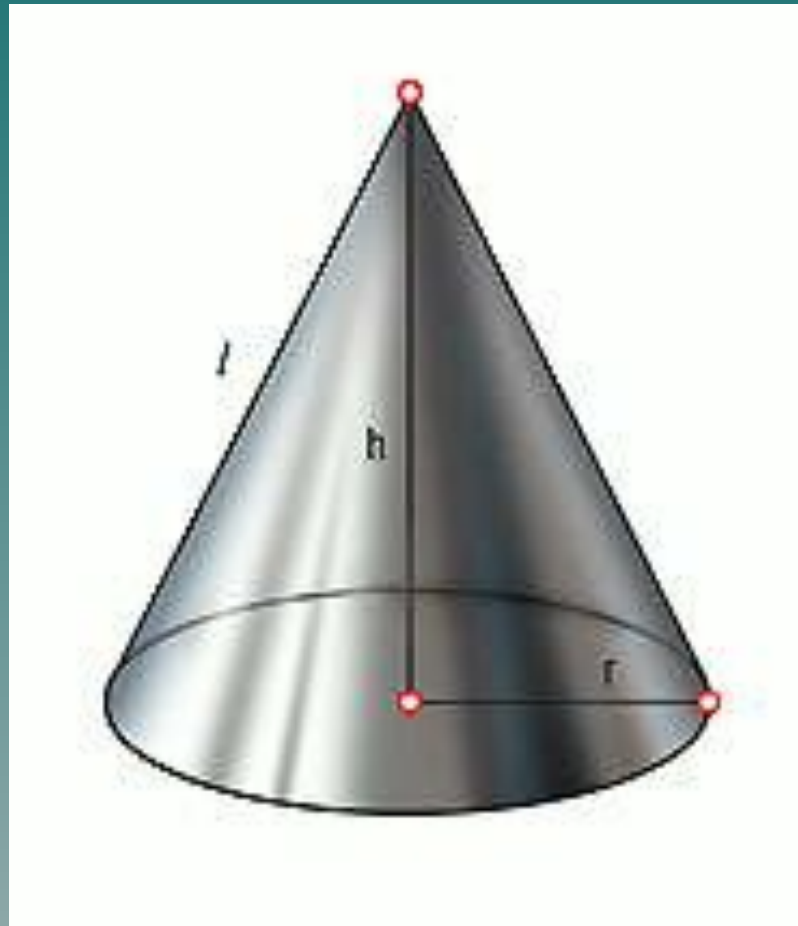
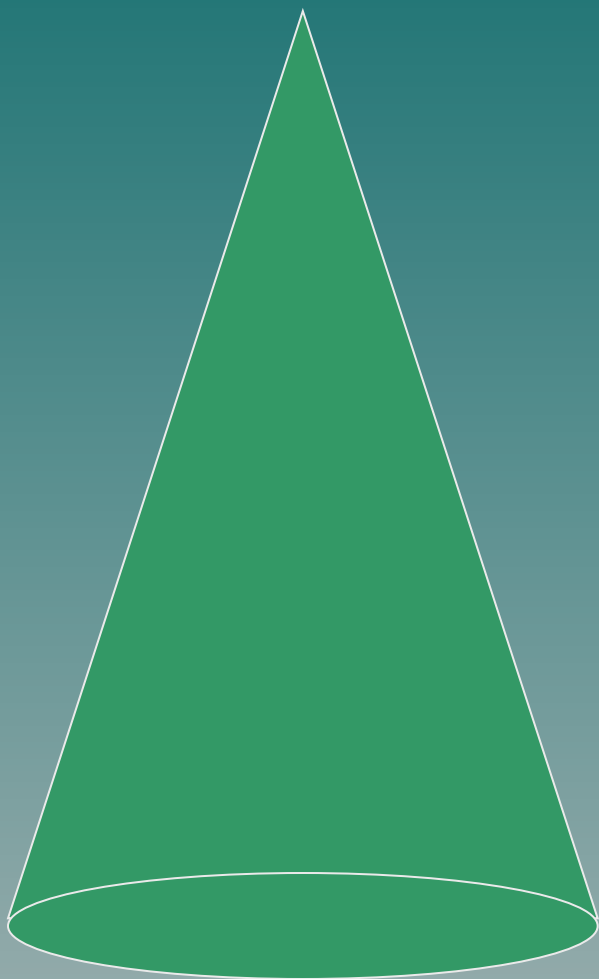


Объём конуса.



