

# ОБЪЕМ КОНУСА

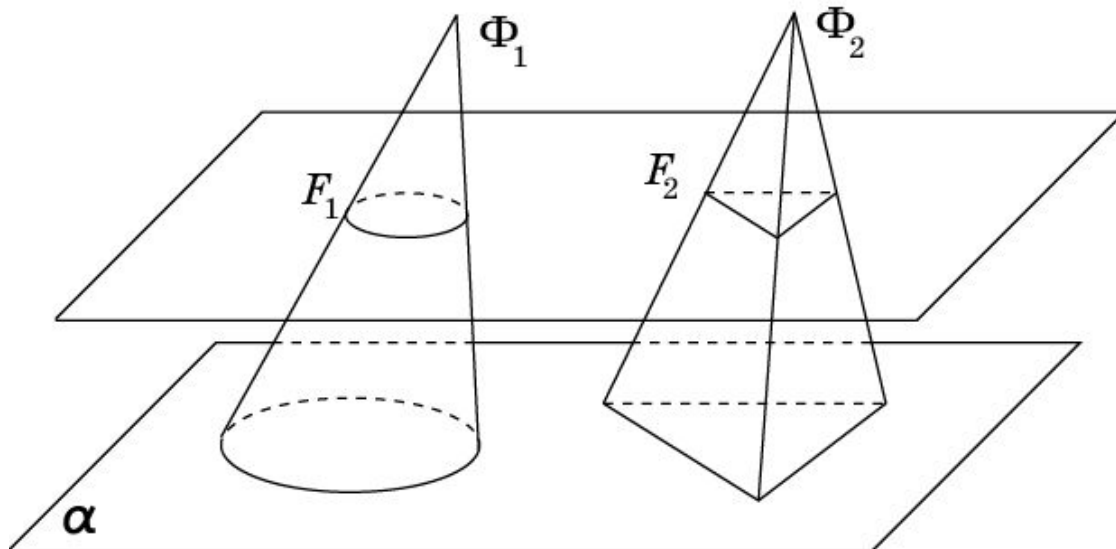
**Теорема.** Объем конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту.

**Доказательство.** Для данного конуса с основанием площади  $S$  и высотой  $h$  рассмотрим какую-нибудь пирамиду с теми же площадью основания и высотой. Тогда эти пирамида и конус имеют равные объемы. Но для объема пирамиды имеет место

Формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h.$$

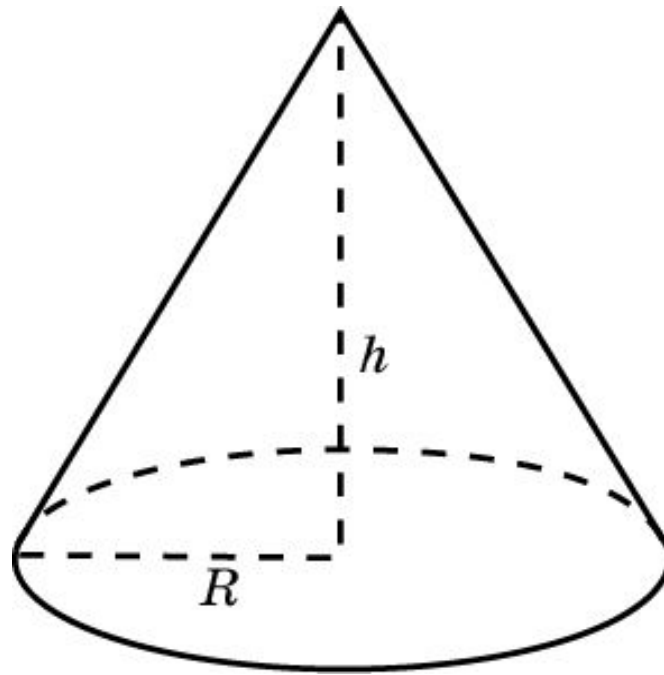
Следовательно, она имеет место и для объема произвольного конуса.



## ОБЪЕМ КОНУСА

В частности, для кругового конуса, в основании которого — круг радиуса  $R$ , и высота которого равна  $h$ , имеет место формула

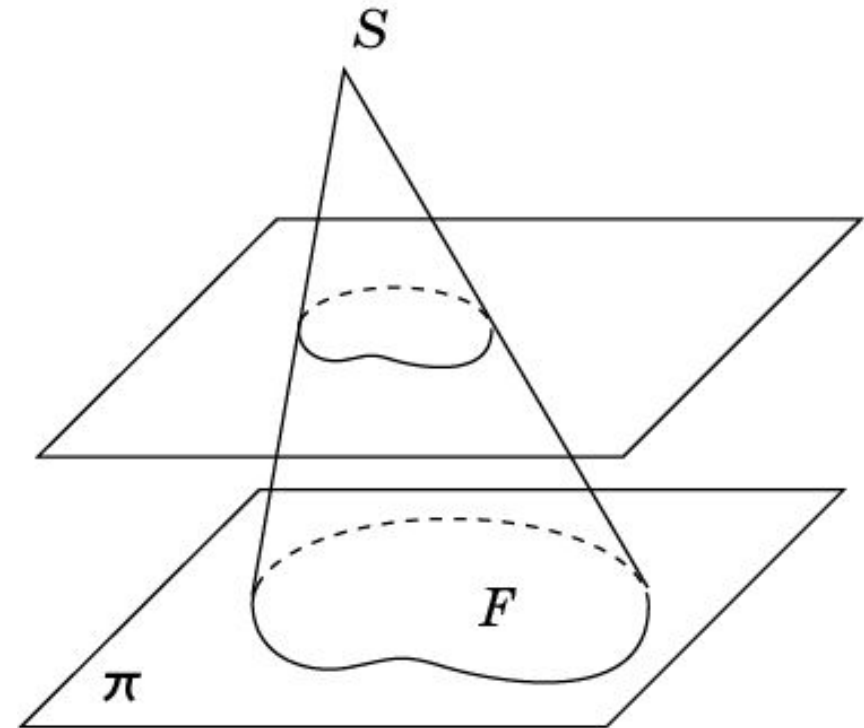
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$



# ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Для данного конуса рассмотрим плоскость, параллельную основанию и пересекающую конус. Часть конуса, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом**.

Полученное при этом сечение конуса также называется **основанием усеченного конуса**. Расстояние между плоскостями оснований называется **высотой усеченного конуса**.



**Теорема.** Объем усеченного конуса выражается формулой

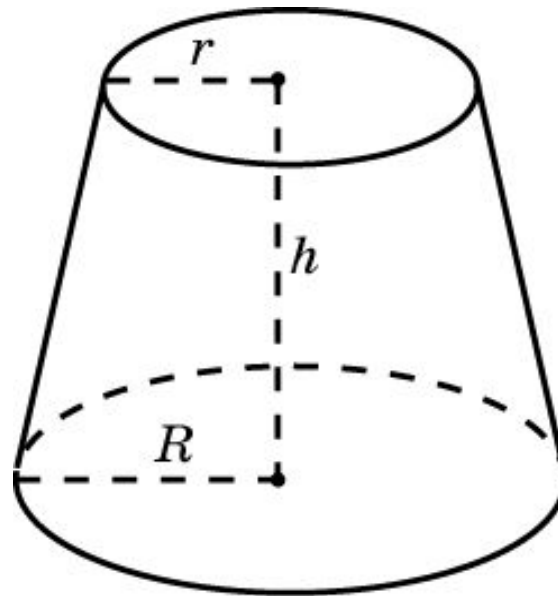
$$V = \frac{1}{3} g(S + \sqrt{S \cdot s} + s).$$

где  $S$ ,  $s$  - площади оснований,  $g$  - высота усеченного конуса.

## ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Объем усеченного конуса, основания которого – круги радиусов  $R$  и  $r$ , а высота равна  $h$ , выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R \cdot r + r^2).$$



## Упражнение 1

Во сколько раз увеличится объем кругового конуса, если: а) высоту увеличить в 3 раза; б) радиус основания увеличить в 2 раза?

Ответ: а) В 3 раза; б) в 4 раза.

## Упражнение 2

Изменится ли объем кругового конуса, если радиус основания увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 2 раза?

Ответ: Увеличится в 2 раза.

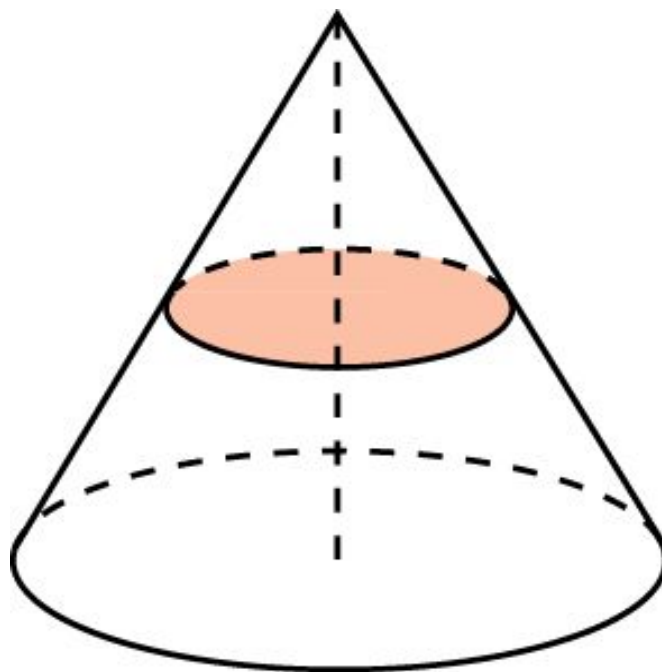
### Упражнение 3

Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен  $40\pi$  см<sup>3</sup>.

Ответ:  $120\pi$  см<sup>3</sup>.

## Упражнение 4

Объем конуса равен 1. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей конуса?

