

# Невизначен ий інтеграл

# 1. ПЕРВІСНА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основною задачею диференціального числення є задача диференціювання, тобто задача відшукування швидкості змінювання деякої функції. Але на практиці часто виникає потреба у розв'язанні оберненої задачі: якщо відома швидкість змінювання функції знайти цю функцію. Тобто потрібно знайти функцію, якщо відома похідна цієї функції. Ця операція називається **інтегруванням**. **Визначимо цей термін.**

**Означення.** Нехай функція  $f(x)$  задана на інтервалі  $(a,b)$ . Функція  $F(x)$  називається **первісною** для функції  $f(x)$ , якщо для будь-якого  $x \in (a,b)$  виконується рівність  $F'(x) = f(x)$ . Наприклад, нехай  $f(x) = \cos x$ , тоді її первісна  $F(x) = \sin x$ . Дійсно, за означенням первісної:  $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ . Легко помітити, що функція  $F(x) = \sin x + C$  ( $C$  - довільна стала) буде теж первісною для функції  $f(x) = \cos x$ :

$$F(x)' = (\sin x + C)' = (\sin x)' + C' = \cos x = f(x).$$

Тобто можна стверджувати, якщо  $F(x)$  первісна для функції  $f(x)$ , то функція  $F(x) + C$  також буде первісною для функції  $f(x)$ .

Нехай  $G(x)$  теж первісна для функції  $f(x)$ , тобто  $G'(x) = f(x)$ , але і  $F'(x) = f(x)$ . Розглянемо різницю  $G(x) - F(x)$  і позначимо її через  $R(x)$ . Тоді  $R'(x) = [G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ .

Тобто  $R'(x) = 0$ , а тому  $R(x)$  - стала величина, і  $R(x) = C = G(x) - F(x)$ . Таким чином, дві первісні для функції  $f(x)$  відрізняються на сталу величину і вираз  $F(x) + C$  зображує загальний вигляд шуканої первісної функції, або інакше - повну сім'ю первісних для функції  $f(x)$ .

## Означення.

Якщо  $F(x)$  первісна для функції  $f(x)$ , то вираз  $F(x) + C$ , де  $C$  може приймати будь-яке сталє значення, називається невизначеним інтегралом від функції  $f(x)$  і позначається символом  $\int f(x)dx$ , де  $\int$  - позначення інтегралу,  $f(x)$  - підінтегральна функція,  $f(x)dx$  - підінтегральний вираз.

Таким чином, рівність  $\int f(x)dx = F(x) + C$  є лише інший запис співвідношення  $F'(x) = f(x)$ , або  $(F(x) + C)' = f(x)$ .

З геометричної точки зору невизначений інтеграл - це сім'я кривих (інтегральних кривих), кожна з яких отримується шляхом зсуву однієї з кривих паралельно самій собі угору або вниз вздовж осі  $Oy$ .

Операція знаходження невизначеного інтеграла (тобто відшукування  $F(x) + C$ ) від даної функції  $f(x)$  називається **інтегруванням функції  $f(x)$** .

І нарешті виникає питання: чи для будь-якої функції існує первісна, а відповідно і невизначений ?

## **ТЕОРЕМА (про існування первісної).**

Якщо функція  $f(x)$  неперервна на деякому інтервалі, то для цієї функції існує первісна (а тому - і невизначений інтеграл).

Інтегрування – операція обернена операції диференціювання (тобто операції знаходження похідної від функції), тому правильність результату інтегрування можна завжди перевірити диференціюванням первісної.

Приклад.

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c,$$

тому що  $\left( \frac{x^4}{4} + c \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3.$

## 2. ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала

$$\int dF(x) = F(x) + C .$$

*Доведення:* Нагадаємо, що диференціал функції  $y = f(x)$  знаходиться за формулою :  $dy = f'(x)dx$  , тому

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C .$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d \int f(x)dx = f(x)dx .$$

*Доведення:*

$$d \int f(x)dx = d(F(x) + C) = dF(x) + dC = F'(x)dx + 0 = f(x)dx .$$



3.  $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$ , де  $c \neq 0$ , тобто сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

$$4. \int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx,$$

тобто невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій.

5. Якщо  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , то

$$\int f(ax + b) dx = 1/a F(ax + b) + C, \text{ де } a \text{ і } b \text{ сталі, } (a \neq 0).$$

### 3. ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1.  $\int 0 \cdot dx = C.$

2.  $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1.$

3.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

5.  $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$