Как Вы думаете, какова связь между этим телом и этой картиной?



Оказывается, самая непосредственная. Эта картина называется «Сосновый бор», её написал художник И.И.Шишкин. А тело, как Вы уже знаете, называется конус. Латинское слово *conus* позаимствовано из греческого языка («конос» - затычка, втулка, сосновая шишка).

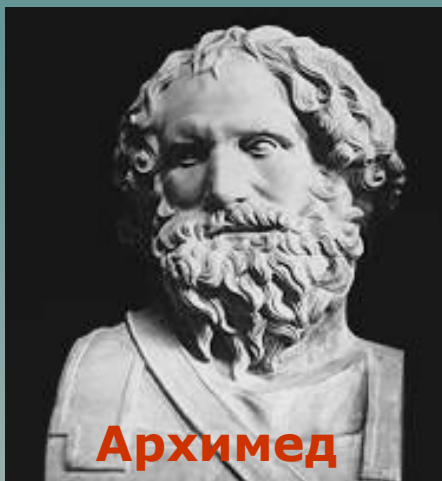
Задание. Вспомните определение прямого кругового конуса, назовите его сопутствующие понятия.



«Знаете ли Вы, что...»

В далеком прошлом, важнейшей задачей египетской и вавилонской геометрии было определение объема различных пространственных тел. Эта задача отвечала необходимости строить дома, дворцы, храмы и другие сооружения. Объемы зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне и вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли путем умножения площади основания на высоту. Однако древнему Востоку были известны в основном только отдельные правила, найденные опытным путем. В более позднее время, когда геометрия сформировалась как наука, был найден общий подход к вычислению объемов многогранников и тел вращения.

Среди замечательных греческих ученых V-IV вв. до н.э., которые разрабатывали теорию объемов, были:



Архимед



Евклид

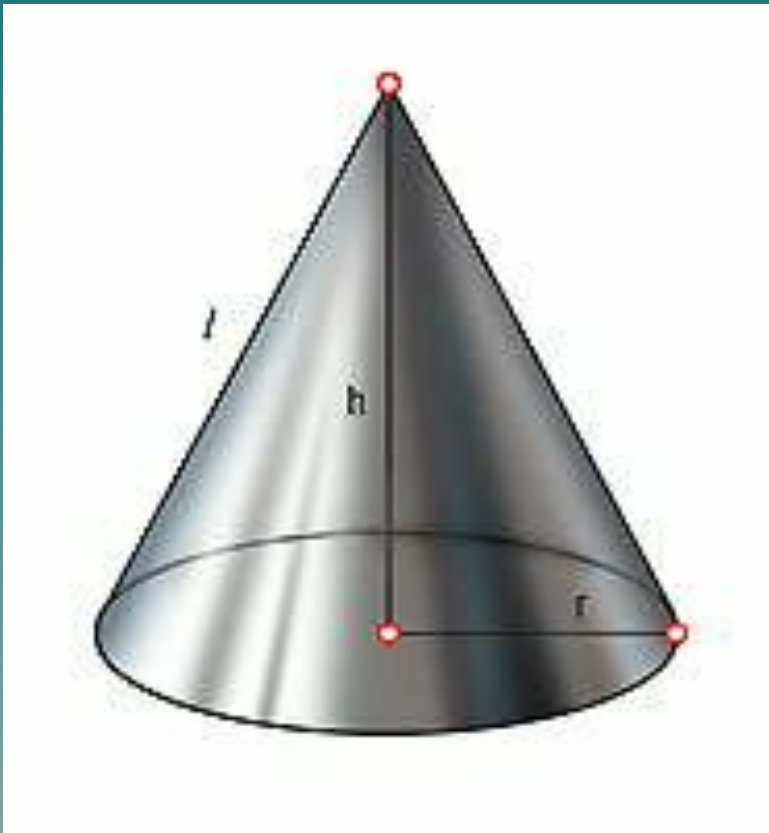


Демокрит



Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Иначе говоря, объем конуса выражается следующей формулой:



$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

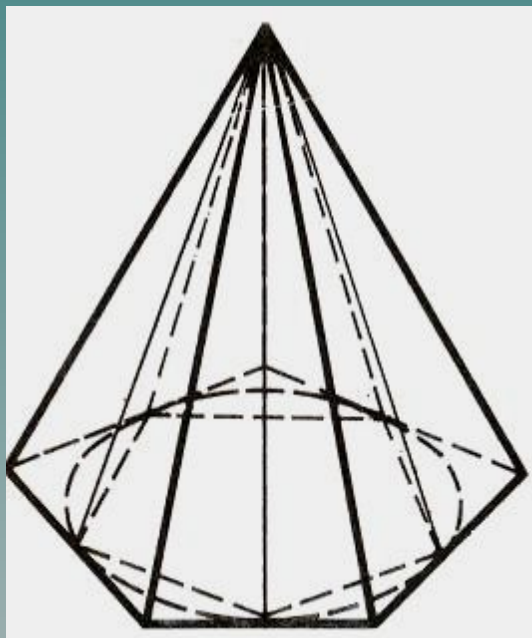
Существует много доказательств этой формулы, рассмотрим некоторые из них.



Первое доказательство.

За величину объёма конуса принимается предел, к которому стремится объём правильной пирамиды, вписанной в конус, при неограниченном удвоении числа сторон её основания.

$$V_{\text{конуса}} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\text{пир}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H \right) = \frac{1}{3} H \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{осн}} = \frac{1}{3} H \cdot S_{\text{круга}}.$$



$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$



Второе доказательство:

Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, подобно основанию. Если плоскость проходит на расстоянии x от вершины, то коэффициент подобия равен $\frac{x}{H}$

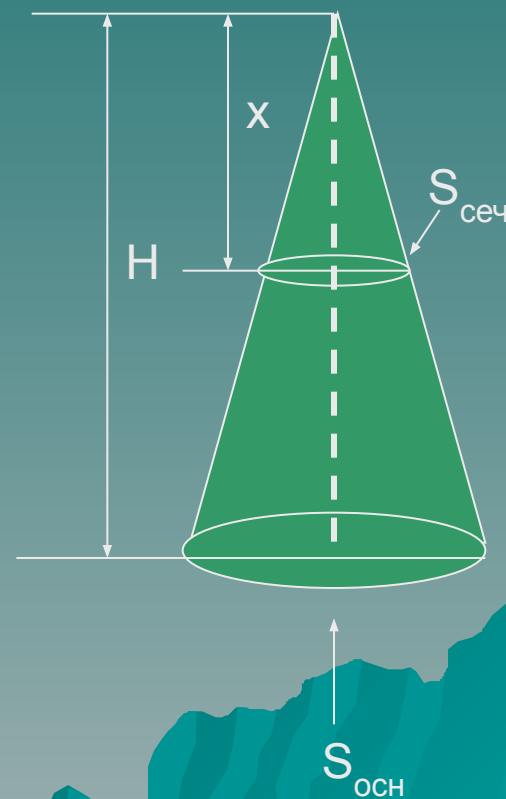
Поэтому площадь сечения $Q(x)$ такой плоскостью равна:

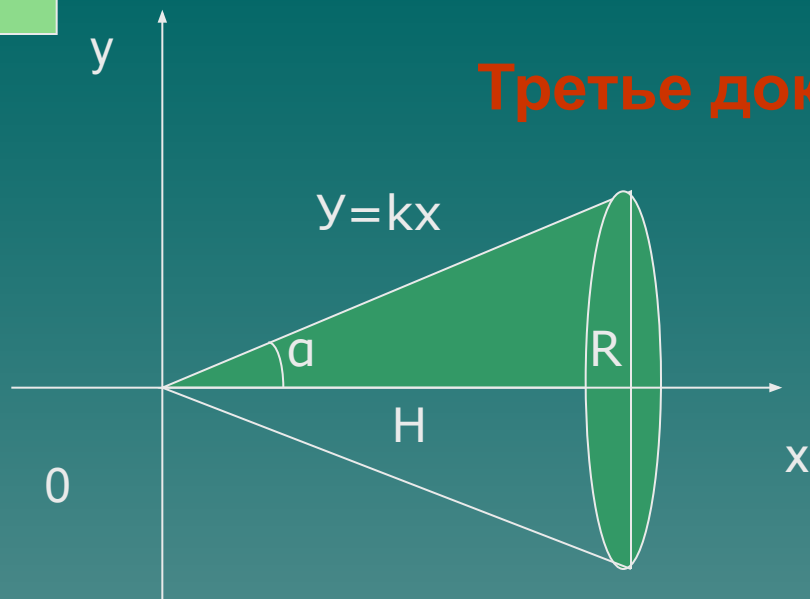
$$S(x) = \left(\frac{x}{H}\right)^2 S,$$