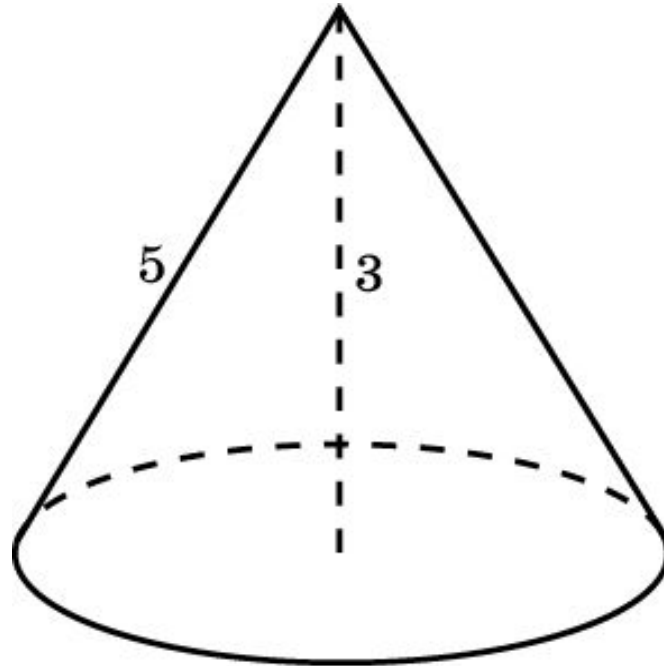


Ответ: 1:7.



## Упражнение 5

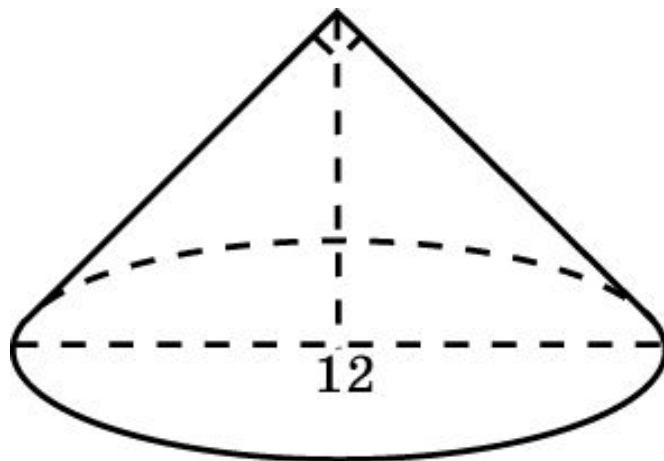
Высота конуса 3 см, образующая 5 см. Найдите его объем.



Ответ:  $16\pi$  см<sup>3</sup>.

## Упражнение 6

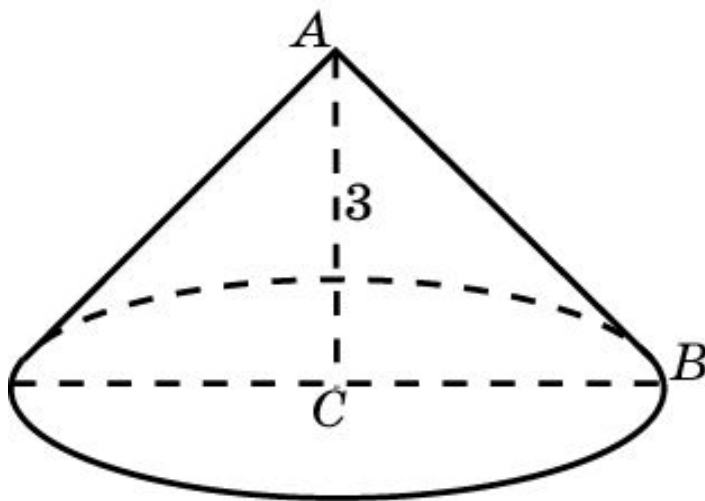
Диаметр основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения -  $90^\circ$ . Вычислите объем конуса.



Ответ:  $72\pi$  см<sup>3</sup>.

## Упражнение 7

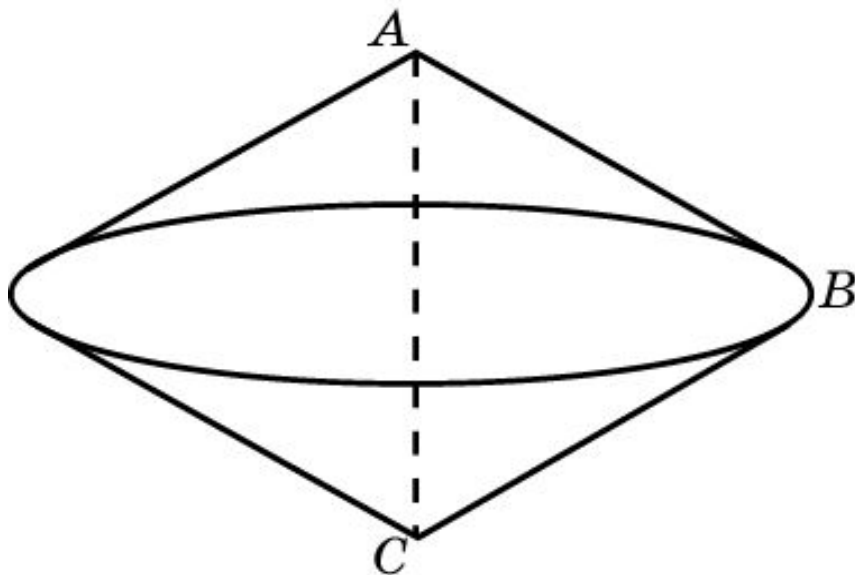
Найдите объем тела, получающегося при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, равного 3 см.



