

Несобственный интеграл I-го рода

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях x таких, что $a \leq x < +\infty$. Рассмотрим интеграл

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Этот интеграл имеет смысл при любом $b > a$. При изменении b интеграл изменяется, он является непрерывной функцией b .

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

то этот предел называют несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначают так:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Следовательно, по определению, имеем:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Говорят, в этом случае несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *существует или сходится*. Если $\int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow +\infty$ не имеет

конечного предела, то говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *не существует или расходится*.

Пример НИ-1

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$.

Решение. По определению

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^b \frac{dx^2}{x^2+1} = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^b \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln(x^2+1)) \Big|_0^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln(b^2+1) - \ln 1) = +\infty, \end{aligned}$$

следовательно, интеграл расходится.

Пример НИ-1 2

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$

Решение. По определению

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \operatorname{arctg} x d \operatorname{arctg} x = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}^2 b - \operatorname{arctg}^2 0) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 0 \right) = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Несобственные интегралы II-го рода

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[a; b)$, ограничена на любом отрезке $[a; \varepsilon]$, а для любого $\varepsilon > 0$, неограничена в любой ε -окрестности точки b . Пусть на любом отрезке $[a; \varepsilon]$ функция $f(x)$ интегрируема, т.е. существует определенный интеграл $\int_a^\varepsilon f(x) dx$ при любом $a < \varepsilon < b$. Тогда, если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow b-0} \int_a^\varepsilon f(x) dx,$$

то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают $\int_a^b f(x) dx$.

В этом случае говорят, что интеграл $\int_a^b f(x) dx$ существует или сходится. Если же предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow b-0} \int_a^\varepsilon f(x) dx$ не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Пример НИ-II

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Решение. По определению

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \int_0^b \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 1-0} \left(\int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + 2 \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \left(-\frac{1}{2} \int_0^b \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \lim_{b \rightarrow 1-0} \left(-\sqrt{1-x^2} + 2 \arcsin x \right) \Big|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \underbrace{-\sqrt{1-b^2}}_0 + 2 \underbrace{\arcsin b}_{\frac{\pi}{2}} - \left(-\sqrt{1-0^2} + 2 \arcsin 0 \right) = \pi + 1 \end{aligned}$$

Пример НИ-II 2

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x+2}{1-x^2} dx$.

Решение. По определению

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x+2}{1-x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \int_0^b \frac{x+2}{1-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow 1-0} \left(\int_0^b \frac{x}{1-x^2} dx + 2 \int_0^b \frac{dx}{1-x^2} \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \left(-\frac{1}{2} \int_0^b \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} + 2 \int_0^b \frac{dx}{1-x^2} \right) = \lim_{b \rightarrow 1-0} \left(-\frac{1}{2} \ln|1-x^2| + \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \right) \Big|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \left(-\frac{1}{2} \ln|1-b^2| + \ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right| + \frac{1}{2} \ln|1-0^2| - \ln\left|\frac{1+0}{1-0}\right| \right) = \lim_{b \rightarrow 1-0} \ln \left| \frac{1+b}{(1-b^2)^{3/2}} \right| = \infty, \end{aligned}$$

следовательно, интеграл расходится.

Признаки сходимости

Теорема (достаточный признак сходимости, признак сравнения в форме неравенств). Если для всех $x \geq a$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$, и либо $b = +\infty$, либо функция $f(x)$ не определена в точке b , то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x) dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$, а из расходимости $\int_a^b f(x) dx$ следует расходимость $\int_a^b g(x) dx$.

Теорема (достаточный признак сходимости, признак сравнения в предельной форме). Пусть $f(x) > 0$ и $g(x) > 0 \forall x \in [a, b)$, где либо $b = +\infty$, либо функция $f(x)$ не определена в точке b , и $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, $0 < A < +\infty$, тогда интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ одновременно сходятся или расходятся.

При применении признаков сравнения исследуемый интеграл сравнивают с известными интегралами

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходитя при } p > 1, \text{ расходитя при } p \leq 1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ сходитя при } p < 1, \text{ расходитя при } p \geq 1$$

Пример исследования на сходимость НИ-I

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$.

Решение. Так как $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} \geq 0$ для всех $x \in [0; +\infty)$ и при $x \rightarrow +\infty$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^4}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится (по правилу при $p = 1$), то и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$ расходится.

Так как

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$$

и интеграл $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$ – определенный, равен какому-то конечному положительному числу, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$ расходится, то исходный интеграл расходится.

Пример исследования на сходимость НИ-1 2

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln^3 x}$.

Решение. Так как $\ln x < x^a$ для всех $x > 2$ и $a > 0$, то

$$\frac{1}{\ln^3 x} > \frac{1}{x^{3a}}.$$

В частности, это неравенство верно для $0 < a < \frac{1}{3}$. Но для таких значений a , степень $0 < 3a < 1$, следовательно, интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{3a}}$$

расходится, а, значит, по признаку сравнения в форме неравенств расходится и исходный интеграл.