где S - площадь основания.

Значит, объем конуса K будет:

$$\begin{aligned} V(K) &= \int_0^H S(x) dx = \\ &= \int_0^H S \frac{x^2}{H^2} dx = \frac{S}{H^2} \left(\frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^H = \frac{1}{3} SH. \end{aligned}$$





Третье доказательство:

$$V_{\text{т.вращ.}} = \pi \int_0^H f^2(x) dx.$$

$$V_{\text{конуса}} = \pi \int_0^H (kx)^2 dx = \pi k^2 \int_0^H x^2 dx = \pi \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{\pi R^2 \cdot H^3}{H^2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Задание. Исходя из своих возможностей, выберите хотя бы одно доказательство и законспектируйте его в тетради.

Задачи для самостоятельного решения:

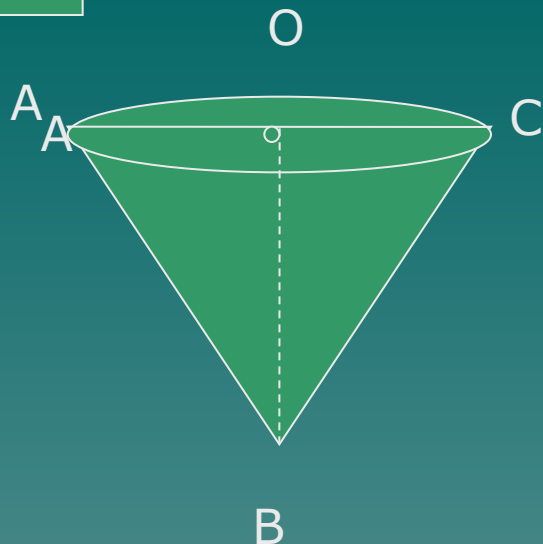
Задача 1. Авиационная бомба среднего калибра дает при взрыве воронку диаметром 6 м и глубиной 2 м. Какое количество земли (по массе) выбрасывает эта бомба, если 1 м^3 земли имеет массу 1650 кг?

Задача 2. Смолу для промышленных нужд собирают, подвешивая конические воронки к соснам. Сколько воронок диаметром 10 см с образующей 13 см нужно собрать, чтобы заполнить десятилитровое ведро?

Сравните свои ответы с данными ответами.

Задача 1. ≈ 31 тонна. **Задача 2.** ≈ 32 воронки.

Если задачи решены верно – перейди к слайду 11. Если возник вопрос - перейди к слайду 10 или обратись к учителю.

Задача 1.

Дано: $AC=6\text{м}$

$OB=2\text{м}$

$1\text{м}^3=1\ 650\ \text{кг}$

Найти: m (количество земли)

Решение: $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$

$R=AC/2, R=3\text{м}, V=1/3 \cdot 3,14 \cdot 3^2 \cdot 2 \approx 18,8(\text{м}^3)$

$m=1\ 650 \cdot 18,8=31\ 020(\text{кг}) \approx 31\text{т.}$

Ответ: 31 тонна.