Ответ:  $9\pi \text{ см}^3$ .

## Упражнение 8

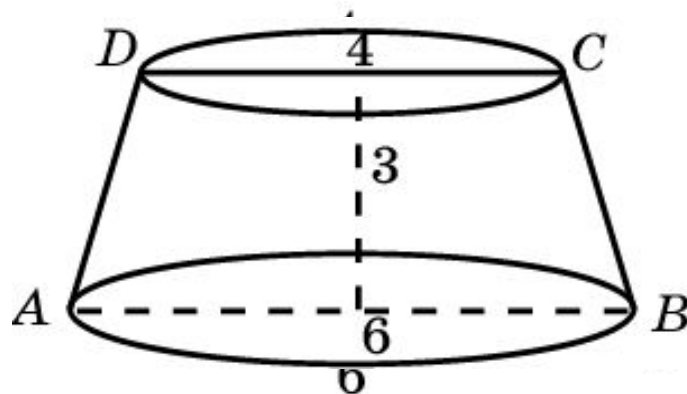
Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны, равной 1. Найдите объем тела вращения.



Ответ:  $\frac{\pi}{4}$ .

## Упражнение 9

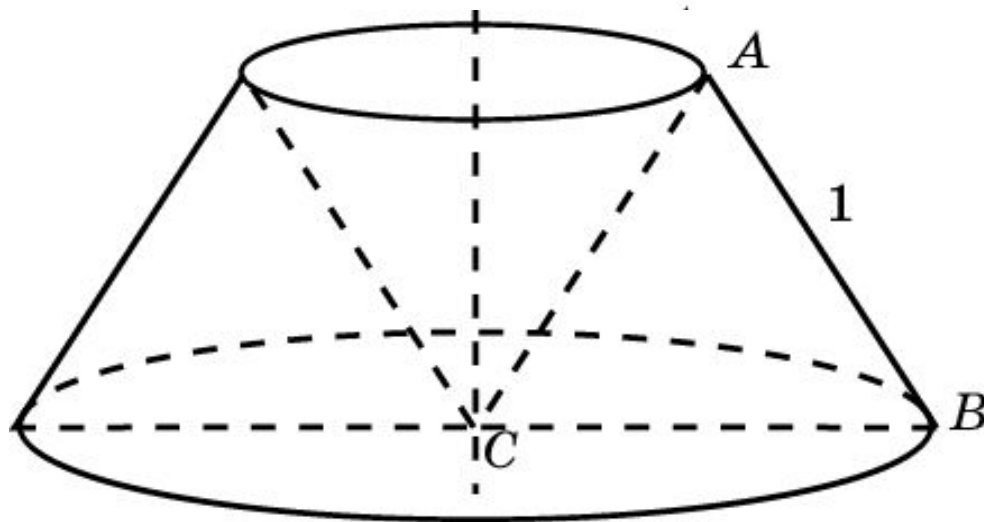
Равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 6 см, а высота – 3 см, вращается относительно оси симметрии. Найдите объем тела вращения.



Ответ:  $19\pi$  см<sup>3</sup>.

## Упражнение 10

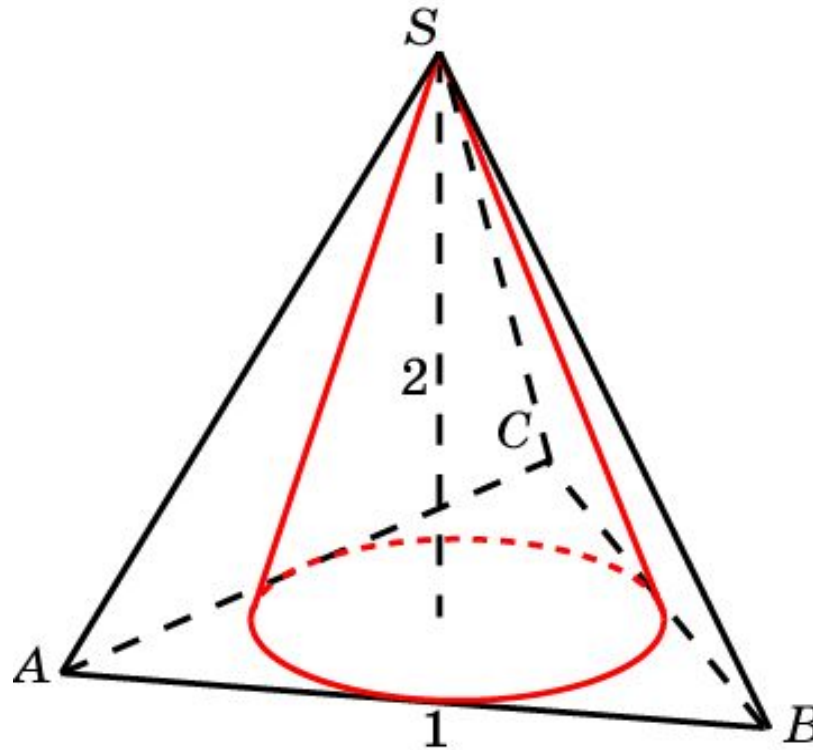
Равносторонний треугольник со стороной, равной единице, вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельной высоте треугольника. Найдите объем тела вращения.



