

# ОБЪЕМ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

**Объем** – величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа. За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1. Объем фигуры в пространстве является неотрицательным числом.
2. Равные фигуры имеют равные объемы.
3. Если фигура  $\Phi$  составлена из двух неперекрывающихся фигур  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , то объем фигуры  $\Phi$  равен сумме объемов фигур  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , т.е.

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$

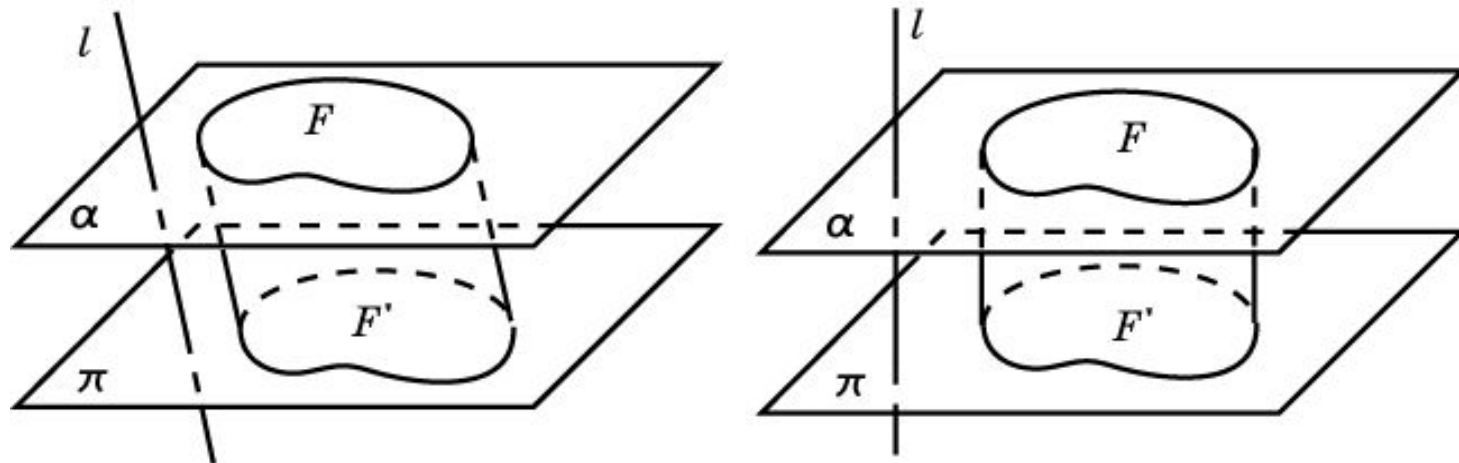
Две фигуры, имеющие равные объемы, называются **равновеликими**.

# Обобщенный цилиндр

Пусть  $\alpha$  и  $\pi$  - две параллельные плоскости,  $l$  - пересекающая эти плоскости прямая;  $F$  – фигура на одной из этих плоскостей,  $F'$  – ее параллельная проекция на другую плоскость в направлении прямой  $l$ . Отрезки, соединяющие точки фигуры  $F$  с их проекциями, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть **обобщенным цилиндром**. Фигуры  $F$  и  $F'$  называются **основаниями** обобщенного цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называют **высотой** обобщенного цилиндра.

В случае, если в определении обобщенного цилиндра вместо параллельной проекции берется ортогональная, т. е. прямая  $l$  перпендикулярна плоскостям  $\alpha$  и  $\pi$ , то обобщенный цилиндр называется **прямым**. В противном случае цилиндр называется **наклонным**.

Частным случаем обобщенного цилиндра являются цилиндр и призма.



# Объем обобщенного цилиндра

**Теорема.** Объем прямого обобщенного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

**Следствие 1.** Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т. е. имеет место формула

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – ребра параллелепипеда.

**Следствие 2.** Объем прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т. е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где  $S$  – площадь основания,  $h$  – высота призмы.

**Следствие 3.** Объем прямого кругового цилиндра, высота которого равна  $h$  и радиус основания  $R$ , вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 \cdot h.$$

# Упражнение 1

Может ли объем фигуры в пространстве быть: а) отрицательным числом; б) нулем?

