

Алгебра и начала математического анализа 11 класс

«Исследование функций и построение
их графиков»

Автор презентации:

учитель математики МБОУ
«Малошильнинская СОШ»
Тукаевского района
Республики Татарстан

Киямова Фируза Мухамматовна



Алгоритм исследования функции

Для исследования функции необходимо
пройти следующие этапы:

1. Находим область определения функции:

$$D(f) = ?$$

Областью определения функции $y=f(x)$, заданной аналитически, называют множество всех действительных значений независимой переменной x , для каждого из которых функция принимает действительные значения.

Находим область изменения функции:

$E(f)$ -?

Областью изменения функции $f(x)$ называют множество всех чисел $f(x)$, соответствующих каждому x из области определения функции.

2. Выясняем четность функции.

- Если $f(-x)=f(x)$, то функция $f(x)$ называется четной. График четной функции симметричен относительно оси ординат (оси Oy).
- Если $f(-x)=-f(x)$, то функция $f(x)$ называется нечетной. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

3. Выясняем периодичность функции

Если $f(x+T)=f(x)$ при некотором $T>0$, то функция $y=f(x)$ называется периодической. График периодической функции имеет одну и ту же форму на каждом из отрезков $\dots, [-2T; -T], [-T; 0], [0; T], [T; 2T], \dots$.

Поэтому достаточно построить график на каком-нибудь одном таком отрезке и затем воспроизвести полученную кривую на остальных отрезках.

4. Находим точки максимума и минимума функции и интервалы возрастания и убывания (интервалы монотонности).

Для этого:

- вычисляем производную $f'(x)$ и находим критические точки функции, т.е. точки, в которых $f'(x)=0$ или не существует;
- определяя знак производной, находим интервалы возрастания и убывания функции: если $f'(x)>0$, то функция возрастает, если $f'(x)<0$, то функция убывает;
- если производная меняет знак при переходе через критическую точку $x_0 \in D$, то x_0 – точка экстремума: если производная меняет знак с «минуса» на «плюс» – то x_0 – точка минимума, если же с «плюса» на «минус» – то точка максимума. Если производная сохраняет знак при переходе через критическую точку, то в этой точке экстремума нет.

5. Находим точки перегиба функции и интервалы выпуклости вверх/вниз.

- Для этого:
- вычисляем вторую производную $f''(x)$ и находим точки, принадлежащие области определения функции, в которых $f'(x)=0$ или не существует;
- определяя знак второй производной, находим интервалы выпуклости и вогнутости:
- если $f''(x)<0$, то график функции имеет выпуклость вверх,
- если $f''(x)>0$, то график функции имеет выпуклость вниз;
- если вторая производная меняет знак при переходе через точку
- $x_0 \in D$, в которой $f'(x)=0$ или не существует, то x_0 – точка перегиба.

6. Находим асимптоты функции.

- Вертикальные:

находим односторонние пределы в граничных точках

$$\lim_{\substack{n \rightarrow a \\ n > a}} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{n \rightarrow a \\ n > a}} f(x) = -\infty.$$

Если такие пределы существуют, то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$

- Наклонные асимптоты:

Если выполняется условие $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$,

то прямая $y = kx + b$ является асимптотой функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Коэффициенты k и b можно найти следующим образом:

- $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$

7. Есть ли у функции промежутки, где она возрастает (убывает)?

- $f'(x) > 0$, функция возрастающая
- $f'(x) < 0$, функция убывающая

8. Есть ли у нее промежутки знакопостоянства?

- $f'(x) = 0$ на промежутке, \Rightarrow функция $f(x)$ постоянная на этом промежутке.
- Если в точке x_0 производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 - *точка локального максимума*;
- Если в точке x_0 производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 - *точка локального минимума*.

Пример

$$y = x/x^2 - 1$$

- 1. Знаменатель выражения $x/(x^2 - 1)$ обращается в нуль при $x = -1$ и при $x = 1$, поэтому $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.
- 2. $E(f) = \mathbf{R}$ (видно из дальнейшего исследования)
- 3. $f(-x) = -f(x)$ - функция нечетная.
- 4. Функция неперриодическая.
- 5. Производная функции в области определения:
 $f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$ и $f'(x) < 0$ во всей области определения \Rightarrow функция непрерывна и возрастает во всей области определения, точек локального экстремума нет.
- 6. $f''(x) = 2x(x^2 + 3)/(x^2 - 1)^3$
обращается в нуль в точке $x=0$

Знак второй производной $f''(x)$

x		$(-1;0)$	$(0;1)$	
$f''(x)$	-	+	-	+

Вторая производная меняет знак только в одной точке $x=0 \Rightarrow x_0=0$
– точка перегиба.

На интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$ график функции имеет выпуклость
вверх, а на интервалах $(-1;0)$ и $(1; +\infty)$ - выпуклость вниз.

Вычислим координаты нескольких точек:

x	0	$1/2$	2	3
$f(x)$	0	$-2/3$	$2/3$	$3/8$

График имеет вид