Ответ:  $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ .

## Упражнение 11

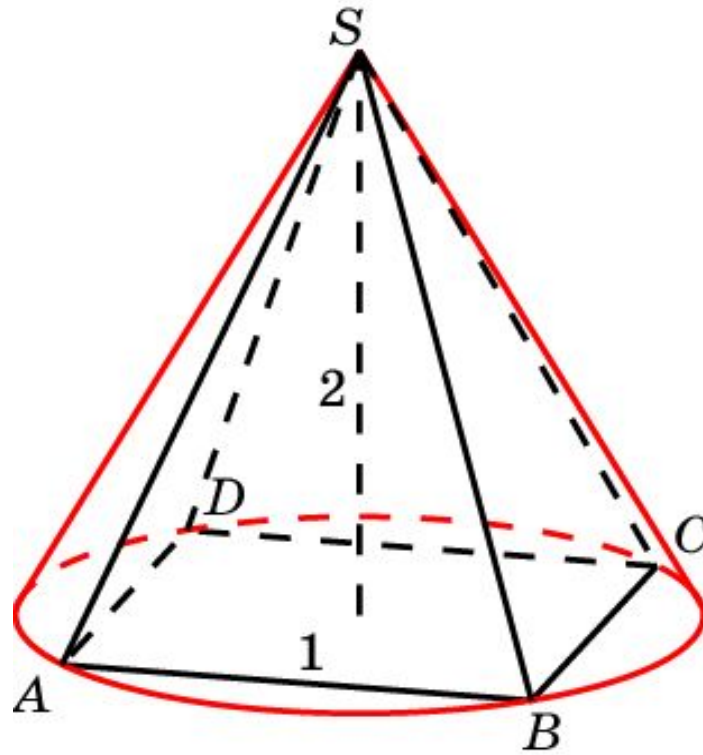
Конус вписан в правильную треугольную пирамиду со стороной основания 1 и высотой 2. Найдите его объем.



Ответ:  $\frac{\pi}{18}$ .

## Упражнение 12

Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания  $a$  и высотой  $h$ . Найдите его объем.

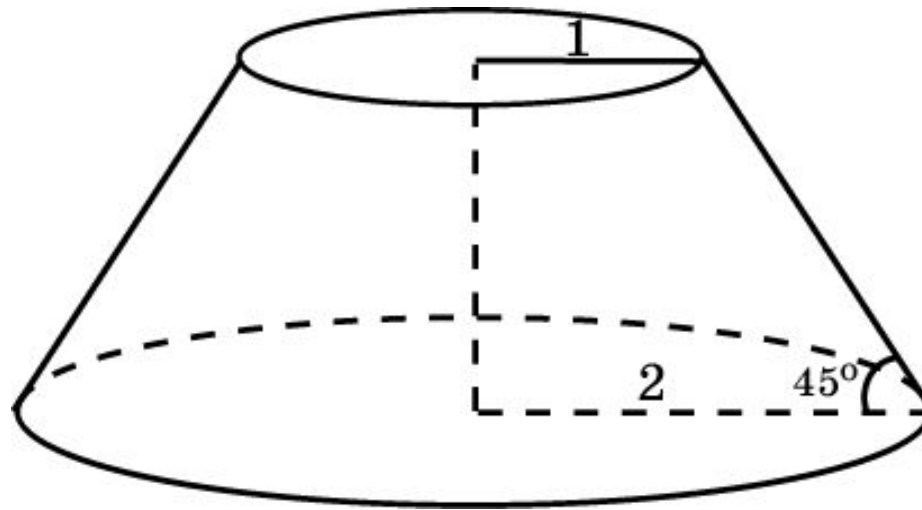


Ответ:  $\frac{\pi}{3}$ .



### Упражнение 13

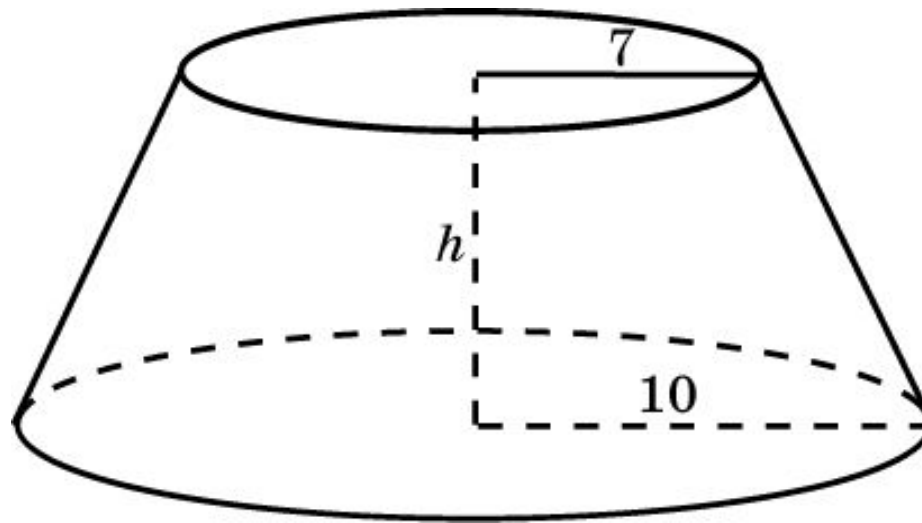
Радиусы оснований усеченного конуса равны 1 и 2. Образующая наклонена к основанию под углом  $45^\circ$ . Найдите его объем.



