Невизначений інтеграл

1. ПЕРВІСНА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основною задачею диференціального числення є задача диференціювання, тобто задача відшукання швидкості змінювання деякої функції. Але на практиці часто виникає потреба у розв'язанні оберненої задачі: якщо відома швидкість змінювання функції знайти цю функцію. Тобто потрібно знайти функцію, якщо відома похідна цієї функції. Ця операція називається **інтегруванням. Визначимо цей термін.**

Означення. Нехай функція f (x) задана на інтервалі (a,b). Функція F(x) називається **первісною для функції f (x),** якщо для будь-якого $x \in (a,b)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Наприклад, нехай $f(x) = \cos x$, тоді її первісна $F(x) = \sin x$. Дійсно, за означенням первісної: $\mathbf{F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)}$. Легко помітити, що функція 1F (x) = sin x + C (C - довільна стала) буде теж первісною для функції f (x) = cos x:

$$\boldsymbol{F(x)'} = (\sin x + C)' = (\sin x)' + C' = \cos x = \boldsymbol{1\,F(x)\,f(x)}.$$

Тобто можна стверджувати, якщо F(x) первісна для функції f(x), то функція F(x) + C також буде первісною для функції f(x).

Нехай $G(x)$ теж первісна для функції $f(x)$, тобто $G'(x) = f(x)$, але і $F'(x) = f(x)$. Розглянемо різницю $G(x) - F(x)$ і позначимо її через $R(x)$. Тоді $R'(x) = [G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Тобто $R'(x) = 0$, а тому $R(x)$ - стала величина, і $R(x) = C = G(x) - F(x)$. Таким чином, дві первісні для функції $f(x)$ відрізняються на сталу величину і вираз $F(x) + C$ зображує загальний вигляд шуканої первісної функції, або інакше - повну сім’ю первісних для функції $f(x)$.

Означення.

Якщо $F(x)$ первісна для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$, де C може приймати будь-яке стале значення, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx$, де $\int$ - позначення інтегралу, $f(x)$ - підінтегральна функція, $f(x)dx$ - підінтегральний вираз.

Таким чином, рівність $\int f(x)dx = F(x) + C$ є лише інший запис співвідношення $F'(x) = f(x)$, або $(F(x) + C)' = f(x)$.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл - це сім'я кривих (інтегральних кривих), кожна з яких отримується шляхом зсуву однієї з кривих паралельно самій собі угору або вниз вздовж осі Oy.

Операція знаходження невизначеного інтеграла (тобто відшукання $F(x) + C$) *від даної функції* $f(x)$ *називається* ***інтегруванням функції f (x)*** **.**

І нарешті виникає питання: чи для будь-якої функції існує первісна, а відповідно і невизначений ?

ТЕОРЕМА (про існування первісної).
Якщо функція *f (x) неперервна на деякому інтервалі, то* для цієї функції існує первісна (а тому - і невизначений інтеграл).
Інтегрування – операція обернена операції диференціювання (тобто операції знаходження похідної від функції), тому правильність результату інтегрування можна завжди перевірити диференціюванням первісної.
Приклад.

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c,$$

тому що $$\left(\frac{x^4}{4} + c \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3.$$

2. ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала

$$\int dF(x) = F(x) + C\ .$$

Доведення: Нагадаємо, що диференціал функції $y = f(x)$ *знаходиться* за формулою : $dy = f'(x)dx$ *, тому* $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$.

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\int f(x)dx = f(x)dx\ .$$

Доведення:

$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = dF(x) + dC = F'(x)dx + 0 = f(x)dx$.

3. $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)dx$, де $c \neq 0$, тобто сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

4. $\int \left[f_1(x) + f_2(x) \right] dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx,$

тобто невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій.

5. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, *то*
$\int f(ax + b)dx = 1/a\ F(ax + b) + C$, де a і b сталі, (a =0).

3. ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

7. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$$

8. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$$

9. $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$$

10. $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

11. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

12. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$