Ответ: а) Нет; б) да.

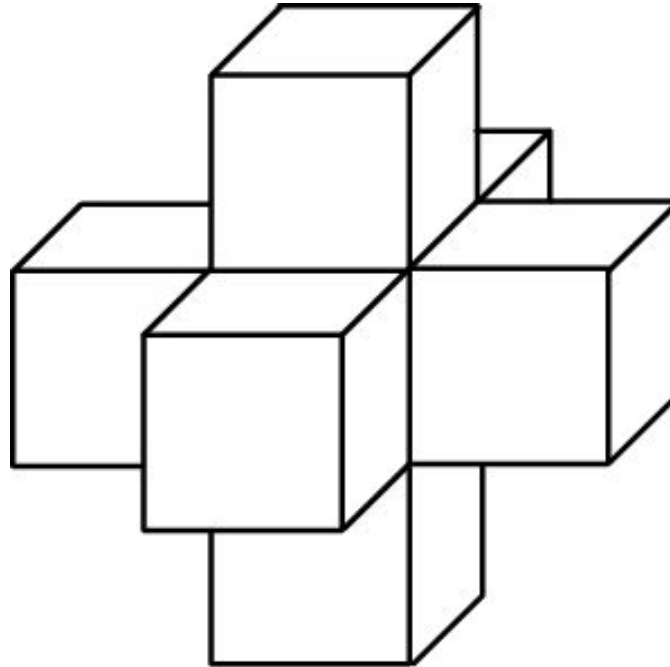
## Упражнение 2

Диагональ куба равна 2 см. Найдите его объем.

Ответ:  $\frac{8\sqrt{3}}{9} \text{ см}^3$ .

## Упражнение 3

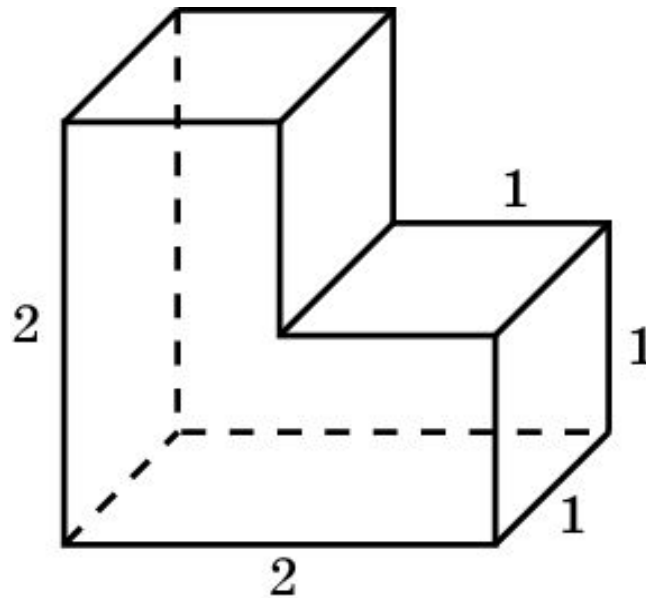
Чему равен объем пространственного креста, если ребра образующих его кубов равны единице?



Ответ: Семь куб. ед.

## Упражнение 4

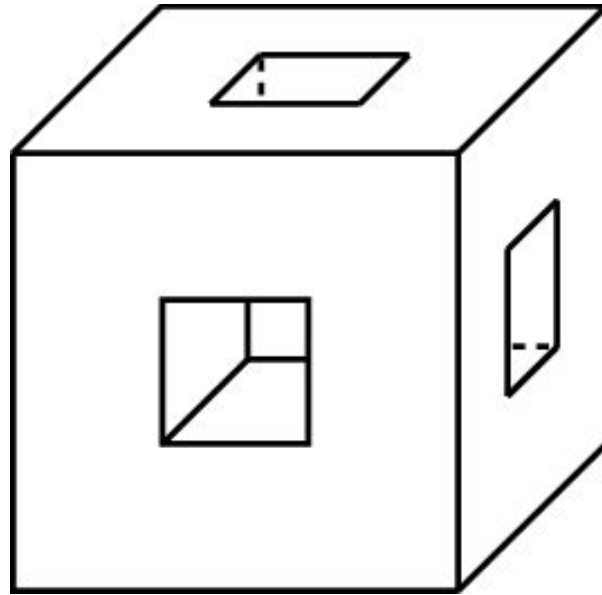
Чему равен объем фигуры, изображенной на рисунке?