Ответ:  $\frac{7\pi}{3}$ .

## Упражнение 14

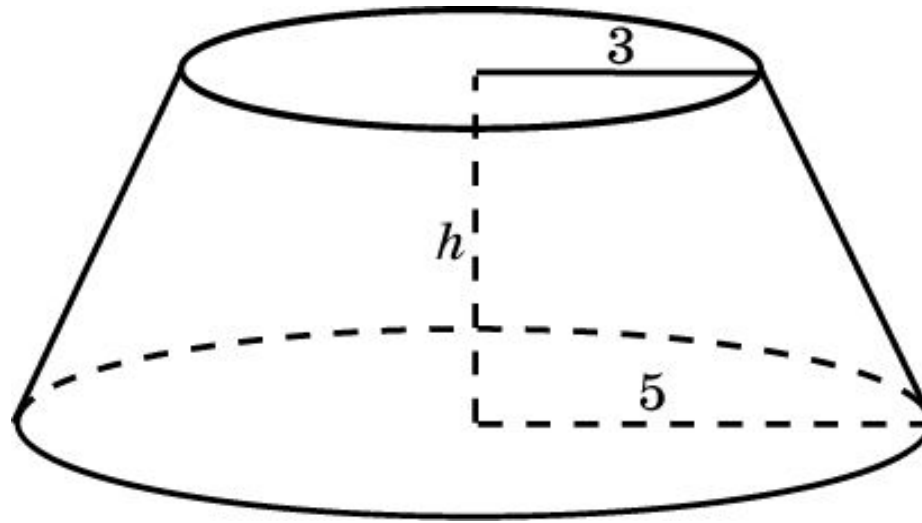
Объем усеченного конуса равен  $584\pi$  см<sup>3</sup>, а радиусы оснований 10 см и 7 см. Найдите высоту усеченного конуса.



Ответ: 8 см.

## Упражнение 15

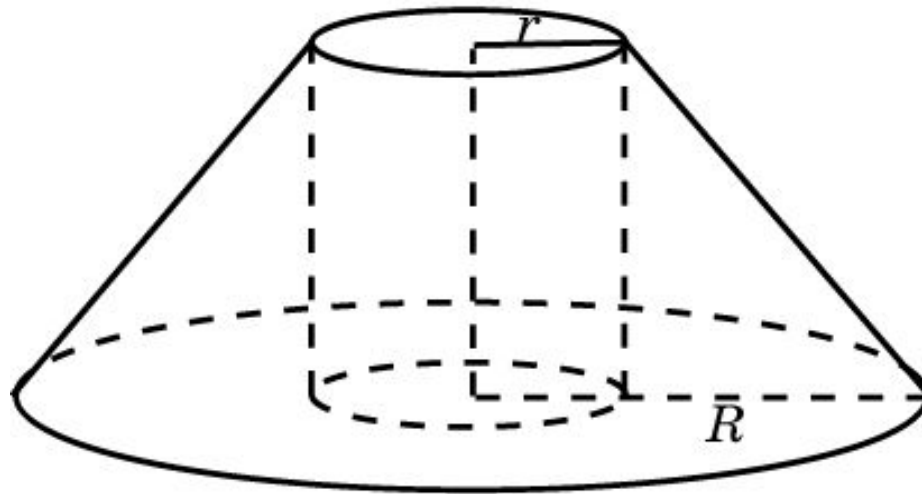
Усеченный конус, у которого радиусы оснований 3 см и 5 см, и полный конус такой же высоты равновелики. Чему равен радиус основания полного конуса?



Ответ: 7 см.

## Упражнение 16

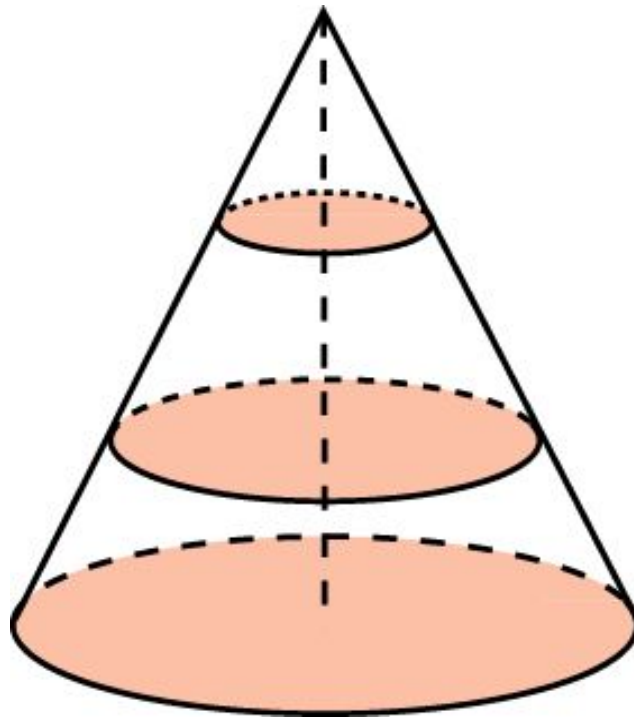
На меньшем основании усеченного конуса построен цилиндр, второе основание которого лежит в плоскости большего основания. Объем цилиндра составляет седьмую часть объема усеченного конуса. Найдите зависимость между радиусами оснований усеченного конуса.