Задача 2. (рисунок тот же) Дано: $AC=10\text{см}$

$AB=13\text{см}$

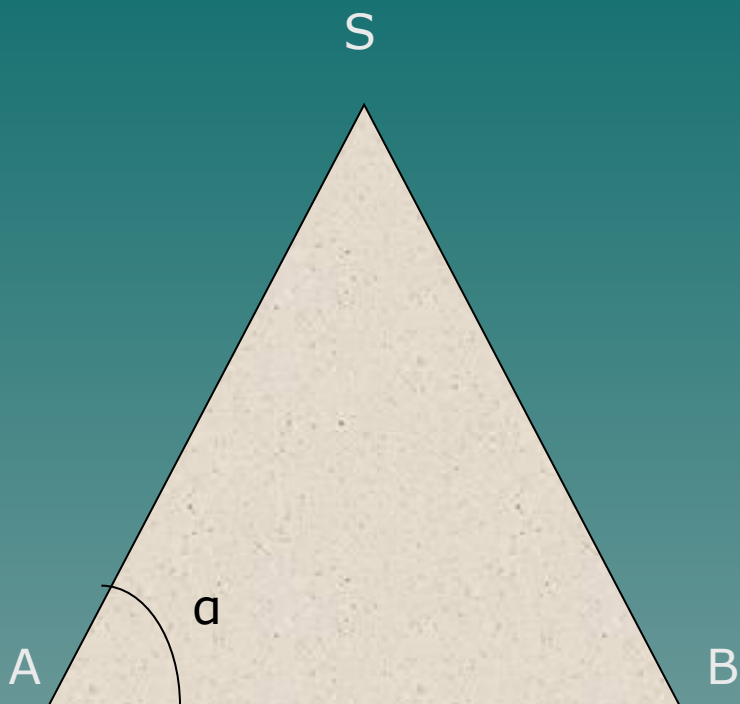
Найти: n -количество 10-литровых ведер

Решение: $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$

$R=AC/2, R=5\text{см}, H=\sqrt{13^2-5^2}=12(\text{см}), V=1/3 \cdot 3,14 \cdot 5^2 \cdot 12 \approx 314(\text{см}^3)$
 $\approx 0,314\text{дм}^3$

$n=10/0,314 \approx 31,8.$

Ответ: 32 воронки.



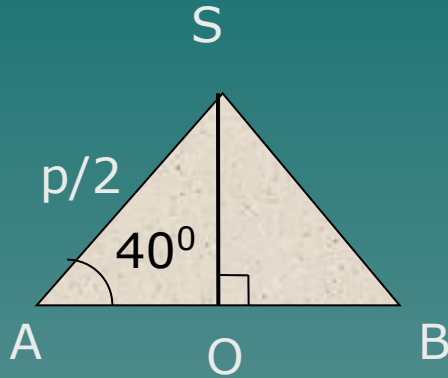
Задача 3*. Свободно насыпанный ворох свежеубранной пшеницы по своей форме близок к конусу с углом естественного откоса $\alpha=40^\circ$. Чему равен объем вороха, если его перекидка (длина линии ASB) равна p ? Какого объема ворох пшеницы можно насыпать на квадратной площадке со стороной 10 м?

Ответ: $p^3/20$; 110 м^3 .

Если задача решена верно, перейдите к слайду 13, если возник вопрос – разберитесь с решением на слайде 12 или же обратитесь к учителю.



Решение к задаче 3*.



а) Дано: $AS = p/2$
 $\alpha = 40^\circ$

Найти: V

Решение: $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$

$$H = p/2 \cdot \sin \alpha, \quad R = p/2 \cdot \cos \alpha,$$

$$V = 1/3 \cdot \pi \cdot (p/2 \cdot \cos \alpha)^2 \cdot p/2 \cdot \sin \alpha \approx p^3/20$$

б) Так как площадка имеет форму квадрата, то $R = 5\text{ м}$,
 $H = 5 \cdot \text{tg} 40^\circ = 4,2\text{ (м)}$. Значит, $V = 1/3 \cdot 3,14 \cdot 5^2 \cdot 4,2 \approx 110\text{ (м}^3\text{)}$

Ответ: $p^3/20$; 110 м^3 .

«Знаете ли, Вы...»

«Конусами» называется род брюхоногих моллюсков отряда переднежабранных, группы стрелоязычных, семейства конусовых. Раковина коническая (2-16 см), ярко окрашенная. Конусов свыше 520 видов. Живут в теплых морях, особенно в Вест-Индии и около Америки. Некоторые съедобны, другие ценятся благодаря красоте раковины.