Ответ: Три куб. ед.

## Упражнение 5

Дан куб с ребром 3 см. В каждой грани проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 1 см. Найдите объем оставшейся части.



Ответ:  $20 \text{ см}^3$ .



## Упражнение 6

Как относятся объемы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а)  $1 : 2$ ; б)  $1 : 3$ ; в)  $1 : n$ ?

Ответ: а)  $1 : 8$ ; б)  $1 : 27$ ; в)  $1 : n^3$ .

## Упражнение 7

Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на  $98 \text{ см}^3$ . Определите ребро куба.

Ответ: 3 см.

## Упражнение 8

В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 см и 5 см и образуют угол в  $60^\circ$ . Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в  $30^\circ$ . Определите объем этого параллелепипеда.

Ответ:  $140 \text{ см}^3$ .

## Упражнение 9

Как изменится объем прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в  $n$  раз; б) если два его измерения увеличить, причем каждое из них в 2, 3,  $n$  раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3,  $n$  раз?

**Ответ:** а) Увеличится в 2 раза, в 3 раза, в  $n$  раз;  
б) увеличится в 4 раза, в 9 раза, в  $n^2$  раз;  
в) увеличится в 8 раз, в 27 раз, в  $n^3$  раз.

## Упражнение 10

Осевое сечение прямого кругового цилиндра - квадрат со стороной 1 см. Найдите объем цилиндра.

Ответ:  $\frac{\pi}{4} \text{ см}^3$ .

# Упражнение 11

Одна кружка вдвое выше другой, зато другая в полтора раза шире.  
Какая кружка вместительнее?

Ответ: Та, которая шире.

## Упражнение 12

Диагональ осевого сечения цилиндра равна  $d$  и наклонена к плоскости основания под углом  $\varphi$ . Найдите объем цилиндра.

Ответ:  $V = \frac{\pi \cdot d^3}{4} \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi.$

## Упражнение 13

Найдите объем фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной  $a$ .

Ответ:  $\pi \cdot a^3$ .



## Упражнение 14

Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника около каждой из неравных его сторон  $a$  и  $b$ . Как относятся объемы цилиндров?

Ответ:  $a : b$ .

## Упражнение 15

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите объем данной призмы.

Ответ:  $60 \text{ см}^3$ .

## Упражнение 16

Найдите объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой 5 см и высота 8 см.

Ответ:  $200 \text{ см}^3$ .

## Упражнение 17

Найдите высоту правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания 20 см и объем  $4800 \text{ см}^3$ .

Ответ: 12 см.

## Упражнение 18

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Ответ: 1 : 3.

## Упражнение 19

Основание прямой призмы - ромб, площадь которого равна  $1 \text{ м}^2$ . Площади диагональных сечений равны  $3 \text{ м}^2$  и  $6 \text{ м}^2$ . Найдите объем призмы.

Ответ:  $3 \text{ м}^3$ .

## Упражнение 20

Найдите формулу объема правильной  $n$ -угольной призмы, высота которой равна  $h$ , а сторона основания равна  $a$ .

Ответ:  $V = \frac{n \cdot a^2 h}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$ .

## Упражнение 21

Объем правильной шестиугольной призмы равен  $V$ . Определите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.

Ответ:  $\frac{3V}{4}$ .



## Упражнение 22

Во сколько раз объем цилиндра, описанного около правильной четырехугольной призмы, больше объема цилиндра, вписанного в эту же призму?

Ответ: В 2 раза.

## Упражнение 23

В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?

Ответ:  $243\pi$  см<sup>3</sup>.

## Упражнение 24

Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом  $\phi$  к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен  $R$ . Найдите объем части цилиндра, отсекаемой плоскостью.

Ответ:  $\pi R^3 \operatorname{tg} \phi$ .

## Упражнение 25

Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, в основании которой квадрат со стороной 1, а высота равна 0,5.

Ответ:  $\frac{1}{6}$ .