫ



ПРИМЕР. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $x+y-1>0$.

$$y>-x+1\,;$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

ТРИ МЕТОДА ДОКАЗАТЕЛЬСТВ НЕРАВЕНСТВ:

1)Метод оценки знака разности;

2) Синтетический метод;

3) Метод от противного.