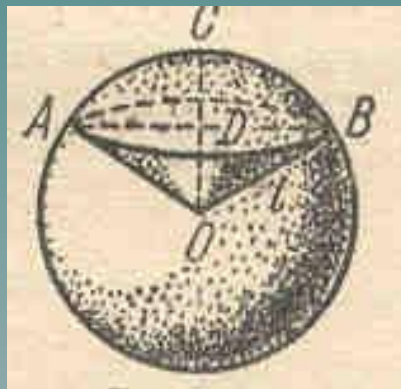
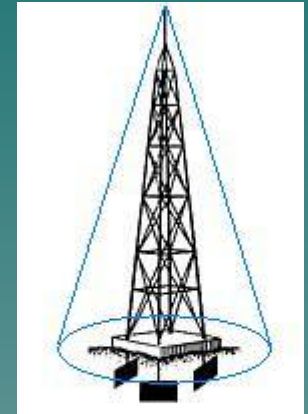
В геологии существует понятие «конус выноса». Это форма рельефа, образованная скоплением обломочных пород (гальки, гравия, песка), вынесенными горными реками на предгорную равнину или в более плоскую широкую долину.

В биологии есть понятие «конус нарастания». Это верхушка побега и корня растений, состоящая из клеток образовательной ткани.



«Знаете ли, Вы...»

По статистике на Земле ежегодно гибнет от разрядов молний 6 человек на 1 000 000 жителей (чаще в южных странах). Чтобы этого не случилось, устанавливают молниеотводы, которые образуют конус безопасности. Чем выше молниеотвод, тем больше объем такого конуса. Некоторые люди пытаются спрятаться от разрядов под деревом, но дерево не проводник, на нем разряды накапливаются, и дерево может быть источником напряжения.



В физике встречается понятие «телесный угол». Это конусообразный угол, вырезанный в шаре. Единица измерения телесного угла – 1 стерадиан. 1 стерадиан – это телесный угол, квадрат радиуса которого равен площади части сферы, которую он вырезает. Если в этот угол поместить источник света в 1 канделу (91 свечу), то получим световой поток в 1 люмен. Свет от киноаппарата или прожектора распространяется в виде конуса.



В своем драматическом произведении «Скупой рыцарь» Александр Сергеевич Пушкин рассказывает одну старинную легенду восточных народов:

«... Читал я где-то,
Что царь однажды воинам своим
Велел снести земли по горсти в кучу.
И гордый холм возвысился,
И царь мог с высоты с весельем озираться
И дол, покрытый белыми шатрами,
И море, где бежали корабли.»

Это одна из немногих легенд, в которой, при кажущемся правдоподобии, нет и зерна правды.

Задача 4*. Докажите геометрически, что если бы какой-нибудь древний деспот вздумал осуществить такую затею, он был бы обескуражен мизерностью результата. Перед ним высилась бы настолько жалкая кучка земли, что никакая фантазия не смогла бы раздуть ее в легендарный «гордый холм».

$$1 \text{ горсть} \approx 0,2 \text{ дм}^3$$

Войско в 100 000 воинов считалось очень внушительным.

Угол откоса $\leq 45^0$, иначе земля начнет осыпаться.

Решение к задаче 4*. $V=0,2 \cdot 100\ 000=20\ 000(\text{дм}^3)=20(\text{м}^3)$.

Так как $H=R$, то $V=1/3\pi H^3$.

$$H = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 20}{3,14}} \approx 2,7 \text{ м.}$$

Ответ: 2,7 метров.




Надо обладать очень богатым воображением, чтобы земляную кучу в 2,7 м (1,5 человеческого роста) назвать «гордым холмом». Сделав расчет для меньшего угла, мы получили бы еще более скромный результат.

У Аттилы было самое многочисленное войско, которое знал древний мир. Историки оценивают его в 700 000 человек.

Если бы даже все воины Аттилы участвовали в насыпании холма, образовалась бы куча повыше вычисленной нами, но не очень.

Домашнее задание.

Попробуйте сами дома вычислить высоту такого кургана и подумать, удовлетворила ли бы такая высота честолюбие Аттилы или нет?




*«Наука изощряет ум;
ученье воострит память.»*

Козьма Прутков



Спасибо
за
урок!

A stylized silhouette of a mountain range in shades of teal and blue, located at the bottom right of the slide.