Ответ:  $R = 4r$ .

## Упражнение 17

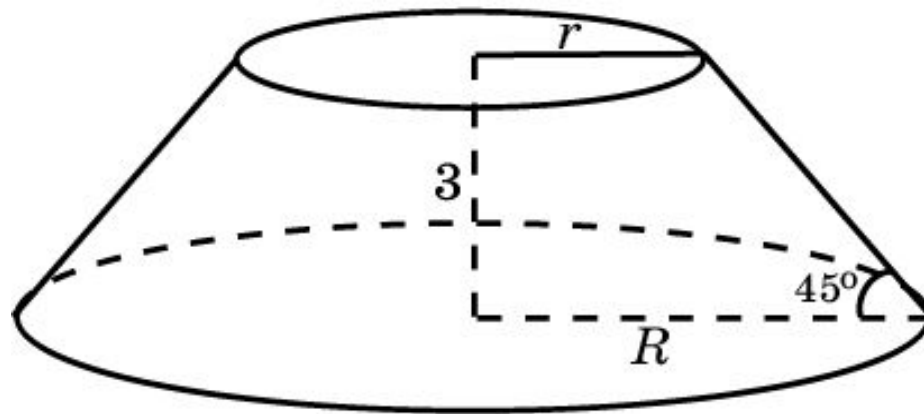
Объем конуса равен 1. Его высота разделена на три равные части, и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости. Найдите объем средней части конуса.



Ответ:  $\frac{7}{27}$ .

## Упражнение 18

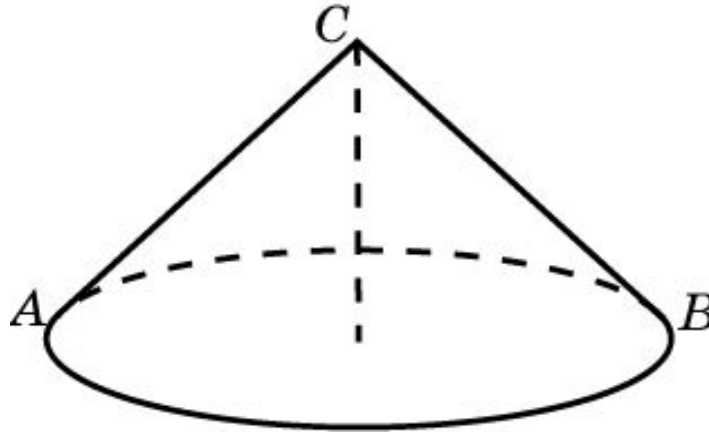
Высота усеченного конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое большее другого, а образующая наклонена к основанию под углом  $45^\circ$ . Найдите объем.



Ответ:  $63\pi$ .

## Упражнение 19

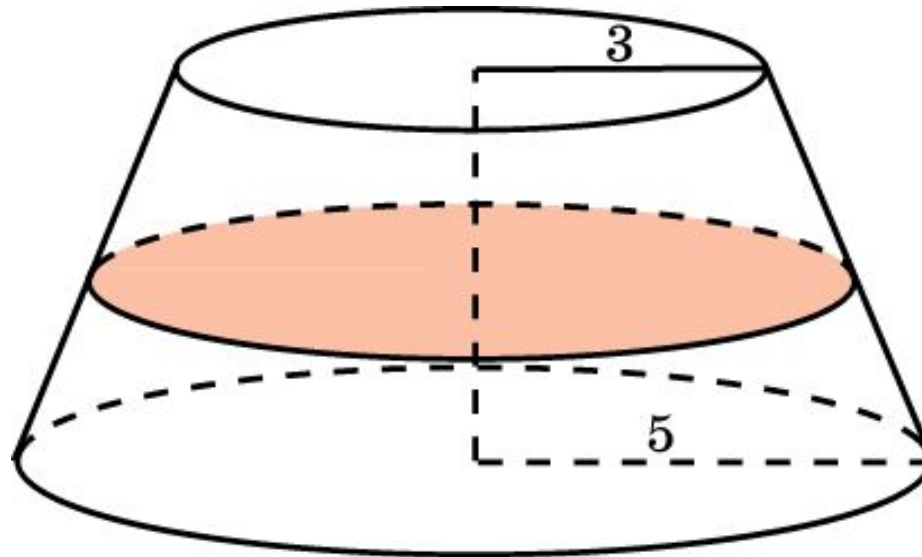
Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник площади  $9 \text{ см}^2$ . Найдите объем конуса.