Пример 7. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+e^x}$.

Решение. Так как для любых $x > 0$

$$\frac{1}{x+e^x} < \frac{1}{e^x},$$

а интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{e^x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^b} + 1 \right) = 1 - \text{сходится,}$$

то исходный интеграл сходится по признаку сравнения в форме неравенств.

Пример исследования на сходимость НИ-II

Пример 8. Исследовать на сходимость $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^3} dx$

Решение. Подынтегральная функция непрерывна на интервале $(0; 1]$ и не определена в точке $x = 0$.

Так как $\frac{e^x-1}{x^3} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$ при $x \rightarrow 0$, а интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ расходится (степень x в знаменателе равна $2 > 1$), то и исходный интеграл расходится.

Пример 9. Исследовать на сходимость $\int_0^1 \frac{e^x-e}{x^3-1} dx$

Решение. Подынтегральная функция непрерывна на интервале $[0; 1)$ и не определена в точке $x = 1$.

Так как

$$\frac{e^x-e}{x^3-1} = \frac{e(e^{x-1}-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \sim \frac{e(x-1)}{3(x-1)} = \frac{e}{3} \text{ при } x \rightarrow 1, \text{ а интеграл } \int_0^1 \frac{e}{3} dx = \frac{e}{3}$$

сходится, то и исходный интеграл сходится.

Пример 10. Исследовать на сходимость интеграл $\int_2^5 \frac{xdx}{x^2-9}$

Решение. Подынтегральная функция не определена в точках $x = 3$ и $x = -3$ (в этих точках знаменатель подынтегральной дроби обращается в ноль), следовательно, разобьем интеграл на сумму интегралов

$$\int_2^5 \frac{xdx}{x^2-9} = \int_2^3 \frac{xdx}{x^2-9} + \int_3^5 \frac{xdx}{x^2-9}.$$

Вычислим интегралы по определению

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{xdx}{x^2-9} + \int_3^5 \frac{xdx}{x^2-9} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 3-0} \int_2^{\varepsilon} \frac{xdx}{x^2-9} + \lim_{\delta \rightarrow 3-0} \int_{\delta}^5 \frac{xdx}{x^2-9} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 3-0} \frac{1}{2} \int_2^{\varepsilon} \frac{d(x^2-9)}{x^2-9} + \lim_{\delta \rightarrow 3-0} \frac{1}{2} \int_{\delta}^5 \frac{d(x^2-9)}{x^2-9} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 3-0} \frac{1}{2} \ln|x^2-9| \Big|_2^{\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 3-0} \frac{1}{2} \ln|x^2-9| \Big|_{\delta}^5 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 3-0} \frac{1}{2} (\ln|\varepsilon^2-9| - \ln 5) + \lim_{\delta \rightarrow 3-0} \frac{1}{2} (\ln 16 - \ln|\delta^2-9|) = \ln \frac{4}{\sqrt{5}} + \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 3-0 \\ \delta \rightarrow 3-0}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\varepsilon^2-9}{\delta^2-9} \right|. \end{aligned}$$

Здесь $\ln \frac{4}{\sqrt{5}}$ получен применением свойств логарифма к разности

$$\frac{1}{2} \ln 16 - \frac{1}{2} \ln 5 = \ln \sqrt{16} - \ln \sqrt{5} = \ln \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Предел $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 3-0 \\ \delta \rightarrow 3-0}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\varepsilon^2-9}{\delta^2-9} \right|$ не существует,

так как числитель и знаменатель дроби в аргументе логарифма стремятся к нулю и зависят от разных переменных, следовательно, неопределенность

$$\frac{\varepsilon^2-9}{\delta^2-9} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ при } \varepsilon \rightarrow 3-0 \text{ и } \delta \rightarrow 3-0$$

раскрыть нельзя. Таким образом, интеграл расходится.

Исследуйте интегралы на сходимость

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

сходится ▼

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$$

сходится ▼

$$\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{x^2+x+1}$$

расходится ▼

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^2+x} dx$$

расходится ▼

Исследуйте интегралы на сходимость

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+x+1}$$

расходится ▼

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$$

сходится ▼

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{x^2+x+1}$$

расходится ▼

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^2+x} dx$$

расходится ▼

Указать все расходящиеся интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

Исследовать интегралы на сходимость

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2+2x-15}$$

расходится ▼

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2+2x+15}$$

сходится ▼

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-15}}$$

сходится ▼

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+15}}$$

сходится ▼

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x^2+2x-15)^2}$$

расходится ▼

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x^2+2x+15)^2}$$

сходится ▼

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

1

Вычислить интеграл или установить его расходимость $\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{\cos x}{\sqrt{1+2 \sin x}} dx$

$\frac{1}{3}$

2

1

Расходится

0

Вычислить интеграл или установить его расходимость $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$



0



- ln 2



Расходится



ln 2



1