Ответ:  $18\sqrt{2}\pi \text{ см}^3$ .

## Упражнение 20

Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 5 см. Найдите отношение объемов частей усеченного конуса, на которые он делится средним сечением.

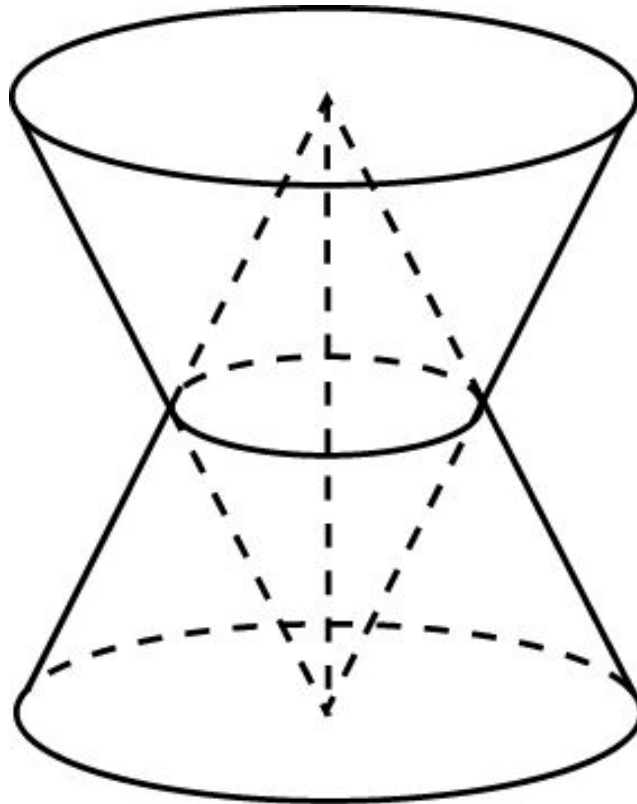


Ответ: 37:61.



## Упражнение 21

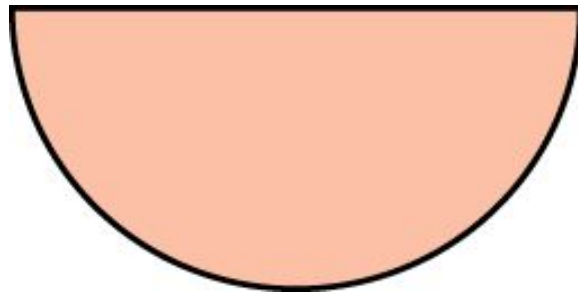
Два конуса имеют общую высоту и параллельные основания. Найдите объем их общей части, если объем каждого конуса равен 1.



Ответ:  $\frac{1}{4}$ .

## Упражнение 22

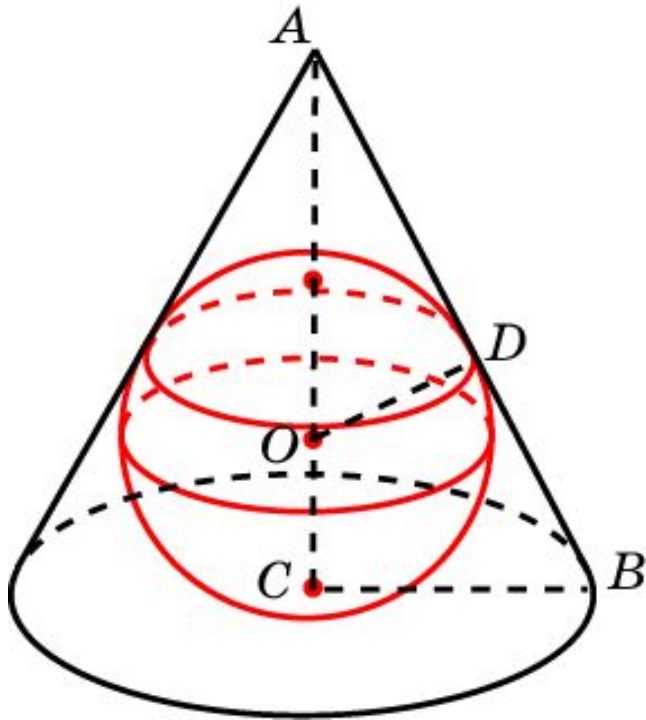
Разверткой боковой поверхности конуса служит полукруг радиуса 2. Найдите объем конуса.



Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ .

## Упражнение 23

В конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар радиуса 1. Найдите объем конуса.



Ответ:  $\frac{32\pi}{9}$ .

**Решение.** Треугольники  $ABC$  и  $AOD$  подобны. Следовательно,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{OD}{AD}.$$

Пусть  $AO = x$ . Имеем:  $BC = 2$ ,  $AC = 1 + x$ ,  $OD = 1$ ,  $AD = \sqrt{x^2 - 1}$ .

Откуда находим  $x = \frac{5}{3}$ .

Таким образом, высота конуса равна

$$\frac{8}{3}. \text{ Объем конуса равен } \frac{32\pi}{9}.$$